

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01212304 8

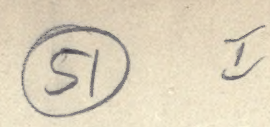












SOPHUS LIE,

VORLESUNGEN

ÜBER

CONTINUIERLICHE GRUPPEN

MIT

GEOMETRISCHEN UND ANDEREN ANWENDUNGEN.

BEARBEITET UND HERAUSGEGEBEN

VON

DR. GEORG SCHEFFERS,

PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.

Vorwort.

Das vorliegende Werk soll zur Einführung in die Theorie der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen dienen, und zwar nicht bloss für Solche, die das Studium der Gruppentheorie frühzeitig, ohne allzuviele Vorkenntnisse aus der elementaren Mathematik beginnen wollen, sondern auch für Solche, die schon weitergehende mathematische Kenntnisse besitzen.

Um diesen verschiedenen Kategorien von Lesern das Eindringen in die Gruppentheorie zu erleichtern und angenehm zu machen, haben wir das Werk in zwei Hauptabschnitte zerlegt. — Der erste Abschnitt wird dem Anfänger die wichtigsten Begriffe der Gruppentheorie im Gebiete der Ebene, also in dem zweier Veränderlicher klar machen und liefert dabei auch sonst nützliche und für das weitere Vordringen nötige Sätze aus der projectiven Geometrie, die wir auf dieser Stufe beim Leser nicht als bekannt voraussetzen. — Der zweite Abschnitt stellt etwas mehr Anforderungen. Hier setzen wir voraus, dass der Leser die Elemente der höheren Mathematik beherrscht und den Hauptinhalt des ersten Abschnittes kennt. Ein Fachmann, der die Gruppentheorie studieren will, kann allerdings direct mit dem zweiten Abschnitt beginnen, wird aber immerhin gut thun und wohl auch öfters dazu genötigt sein, auf einzelne Ausführungen des ersten Abschnittes zurückzugreifen, da dieser sehr viele an sich wichtige Beispiele zu den späteren Theorien enthält.

Die von Sophus Lie in den Jahren 1873—84 begründete Theorie der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen besitzt für sehr viele Zweige der höheren Mathematik die grösste Bedeutung. Man wird sich daher heutzutage kaum mehr der Kenntnisnahme dieser Theorie entziehen können. Eine systematische Darstellung der Theorie findet man nun zwar in der in gleichem Verlage erschienenen *„Theorie*

der Transformationgruppen, unter Mitwirkung von Prof. Engel bearbeitet von Sophus Lie", 1888—93, in drei Abschnitten. Aber dieses grosse Werk ist nicht sowohl auf die erste Einführung als vielmehr auf das gründliche Studium der Theorie in voller Allgemeinheit berechnet. Es soll in einem wohlgegliederten System die ganze Theorie in ihrer heutigen Vollendung darbieten. Demgemäss giebt es auch die Betrachtungen von vornherein in n Veränderlichen.

In älteren Arbeiten sowie in seinen Vorlesungen schlug Lie einen anderen Weg ein, indem er die Theorie zuerst in einer, in zwei und in drei Veränderlichen auseinandersetzte, ehe er zu allgemeinen Betrachtungen in n Veränderlichen überging. Dadurch fanden die Begriffe und Sätze eine anschaulich geometrische Deutung, die der Verständlichkeit der rein analytischen Entwickelungen zu gute kam.

Dieser Weg wird nun auch in den vorliegenden Vorlesungen eingeschlagen, deren Studium etwa zwei Semester in Anspruch nehmen wird.

Der *erste* — elementare — *Hauptabschnitt* geht aus von der Betrachtung der projectiven und dann der analytischen Transformationen überhaupt auf der Geraden und in der Ebene. Er zerfällt in drei Abteilungen:

In der *ersten Abteilung* wird eine Reihe von Einzelproblemen als Beispielen für das Spätere durchgeführt. Eine grosse Anzahl von neuen Begriffen tritt hier in specieller Fassung auf, die auf einer späteren Stufe in allgemeinerer Bedeutung wiederkehren. Die Methoden, deren wir uns hier bedienen, sind nur erst zum Teil solche der Gruppentheorie und häufig den speciellen Problemen angepasst. In der *zweiten Abteilung* wird die Theorie der projectiven Gruppen in der Ebene ziemlich ausführlich behandelt, während die *dritte Abteilung* die Bestimmung aller endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene bringt. Hier sind die Methoden schon vorwiegend die der allgemeinen Gruppentheorie.

Der ganze erste Abschnitt ist so elementar gehalten, wie es der Stoff zuliess. Wir heben ausdrücklich hervor, dass die Elemente der projectiven Geometrie der Ebene durch die Betrachtungen dieses Abschnittes zugleich mitgeliefert werden. Es darf wohl behauptet werden, dass die Einführung in die projective Geometrie in Verbindung mit der Betrachtung der projectiven Gruppen der Ebene erheblich an Interesse gewinnt. Nebenbei sei bemerkt, dass der erste Abschnitt eine grosse Anzahl von Sätzen enthält, die auf dieser Stufe als besonders wichtig erscheinen und deshalb als *Theoreme* formuliert sind. Dies schliesst nicht aus, dass sie später z. T. als Specialfälle viel bedeuten-

derer Sätze erscheinen. Im zweiten Abschnitt ist die Bezeichnung: Theorem nur für solche Ergebnisse benutzt, die unseres Erachtens wirklich eine für die Gruppentheorie grundlegende Bedeutung haben.

Im *zweiten Hauptabschnitt* denken wir uns den Leser vertraut mit der elementaren Theorie der Differentialgleichungen, wie sie in Vorlesungen behandelt zu werden pflegt, und geübt in der Anstellung rechnerischer Betrachtungen in n Veränderlichen. Auch dieser Abschnitt zerfällt in drei Abteilungen, die als vierte, fünfte und sechste nummeriert sind.

Die vierte Abteilung bildet ein in sich abgeschlossenes Ganzes und ist äusserst wichtig. Sie enthält nämlich die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie. Sie ist so abgefasst, dass sie — wie wir hoffen — auch ohne die Lectüre des Vorhergehenden verständlich bleibt. Die Beweise der drei Fundamentalsätze der Gruppentheorie im 15. Kap. sind in einer rein analytischen Fassung gegeben, die an Kürze nichts zu wünschen übrig lässt. Ihr folgt die begriffliche Wiedergabe der Beweise, die streng genommen nicht nötig, aber doch nützlich ist, da sie in das innere Wesen der Sätze einführt. Ein besonderes Gewicht legen wir ferner auf das 16. Kap. *über die bei einer Gruppe invarianten Gebilde.*

Die *fünfte Abteilung* giebt wie die sechste eine Reihe von einzelnen Kapiteln der Gruppentheorie und ihrer Anwendungen. Wir geben nachher Hinweise, in welcher Art ein Leser, der nicht alles dies studieren will, zunächst eine Auswahl daraus treffen kann, ohne wesentliche Störungen der Verständlichkeit befürchten zu müssen. Die fünfte Abtheilung ist den linearen homogenen Gruppen gewidmet, die deshalb eine besondere Bedeutung haben, weil mit jeder Gruppe gewisse derartige Gruppen eng verknüpft sind. Das 21. Kapitel giebt als Anwendung der Gruppentheorie einen Abriss über die Theorie der *höheren complexen Zahlen,* verbunden mit einem Berichte über die Geschichte und den gegenwärtigen Stand dieser Theorie.

In der *sechsten Abteilung*, die *Anwendungen der Gruppentheorie* enthält, wird ein Fundamentalproblem der Mathematik zunächst in Beispielen, dann allgemein behandelt, das *Äquivalenzproblem*, die Frage nämlich nach den Kriterien für die Überführbarkeit von Gebilden in einander vermöge einer vorgelegten Gruppe, und das damit eng verknüpfte Problem der Aufstellung von *Invariantentheorien* für Gruppen. Hierbei spielt der Begriff *Differentialinvariante* eine hervorragende Rolle. Zur Orientirung wird zuerst ausführlich die Congruenztheorie der Curven und in grossen Zügen die der Flächen dargestellt, womit eine Lücke in der heutigen Geometrie ausgefüllt wird.

Die dabei und in einem anderen Beispiel angewandte Methode ist typisch für die Behandlung ähnlicher Probleme und deshalb unter möglichst allgemeinen Gesichtspunkten dargestellt. Das allgemeine Äquivalenzproblem wird im 23. Kap. in allem Wesentlichen erledigt. Zum Schlusse endlich geben wir eine andere Anwendung der Gruppentheorie, eine Behandlung der Systeme von *Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen.*

Wenn auch das Werk durch die Aufnahme aller dieser Betrachtungen eine etwas grosse Ausdehnung gewonnen hat, *so kann und soll es dafür in dieser Form geradezu eine Einleitung in alle drei Bände des oben erwähnten grossen Lie'schen Werkes bieten.* Der Leser, der das vorliegende Werk studiert, eignet sich schon in sehr grossem Masse gruppentheoretische Vorstellungen und Ergebnisse an.

Alle in diesem Buche enthaltenen neuen Theorien sind, wo es nicht anders bemerkt wird, von Sophus Lie gegeben worden.

Die Aufgabe des Unterzeichneten bestand in der Hauptsache in der Anordnung und Bearbeitung des reichen Stoffes, wobei ihm zu einem grossen Teil knappgehaltene Manuscripte von Lie sowie eigene Nachschriften zur Verfügung standen. In stärkerem Masse hat er das Kapitel über complexe Zahlen beeinflusst.

Was die von demselben herausgegebenen „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen" von Sophus Lie in gleichem Verlage, 1891, betrifft, so ist zu bemerken, dass das vorliegende Werk davon unabhäng und in sich abgeschlossen ist und dass nur einige wenige Theorien in beide Werke zugleich aufgenommen werden mussten. Im Übrigen aber wird ein Leser, der die Vorlesungen über Differentialgleichungen kennt, die Lectüre des gegenwärtigen Buches besonders leicht finden.

Endlich noch einige *practische Hinweise:* Die Abteilungen V und VI können auch — wie gesagt — nur zum Teil studiert werden. Dabei sind aber für § 1 und § 6 des 20. Kap. einige Sätze aus dem 19. Kap. erforderlich, während das 20. im übrigen auch ohne das 19. verstanden werden wird. Kap. 21 setzt Einiges aus dem 19., aber nichts Wesentliches aus dem 20. voraus. Die Abteilung VI ist von der Abteilung V völlig unabhängig, ebenso das allerletzte, 24., Kapitel des Buches von den übrigen Kapiteln dieser beiden Abteilungen.

Durch ein zum Schluss hinzugefügtes *alphabetisches Sachregister,* das hoffentlich genügende Vollständigkeit besitzt, glaube ich den Wünschen der Leser zu entsprechen.

Nur noch zweierlei bleibt mir zu sagen übrig: Einmal muss ich um gütige Nachsicht gegenüber den Unvollkommenheiten der Bearbeitung bitten, der verschiedene Umstände hinderlich waren. Dann aber spreche ich meinen wärmsten Dank Herrn Professor Sophus Lie, der mich auch bei der Bearbeitung dieses Werkes mit Rat und That unermüdlich unterstützt hat, sowie den Herren Verlegern aus, die allen Wünschen bezüglich der Herstellung bereitwilligst entgegengekommen sind.

Leipzig, im August 1893.

Georg Scheffers.

Inhaltsverzeichnis*).

Erster Abschnitt.

Abteilung I.

*) Ein alphabetisch geordnetes *Sachregister* findet sich am Schluss des Werkes.

Abteilung II.

Abteilung III.

Zweiter Abschnitt.

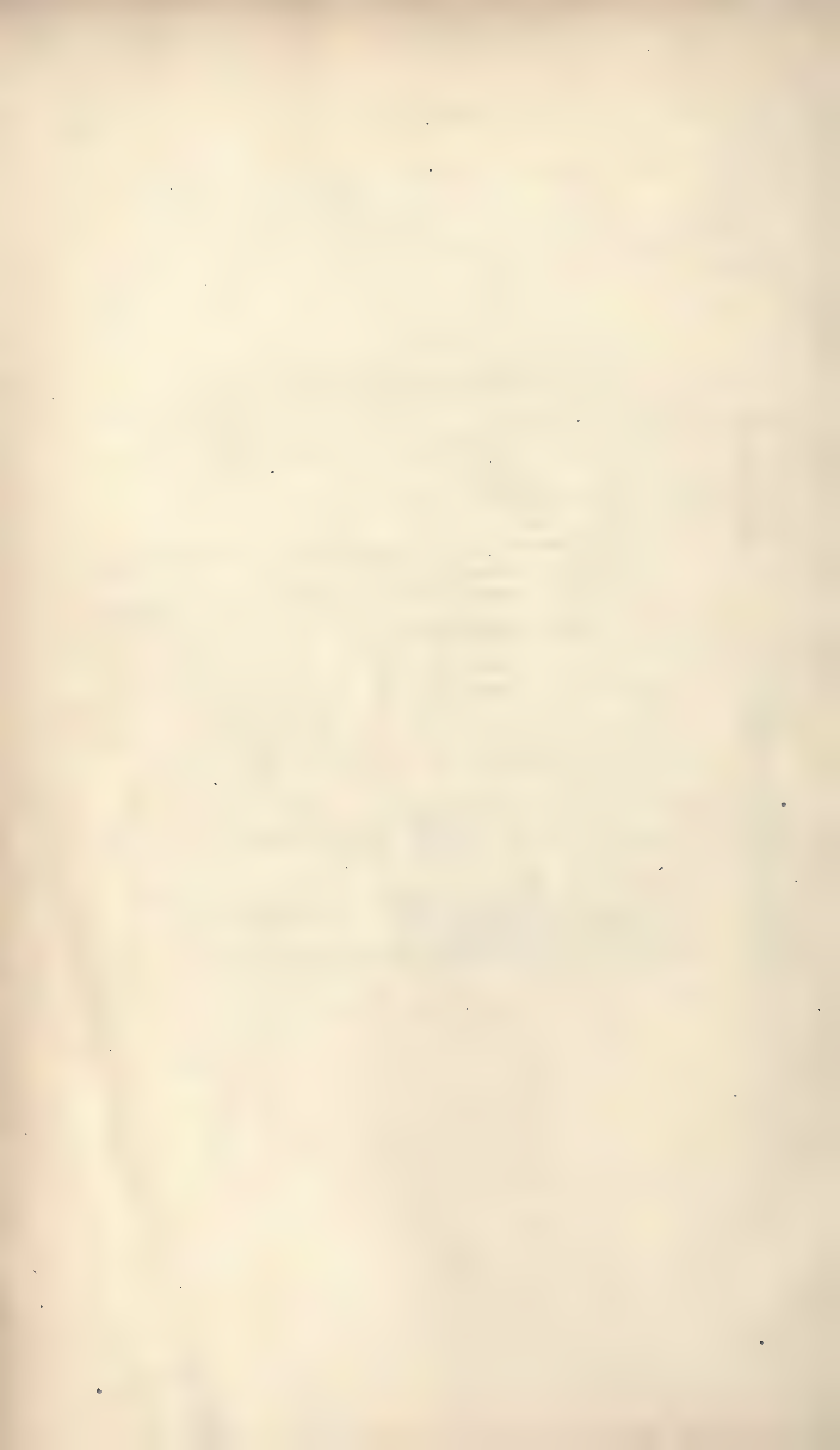
Abteilung IV.

Abteilung V.

Abteilung VI.

Berichtigungen.

Seite 77, Z. 18 v. u. lies Const. statt 0.
- 2 v. u. lies α statt a.
- 81, - 6 v. u. lies 15 statt 5.
- 103, - 15 v. u. lies ∞^2 statt ∞^3.
- 122, - 7 v. o. lies x_1 statt t.
- 156, - 3 v. u. ist hinzuzufügen: „oder wenn sie in einer der beiden Gleichungen wesentlich sind“.
- 189, 190, 192 ist vor der Doppelsumme in den Reihenentwickelungen der Factor $\frac{1}{2}$ einzuschalten.
- 193, Z. 11 v. u. lies x_2, y_2 statt x_3, y_3.
- 202, - 2 v. u. lies $e_1 \ldots e_r$ statt $c_1 \ldots c_r$.
- 205, - 6 u. 5 v. u. lies $x_1 = x +$ Const., $y_1 = y +$ Const.
- 206, - 18 v. o. lies der statt die.
- 254, - 13 v. u. lies des statt der.
- 256, - 12 v. u. lies P_d statt Δ_d.
- 289 fehlt die Klammer zwischen 21) und 22).
- 290, Z. 3 v. o. lies Invarianter Punkt statt Invariante Punkte.
- 306, - 3 d. Fussnote lies z, $x_1 \ldots x_n$ statt $x_1 \ldots x_n$.
- 312, - 10 v. u. lies § 3 statt § 2.
- 313, - 15—17 v. o. ist „nullter“ mit „zweiter“ zu vertauschen.
- 361, - 1 v. o. fehlt q in d. 2. inf. Trf.
- 666, - 6 v. u. lies Congruenzkriterien statt Convergenzkriterien.
- 704, - 9 v. u. lies $=$ statt $\equiv$.



ERSTER ABSCHNITT.



Abteilung I.

Die allgemeine projective Gruppe der Ebene und einige ihrer Untergruppen.

Die Begriffe der Gruppentheorie wollen wir dadurch einführen, dass wir sie zunächst an einigen besonders wichtigen und bekannten Gruppen der Ebene erläutern, an der allgemeinen projectiven Gruppe und einigen in ihr enthaltenen Gruppen. Erst die zweite Abteilung wird uns zu den allgemeinen Theorien führen, mit deren Hülfe sich die Betrachtungen des jetzigen Abschnittes an vielen Stellen bedeutend abkürzen liessen. Wir finden es eben zweckmässig, zuvörderst zur Lösung der sich darbietenden einzelnen Probleme specielle Methoden anzuwenden.

Kapitel 1.

Projective Transformation der Geraden und der Ebene.

In diesen Vorlesungen beschäftigen wir uns vielfach mit geometrischen, insbesondere mit sogenannten projectiven Theorien in der Ebene. Da wir jedoch die Kenntnis der projectiven Geometrie nicht voraussetzen, vielmehr manche wichtige Theorien derselben erst entwickeln wollen, so erscheint es zweckmässig, zunächst den Grundbegriff der projectiven Geometrie, das *Doppelverhältnis,* kurz zu besprechen. Alsdann führen wir den Begriff: *projective Transformation auf der Geraden und in der Ebene* ein.

§ 1. Das Doppelverhältnis.

Sind auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D gegeben (Fig. 1), so kann man in verschiedenen Weisen aus den Quotienten ihrer Abstände von einander sogenannte *Doppelverhältnisse* bilden. So ist

Doppelverhältnis.

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}$$

eines dieser Doppelverhältnisse. Wir bezeichnen es zur Abkürzung mit $(ABCD)$, sodass

$$(ABCD) \equiv \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD}$$

sein soll. Indem man die Punkte A, B, C, D auf alle möglichen Weisen permutiert, erhält man im ganzen $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Doppelverhältnisse der vier Punkte A, B, C, D. Wir wollen uns aber nur mit dem einen oben angegebenen beschäftigen.

Zu seiner vollständigen Definition muss noch hervorgehoben werden, dass die Strecken AB, CB, AD, CD in der in der analytischen Geometrie gebräuchlichen Weise mit Vorzeichen versehen zu denken sind. Setzt man in Fig. 1 den positiven Sinn in der Richtung des Pfeiles fest, so sind also in dieser Figur AB, AD und CD positiv, während CB negativ ist, sodass $(ABCD)$ einen negativen Wert hat. Bei Umkehrung des Sinnes ändert es offenbar sein Zeichen nicht. Lägen die Punkte A, B, C, D nicht gerade in dieser Reihenfolge auf der Geraden, so könnte $(ABCD)$ auch positiven Wert haben.

Fig. 1.

Es mögen nun andererseits (Fig. 2) durch einen Punkt O vier Strahlen a, b, c, d gezogen sein. Für die Messung ihrer Winkel (ab) u. s. w. setzen wir einen positiven Drehsinn um O fest, etwa in der Richtung des Pfeiles, sodass (ab) positiv, (cb) dagegen negativ ist. Man kann nunmehr aus den Quotienten der Sinus dieser Winkel *Doppelverhältnisse* bilden, unter anderen dieses:

Fig. 2.

$$\frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)},$$

das wir mit $(abcd)$ bezeichnen:

$$(abcd) \equiv \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)}.$$

Permutieren wir a, b, c, d, so ergeben sich insgesamt 24 Doppelverhältnisse der Strahlen a, b, c, d.

Schneiden wir die vier Strahlen durch eine Gerade g (Fig. 3), die a, b, c, d bez. in A, B, C, D treffe. Alsdann ist, wenn wir zunächst vom Vorzeichen absehen:

Fig. 3.

$$\frac{AB}{AO} = \frac{\sin(ab)}{\sin(bg)}, \quad \frac{CB}{CO} = \frac{\sin(cb)}{\sin(bg)},$$

also auch

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AO}{CO} = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)}.$$

Analog ist

$$\frac{AD}{CD} : \frac{AO}{CO} = \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)},$$

sodass schliesslich

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{\sin(ab)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(cd)}$$

oder

$$(ABCD) = (abcd)$$

ist. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Formel auch in bezug auf das Vorzeichen stets richtig ist. Hiermit ist der Satz bewiesen:

Satz 1: *Das Doppelverhältnis eines Vierstrahls ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen der Vierstrahl von einer Geraden geschnitten wird.*

Ebenso ist natürlich auch $(ABDC) = (abdc)$ u. s. w.

Unmittelbar folgt als Zusatz der sogenannte Satz des Pappus:

Satz des Pappus.

Satz 2: *Ein Vierstrahl wird von allen Geraden in demselben Doppelverhältnis geschnitten,*

sowie:

Satz 3: *Alle Vierstrahlen, die durch dieselben vier Punkte einer Geraden gehen, haben dasselbe Doppelverhältnis.*

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass bei der Bildung des Doppelverhältnisses stets vorausgesetzt wird, dass die vier Strahlen in derselben Reihenfolge wie die vier Punkte genommen worden sind.

Man erkennt durch wirkliche Berechnung leicht, dass das Doppelverhältnis

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA)$$

ist. So sind überhaupt je vier der 24 Doppelverhältnisse der Punkte A, B, C, D einander gleich, sodass es nur sechs verschiedene Werte derselben geben kann, die im allgemeinen auch wirklich verschieden sind. Setzt man nämlich

$$(ABCD) = k,$$

so ist

$$(ABCD) = k, \qquad (ADCB) = \frac{1}{k}, \qquad (ACBD) = 1 - k,$$

$$(ADBC) = \frac{1}{1-k}, \quad (ABDC) = \frac{k}{k-1}, \quad (ACDB) = \frac{k-1}{k}.$$

Diese sechs verschiedenen Werte des Doppelverhältnisses von vier Punkten fallen zu je zweien zusammen, wenn $k = -1$ ist. Man sagt, dass die vier Punkte A, B, C, D ein *harmonisches* Doppelverhältnis bilden, wenn

$$(ABCD) = -1$$

ist, und nennt dann A, C und B, D harmonische Punktepaare. Die sechs Werte des Doppelverhältnisses reducieren sich dann auf die drei: -1, 2 und $\frac{1}{2}$.

Wenn von den vier Punkten A, B, C, D einer, etwa D, unendlich fern liegt, so ist

$$(ABCD) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CB} : \frac{AC + CD}{CD} = \frac{AB}{CB}.$$

Liegen vier Punkte A, B, C, D auf irgend einer Geraden in der Ebene und sind, bezogen auf ein rechtwinkliges Axensystem, a, b, c, d ihre Abscissen, so ist das Doppelverhältnis:

$$(ABCD) = \frac{b-a}{b-c} : \frac{d-a}{d-c} = \frac{a-b}{c-b} : \frac{a-d}{c-d}.$$

Nennen wir andererseits, wenn a, b, c, d irgend welche Zahlen sind, den Ausdruck

$$\frac{a-b}{c-b} : \frac{a-d}{c-d}$$

das Doppelverhältnis der vier Zahlen, so können wir also sagen:

Satz 4: *Das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ist gleich dem Doppelverhältnis ihrer Abscissen oder ihrer Ordinaten.*

Schliesslich heben wir hervor, dass, wenn a, b, c und das Doppelverhältnis seinem Werte k nach gegeben sind, alsdann aus

$$\frac{a-b}{c-b} : \frac{a-d}{c-d} = k$$

stets ein und nur ein Wert für d hervorgeht. Dies sprechen wir so aus:

Satz 5: *Sind drei Elemente a, b, c eines Doppelverhältnisses und ist auch dieses seinem Werte k nach gegeben, so bestimmt sich das fehlende Element x eindeutig aus der Forderung:*

$$(abcx) = k.$$

§ 2. Projective Transformation der Geraden.

Nehmen wir nunmehr an, es seien auf zwei Geraden g und g_1 drei Punkte A, B, C bez. A_1, B_1, C_1 gegeben. Ferner nehmen wir auf der einen Geraden g einen Punkt X ganz beliebig an. Alsdann kann man nach solchen Punkten X_1 der Geraden g_1 fragen, die mit A_1, B_1, C_1 dieselben Doppelverhältnisse bilden, wie X mit A, B, C. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass

$$(ABCX) = (A_1 B_1 C_1 X_1)$$

sei.

Führen wir auf der Geraden g von einem Punkte O aus gemessene Abscissen ein, indem wir — mit Berücksichtigung des Vorzeichens — $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OX = x$ setzen, und verfahren wir analog auf der anderen Geraden g_1, indem wir auf ihr O_1 wählen und $O_1 A_1 = a_1$, $O_1 B_1 = b_1$, $O_1 C_1 = c_1'$, $O_1 X_1 = x_1$ setzen, so wird:

$$(ABCX) = \frac{AB}{CB} : \frac{AX}{CX} = \frac{AO + OB}{CO + OB} : \frac{AO + OX}{CO + OX}$$

$$= \frac{b - a}{b - c} : \frac{x - a}{x - c} = \frac{a - b}{c - b} : \frac{a - x}{c - x}$$

und

$$(A_1 B_1 C_1 X_1) = \frac{a_1 - b_1}{c_1 - b_1} : \frac{a_1 - x_1}{c_1 - x_1}.$$

Wir verlangen also:

$$\frac{a - b}{c - b} : \frac{a - x}{c - x} = \frac{a_1 - b_1}{c_1 - b_1} : \frac{a_1 - x_1}{c_1 - x_1}. \tag{1}$$

Dies ist für x_1 eine Gleichung ersten Grades, ebenso für x. Jedem Punkte X von g wird also gerade ein Punkt X_1 von g_1 zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jedem Punkte X_1 von g_1 gerade ein Punkt X von g. Es ist somit eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den beiden Geraden festgesetzt. Wenn insbesondere $x = a$ wird, so wird $x_1 = a_1$ u. s. w., d. h. den Punkten A, B, C entsprechen bei dieser Beziehung gerade die Punkte A_1, B_1, C_1.

Die Gleichung (1) hat nach x_1 aufgelöst die Form:

$$x_1 = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho}$$

und ist nach x auflösbar, sodass $\lambda\varrho - \nu\mu \neq 0$ sein wird.

Wenn andererseits irgend eine Gleichung von der Form

$$x_1 = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho} \tag{2}$$

vorliegt, in der λ, μ, ν, ϱ beliebig gewählte Werte haben, doch so, dass $\lambda\varrho - \mu\nu \neq 0$ ist, so ordnet sie jedem Punkte (x) von g einen Punkt (x_1) von g_1 zu und umgekehrt. Nehmen wir insbesondere für x drei bestimmte Werte a, b, c an, und bezeichnen wir die entsprechenden Werte von x_1 mit a_1, b_1, c_1, so haben wir:

$$a_1 = \frac{\lambda a + \mu}{\nu a + \varrho}, \quad b_1 = \frac{\lambda b + \mu}{\nu b + \varrho}, \quad c_1 = \frac{\lambda c + \mu}{\nu c + \varrho}, \quad x_1 = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho}. \tag{3}$$

Nun ist das Doppelverhältnis der zu den Abscissen a, b, c, x gehörigen Punkte A, B, C, X von g gleich:

$$(ABCX) = \frac{a - b}{c - b} : \frac{a - x}{c - x}$$

und der zu a_1, b_1, c_1, x_1 gehörigen Punkte A_1, B_1, C_1, X_1 von g_1 gleich:

$$(A_1 B_1 C_1 X_1) = \frac{a_1 - b_1}{c_1 - b_1} : \frac{a_1 - x_1}{c_1 - x_1}.$$

Setzt man hierin die Werte (3) ein, so kommt:

$$(A_1 B_1 C_1 X_1) = \frac{(\lambda a + \mu)(\nu b + \varrho) - (\lambda b + \mu)(\nu a + \varrho)}{(\lambda c + \mu)(\nu b + \varrho) - (\lambda b + \mu)(\nu c + \varrho)}$$
$$: \frac{(\lambda a + \mu)(\nu x + \varrho) - (\lambda x + \mu)(\nu a + \varrho)}{(\lambda c + \mu)(\nu x + \varrho) - (\lambda x + \mu)(\nu c + \varrho)}$$
$$= \frac{(\lambda \varrho - \mu \nu)(a - b)}{(\lambda \varrho - \mu \nu)(c - b)} : \frac{(\lambda \varrho - \mu \nu)(a - x)}{(\lambda \varrho - \mu \nu)(c - x)}$$
$$= \frac{a - b}{c - b} : \frac{a - x}{c - x} = (ABCX).$$

Die durch (2) hergestellte Beziehung ist demnach genau die oben besprochene: Jedem Punkte X von g wird der Punkt X_1 von g_1 zugeordnet, der mit A_1, B_1, C_1 dieselben Doppelverhältnisse bildet, wie X mit A, B, C.

Wir haben aber noch mehr bewiesen:

Satz 6: *Die Gleichung*

$$x_1 = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho}, \quad wo \ \lambda \varrho - \mu \nu \neq 0,$$

ordnet jedem Punkte (x) *einer Geraden einen Punkt* (x_1) *einer Geraden zu und umgekehrt. Dabei sind die Doppelverhältnisse von irgend vier Punkten der einen Geraden genau gleich den entsprechenden Doppelverhältnissen der zugeordneten vier Punkte der anderen Geraden.*

Wir können sagen: Die Gleichung (2) führt jeden Punkt (x) der Geraden g in einen Punkt (x_1) der Geraden g_1 über, sodass die Doppelverhältnisse der ursprünglichen Punkte gleich denen der neuen Punkte sind. Eine solche Überführung heisst eine *projective Transformation* der Geraden g in die Gerade g_1.

Projective Transformation.

Man kann diese projective Transformation leicht rein geometrisch herstellen: Wir legen die Geraden g und g_1, auf denen A, B, C, X und A_1, B_1, C_1, X_1 entsprechende Punkte sind, so, dass A mit A_1 zur Deckung kommt (Fig. 4). BB_1 und CC_1 werden sich dann in einem Punkte U treffen. Der Strahl UX schneide g_1 in X'. Es ist dann nach dem Satz des Pappus

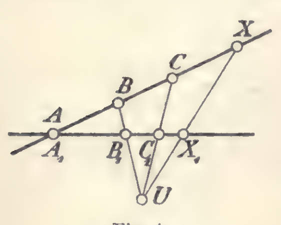


Fig. 4.

$$(ABCX) = (A_1 B_1 C_1 X').$$

X' muss demnach mit dem Punkte X_1 zusammenfallen. Man erhält also zu jedem Punkt X der Geraden g den transformierten Punkt X_1 der Geraden g_1, indem man diese mit UX zum Schnitt bringt.

Satz 7: *Liegen zwei projectiv auf einander bezogene Geraden so, dass ihr Schnittpunkt — aufgefasst als Punkt der einen — sich selbst — aufgefasst als Punkt der anderen — entspricht, so gehen die Verbindungsstrahlen je zweier entsprechender Punkte der Geraden sämtlich durch denselben Punkt.*

Man sagt dann, dass die projectiv auf einander bezogenen Geraden g und g_1 sich *in perspectiver Lage* befinden, und nennt U das *Perspectivitätscentrum.* Perspective Lage.

Wir werden später ausführlich auf die projectiven Transformationen der Geraden zu sprechen kommen. Hier bemerken wir nur noch, dass wir die Geraden g und g_1 zusammenfallen lassen können, indem wir die Anfangspunkte der Abscissen auf beiden ebenfalls zusammenrücken lassen. Alsdann stellt die Gleichung

$$x_1 = \frac{\lambda x + \mu}{\nu x + \varrho} \tag{2}$$

eine projective Transformation der Geraden in sich dar: Jeder Punkt (x) der Geraden wird in einen Punkt (x_1) derselben verwandelt. Dabei ist jedes Doppelverhältnis aus vier ursprünglichen Punkten gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis der vier transformierten Punkte. Zu bemerken ist, dass sich die Gleichung (2) auch in der Form einer *bilinearen Relation zwischen x und x_1* schreiben lässt:

$$\nu x x_1 - \lambda x + \varrho x_1 - \mu = 0,$$

und dass umgekehrt auch jede bilineare Relation zwischen x und x_1 auf die Form (2) gebracht werden kann, sobald die Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu \neq 0$ ist.

x_1 stellt sich als linear gebrochene Function von x dar. Danach liegt es nahe, wenn man zu Transformationen der *Ebene* übergehen will, die Coordinaten x_1, y_1 der transformierten Punkte als linear gebrochene Functionen der Coordinaten x, y der ursprünglichen Punkte anzunehmen. Indem wir dies so einrichten, dass auch umgekehrt x, y linear gebrochene Functionen von x_1, y_1 sind, werden wir zu den projectiven Transformationen der Ebene geführt.

§ 3. Projective Transformation der Ebene.

Sind die Punkte (x, y) und (x_1, y_1) zweier Ebenen E und E_1 je auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen worden, so stellen zwei Gleichungen von der Form

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{4}$$

eine sogenannte *projective Transformation* der Punkte (x, y) der Ebene E in die Punkte (x_1, y_1) der Ebene E_1 dar. Dabei bedeuten die a, b, c irgend welche Constanten. Beachtet werden möge, dass *die Nenner der rechten Seiten von* (4) *einander gleich sind.* Den gemeinsamen Nenner wollen wir mit N bezeichnen; wir setzen also:

$$N \equiv a_3 x + b_3 y + c_3. \tag{5}$$

Unsere Gleichungen (4) ordnen *jedem* Punkt (x, y) der Ebene E einen Punkt (x_1, y_1) der Ebene E_1 zu. Wenn wir nun die beiden Ebenen E und E_1 aufeinanderfallen lassen und in beiden dasselbe Coordinatenkreuz zu Grunde legen, so stellen die Gleichungen (4) eine *projective Transformation der Ebene in sich* dar: Jedem Punkt (x, y) der Ebene wird ein Punkt (x_1, y_1) derselben zugeordnet. Wir können sagen, dass dann die Gleichungen (4) jeden Punkt (x, y) der Ebene in einen neuen Punkt (x_1, y_1) derselben überführen.

Projective Transformation der Ebene.

Künftig wollen wir uns mit diesen projectiven Transformationen einer Ebene längere Zeit beschäftigen.

Warum gerade sie untersucht werden sollen, und warum man sie *projective* Transformationen nennt, das sind Fragen, die im Laufe unserer späteren Betrachtungen beantwortet werden.

Auflösbarkeit der Gleichungen der Transformation.

Es erhebt sich zunächst die Frage, ob die Gleichungen (4) auch umgekehrt zu jedem Punkte (x_1, y_1) einen Punkt (x, y) liefern, mit anderen Worten, ob sie auch nach x, y auflösbar sind. Um dies zu entscheiden, betrachten wir die drei folgenden Gleichungen, die (4) und (5) ersetzen:

$$(6) \qquad \begin{cases} Nx_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ Ny_1 = a_2 x + b_2 y + c_2, \\ \quad N = a_3 x + b_3 y + c_3. \end{cases}$$

Ihre rechten Seiten sind als lineare und homogene Functionen von x, y und 1 aufzufassen, deren Determinante lautet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Es mögen A_1, A_2, A_3 die zweireihigen Unterdeterminanten von Δ hinsichtlich a_1, a_2, a_3 bezeichnen, es sei also:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

und entsprechend seien B_1, B_2, B_3 und C_1, C_2, C_3 die zweireihigen Unterdeterminanten von Δ hinsichtlich b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3, also

$$B_1 = \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.},$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}.$$

Dann ist bekanntlich:

$$(7) \qquad \begin{cases} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = \varDelta, \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 + b_3 A_3 = 0, \\ c_1 A_1 + c_2 A_2 + c_3 A_3 = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Gleichungen (6) mit A_1, A_2, A_3 multiplicieren und darauf addieren, so kommt also einfach:

$$N(A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3) = \varDelta x.$$

(8) Ganz analog ergeben sich die Formeln:

$$N(B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3) = \varDelta y,$$
$$N(C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3) = \varDelta.$$

Ist nun die Determinante $\varDelta \neq 0$, so können wir die beiden ersten dieser Gleichungen durch die letzte dividieren, und wir erhalten

$$(9) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3}{C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3}, \\ y = \dfrac{B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3}{C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3} \end{cases}$$

als die Auflösung von (1) nach x, y.

Wenn dagegen $\varDelta = 0$ ist, so liefert (8):

$$N(A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3) = 0,$$
$$N(B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3) = 0,$$
$$N(C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3) = 0.$$

Wählen wir dann x, y beliebig, so wird N nicht gerade Null sein. Es folgt also dann

$$A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3 = 0,$$
$$B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3 = 0,$$
$$C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3 = 0.$$

Sind die zweireihigen Determinanten A, B, C nicht sämtlich Null, so erfüllen daher x_1, y_1 lineare Bedingungsgleichungen, die sich, wie man leicht erkennt, auf nur *eine* Gleichung reducieren. Sind die Determinanten A, B, C sämtlich Null, aber die Coefficienten a, b, c der Transformation nicht sämtlich Null, so findet man, dass die x_1, y_1 *zwei* verschiedene lineare Bedingungsgleichungen erfüllen. Ist $\varDelta = 0$, so sind daher die Punkte (x_1, y_1) zum mindesten an eine Gerade in der Ebene gebunden und können sich nicht, wie man auch x, y wählen mag, von dieser Geraden entfernen. Wir erkennen somit, dass sich alsdann x, y nicht als Functionen von x_1, y_1 darstellen lassen, da sonst zu einem beliebigen Wertepaar x_1, y_1 ein Wertepaar x, y vorhanden wäre, d. h. dass die Gleichungen (4) nicht nach x, y auflösbar sind.

Die Gleichungen (4) *sind dann und nur dann nach x, y auflösbar, wenn $\varDelta \neq 0$ ist,* d. h. wenn die drei rechten Seiten von (6) oder also die beiden Zähler und der Nenner von (4) gleich Null gesetzt die Gleichungen dreier Geraden darstellen, die ein *wirkliches* Dreieck bilden.

Im Falle $\varDelta = 0$ würden nach dem Gesagten alle beliebigen Punkte (x, y) der Ebene durch unsere Transformation in die Punkte (x_1, y_1) einer Geraden oder gar nur in einen Punkt übergeführt werden. Dies tritt z. B. ein, wenn

$$x_1 = \frac{x}{y}, \quad y_1 = \frac{2x + y}{y}$$

gesetzt wird, denn dann erfüllen alle Punkte (x_1, y_1) nur die Gerade:

$$2x_1 - y_1 + 1 = 0.$$

Ausgeartete Transformation.

Eine derartige Transformation würden wir als *ausgeartet* bezeichnen im Gegensatze zu einer solchen, welche alle Punkte (x, y) in neue Lagen (x_1, y_1) überführt, die die ganze Ebene überdecken, sodass zu jedem Punkte (x_1, y_1) auch ein ursprünglicher Punkt (x, y) gehört.

Voraussetzung: $\varDelta \neq 0$.

Wir nehmen daher in allem Folgenden an, es sei die Determinante:

$$\varDelta \neq 0.$$

Nach den obigen Entwickelungen liefert die Auflösung der Gleichungen (4) nach x, y wieder Gleichungen (9) von der Form einer *projectiven* Transformation, welche die Punkte (x_1, y_1) in die Punkte (x, y) überführt, also zu unserer ursprünglichen Transformation (4) *invers* ist. Diese wichtige Bemerkung zeigt, dass zu jeder projectiven Transformation eine inverse projective Transformation existiert, *dass sich also alle projectiven Transformationen paarweis als inverse Transformationen zusammenordnen lassen.* So ist beispielsweise der projectiven Transformation:

Inverse Transformation.

$$x_1 = \frac{x + y}{x}, \quad y_1 = \frac{x + 1}{x}$$

als invers diese zugeordnet:

$$x = \frac{1}{y_1 - 1}, \quad y = \frac{x_1 - 1}{y_1 - 1}.$$

Transformation einer Geraden.

Betrachten wir nun alle Punkte (x, y) irgend einer *Geraden*

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0. \tag{10}$$

Sie werden durch die projective Transformation (4) in neue Punkte (x_1, y_1) übergeführt. Wir fragen nach dem geometrischen Ort derselben. Zu diesem Zweck setzen wir die Werte (9) von x, y, ausgedrückt in x_1, y_1, in die Gleichung (10) ein und erhalten:

$$(11) \qquad \alpha \frac{A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3}{C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3} + \beta \frac{B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3}{C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3} + \gamma = 0.$$

Diese Gleichung aber ist, wenn wir noch mit dem Nenner $C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3$ multiplicieren, linear in x_1, y_1. Sie stellt folglich auch eine *Gerade* dar.

Unsere projective Transformation führt demnach eine beliebige Gerade wieder in eine Gerade über.

Wenn die vorgelegte Gerade insbesondere durch die Gleichung

$$N \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

dargestellt wird, so werden die Coordinaten x_1, y_1 der Punkte, in welche die Punkte (x, y) der Geraden übergehen, wegen der Gleichungen (4) unendlich gross; wir sagen: Die Gerade $N = 0$ wird durch die projective Transformation (4) in die *unendlich ferne Gerade* übergeführt, indem wir uns hiermit eine Ausdrucksweise der projectiven Geometrie aneignen.

Unendlich ferne Gerade.

Betrachten wir alle Geraden (x, y), die von einem Punkte der Geraden $N = 0$ ausgehen. Ist

$$(12) \qquad \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 = 0$$

eine beliebige Gerade, so wird jede Gerade, die durch den Schnittpunkt F derselben mit der Geraden $N = 0$ geht, dargestellt durch die Gleichung

$$(13) \qquad \begin{cases} (a_3 x + b_3 y + c_3) + \varrho\,(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3) = 0 \\ \text{oder} \\ (a_3 + \varrho\lambda_1)\, x + (b_3 + \varrho\lambda_2)\, y + (c_3 + \varrho\lambda_3) = 0. \end{cases}$$

Lassen wir ϱ variieren, so ergeben sich alle Strahlen des Büschels mit dem Scheitel F. Eine Gerade (13) wird nun durch die projective Transformation (4) nach (11) in die Gerade verwandelt:

$$(a_3 + \varrho\lambda_1)(A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3) + (b_3 + \varrho\lambda_2)(B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3)$$
$$+ (c_3 + \varrho\lambda_3)(C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3) = 0,$$

d. h. nach gewissen Beziehungen analog (7) in die Gerade:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 + \lambda_3 C_1)\, x_1 + (\lambda_1 A_2 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 C_2)\, y_1$$
$$+ (\lambda_1 A_3 + \lambda_2 B_3 + \lambda_3 C_3) + \frac{\Delta}{\varrho} = 0.$$

Lassen wir ϱ variieren, so giebt diese Gleichung lauter Parallelgeraden, da ϱ nur in dem absoluten Gliede vorkommt. Alle Geraden also, die sich in einem Punkte F der Geraden $N = 0$ schneiden, gehen bei unserer projectiven Transformation in Parallelgeraden über, deren gemeinsamer unendlich ferner Punkt F_1 — im Sinne der projectiven Geometrie — als der Punkt aufgefasst werden soll, in welchen F bei der Transformation übergeht.

Wir können auch die Gerade suchen, *in welche* die unendlich ferne Gerade bei unserer Transformation verwandelt wird: Die nach x, y aufgelösten Gleichungen (9) unserer Transformation lehren unmittelbar, dass

$$N_1 \equiv C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3 = 0$$

die Gleichung dieser Geraden ist. Entsprechend dem Obigen könnten wir beweisen, dass Parallelgeraden

$$\alpha x + \beta y = \text{Const.}$$

vermöge der Transformation (4) in Geraden übergehen, die sich sämtlich in einem Punkte Φ_1 der Geraden $N_1 = 0$ schneiden. Daher werden wir sagen, dass die Transformation (4) den unendlich fernen Punkt Φ jener Parallelgeraden in diesen Punkt Φ_1 der Geraden $N_1 = 0$ überführt.

Fluchtlinie und Fluchtpunkte.

Lesern, die mit der Perspective bekannt sind, wird die Bezeichnung der Geraden $N_1 = 0$, in welche die unendlich ferne Gerade transformiert wird, als *Fluchtlinie* und des Punktes Φ_1 dieser Geraden als *Fluchtpunkt* naheliegend sein.

Die Geraden, die in die Axen transformiert werden.

Schliesslich bemerken wir noch dies: Die Gleichungen (4) unserer projectiven Transformation zeigen unmittelbar, dass die Geraden

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

in die Geraden

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

übergeführt werden. Daher verwandelt die Transformation (4) das von den drei Geraden

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

gebildete wirkliche Dreieck in das Dreieck, das aus den Coordinatenaxen $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ und der unendlich fernen Geraden besteht. Die aufgelösten Gleichungen (9) zeigen umgekehrt, dass unsere projective Transformation (4) die Coordinatenaxen $x = 0$, $y = 0$ und die unendlich ferne Gerade in die drei Geraden

$$A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3 = 0,$$
$$B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3 = 0,$$
$$C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3 = 0$$

überführt, die auch ein wirkliches Dreieck bilden, da ihre Determinante nicht verschwindet, weil die Gleichungen (9) in der Form (4) nach x_1, y_1 auflösbar sind.

Kapitel 2.

Die allgemeine projective Gruppe der Ebene.

Wir haben im vorigen Kapitel eine bestimmte allgemeine projective Transformation betrachtet. In diesem Kapitel nun wollen wir die Gesamtheit aller unendlich vielen projectiven Transformationen ins Auge fassen, wodurch wir zu dem wichtigen Begriff: *allgemeine projective Gruppe der Ebene* geführt werden. Wir werden alsdann sehen, dass sich jede projective Transformation durch Wiederholung einer gewissen unendlich kleinen projectiven Transformation herstellen lässt. Dadurch werden wir zu den gleich wichtigen Begriffen: *infinitesimale projective Transformation und eingliedrige projective Gruppe* gelangen.

§ 1. Die allgemeine projective Gruppe.

In unserer allgemeinen projectiven Transformation

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{1}$$

kommen neun Constanten $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2;\ a_3, b_3, c_3$ vor. Wir hatten über die Annahme derselben nur die eine Voraussetzung getroffen, dass ihre Determinante Δ nicht gerade gleich Null sei. Wir bemerken aber, dass von diesen neun Coefficienten einer wegdividiert werden kann. Wir könnten z. B., wenn $c_3 \neq 0$ ist, in (1) Zähler und Nenner mit c_3 kürzen. Alsdann wären

$$\frac{a_1}{c_3},\ \frac{a_2}{c_3},\ \frac{a_3}{c_3};\ \frac{b_1}{c_3},\ \frac{b_2}{c_3},\ \frac{b_3}{c_3};\ \frac{c_1}{c_3},\ \frac{c_2}{c_3},\ 1$$

die neun Coefficienten, von denen der letzte einen bestimmten Wert hat. Demnach stellen die Formeln (1) sicher *nicht mehr als* ∞^8 *verschiedene projective Transformationen* vor, indem zwei projective Transformationen (1), deren Coefficienten a, b, c sich nur um einen Proportionalitätsfactor unterscheiden, mit einander identisch sind.

∞^8 projective Transformationen.

Man kann auch umgekehrt zeigen, dass zwei projective Transformationen (1) nur dann dieselben sind, wenn die Coefficienten der einen denen der andern proportional sind. Sollen nämlich die Gleichungenpaare

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{1}$$

und

$$x_1 = \frac{\bar{a}_1 x + \bar{b}_1 y + \bar{c}_1}{\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3}, \quad y_1 = \frac{\bar{a}_2 x + \bar{b}_2 y + \bar{c}_2}{\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3} \tag{2}$$

dieselbe Transformation darstellen, so muss identisch

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} = \frac{\bar{a}_1 x + \bar{b}_1 y + \bar{c}_1}{\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3}$$

und

$$\frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} = \frac{\bar{a}_2 x + \bar{b}_2 y + \bar{c}_2}{\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3}$$

sein. Es bestehen also dann identisch für alle x, y die Gleichungen:

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)(\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3) = (\bar{a}_1 x + \bar{b}_1 y + \bar{c}_1)(a_3 x + b_3 y + c_3),$$
$$(a_2 x + b_2 y + c_2)(\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3) = (\bar{a}_2 x + \bar{b}_2 y + \bar{c}_2)(a_3 x + b_3 y + c_3).$$

Nun kann sich aber $a_1 x + b_1 y + c_1$ nicht nur um einen constanten Factor von $a_3 x + b_3 y + c_3$ unterscheiden, da sonst x_1 nach (1) eine Constante wäre. Demnach muss zunächst nach der ersten Gleichung:

$$\bar{a}_1 x + \bar{b}_1 y + \bar{c}_1 = k(a_1 x + b_1 y + c_1),$$

also auch nach der ersten Gleichung:

$$\bar{a}_3 x + \bar{b}_3 y + \bar{c}_3 = k(a_3 x + b_3 y + c_3),$$

mithin nach der zweiten Gleichung:

$$\bar{a}_2 x + \bar{b}_2 y + \bar{c}_2 = k(a_2 x + b_2 y + c_2)$$

sein. Hierbei bedeutet k eine Constante. Es müssen also die $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ den a, b, c proportional sein.

Zwei projective Transformationen sind somit dann und nur dann dieselben, wenn die neun Coefficienten der einen den neun Coefficienten der anderen proportional sind. Gäbe es nun nur ∞^7 oder noch weniger projective Transformationen, so müsste es noch andere Werte der Coefficienten der zweiten Transformation geben, für welche diese mit der ersten übereinstimmte. Es folgt demnach:

Satz 1: *Es giebt gerade ∞^8 verschiedene projective Transformationen in der Ebene.*

8 wesentliche Constanten.

Unter den neun Coefficienten der allgemeinen projectiven Transformation (1) ist also einer und nur einer *überzählig*, oder: *es sind gerade acht jener Constanten wesentlich.*

Aufeinanderfolge zweier proj. Transform.

Wir wollen nunmehr *nach einander zwei projective Transformationen ausführen:* Zunächst setzen wir also:

$$(1) \qquad x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

und darauf noch:

$$(3) \qquad x_2 = \frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1}{\alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3}, \quad y_2 = \frac{\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2}{\alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3}.$$

Die erste Transformation führt die Punkte (x, y) in die Lagen (x_1, y_1),

die zweite die Punkte (x_1, y_1) in die Lagen (x_2, y_2) über. Diese Aufeinanderfolge beider Transformationen lässt sich natürlich durch *eine einzige* ersetzen, welche die Punkte (x, y) in die neuen Lagen (x_2, y_2) bringt. Um die Gestalt dieser Transformation der Coordinaten x, y in die Coordinaten x_2, y_2 zu finden, haben wir nur x_1, y_1 aus (1) und (3) zu eliminieren. Dies giebt:

$$(4)\begin{cases} x_2 = \dfrac{\alpha_1(a_1x+b_1y+c_1)+\beta_1(a_2x+b_2y+c_2)+\gamma_1(a_3x+b_3y+c_3)}{\alpha_3(a_1x+b_1y+c_1)+\beta_3(a_2x+b_2y+c_2)+\gamma_3(a_3x+b_3y+c_3)}, \\ y_2 = \dfrac{\alpha_2(a_1x+b_1y+c_1)+\beta_2(a_2x+b_2y+c_2)+\gamma_2(a_3x+b_3y+c_3)}{\alpha_3(a_1x+b_1y+c_1)+\beta_3(a_2x+b_2y+c_2)+\gamma_3(a_3x+b_3y+c_3)}. \end{cases}$$

x_2, y_2 drücken sich somit als linear gebrochene Functionen von x, y mit gleichen Nennern aus in der Form

$$(4') \qquad x_2 = \frac{\mathfrak{a}_1x+\mathfrak{b}_1y+\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_3x+\mathfrak{b}_3y+\mathfrak{c}_3}, \quad y_2 = \frac{\mathfrak{a}_2x+\mathfrak{b}_2y+\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{a}_3x+\mathfrak{b}_3y+\mathfrak{c}_3},$$

in der

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_i = \alpha_i a_1 + \beta_i a_2 + \gamma_i a_3, \\ \mathfrak{b}_i = \alpha_i b_1 + \beta_i b_2 + \gamma_i b_3, \\ \mathfrak{c}_i = \alpha_i c_1 + \beta_i c_2 + \gamma_i c_3 \\ \qquad (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

ist. Die Gleichungen (4) oder (4') haben wieder die Gestalt der Gleichungen einer projectiven Transformation. Also:

Satz 2: *Die Aufeinanderfolge zweier projectiver Transformationen ist einer einzigen projectiven Transformation äquivalent.*

Sind a_i, b_i, c_i die Coefficienten der ersten, α_i, β_i, γ_i die der zweiten Transformation, so sind die Coefficienten $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ der ihrer Aufeinanderfolge äquivalenten projectiven Transformation die bilinearen Functionen (5) der a_i, b_i, c_i und α_i, β_i, γ_i.

Wegen der in Satz 2 ausgesprochenen Eigenschaft der Schar aller ∞^8 projectiven Transformationen, nach der die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Schar stets einer einzigen Transformation eben dieser Schar äquivalent ist, heisst diese Schar nach jetzigem mathematischen Sprachgebrauch eine *Gruppe*, und zwar, da unendlich kleine Änderungen der Coefficienten a_i, b_i, c_i in (1) nur unendlich kleine Änderungen der Transformation selbst bewirken und man durch continuierliche Änderung der Coefficienten von einer dieser Transformationen zu jeder derselben gelangen kann, eine *continuierliche Gruppe.*

Continuierl. Gruppe von projectiven Transformationen.

Theorem 1: *Alle ∞^8 projectiven Transformationen der Ebene bilden eine continuierliche Gruppe. Die Transformationen dieser Gruppe ordnen sich paarweis als invers zusammen.*

Letzteres haben wir schon in § 3 des vorigen Kapitels bewiesen.

Symbolische Bezeichn. der Transf.

Bezeichnen wir mit S irgend eine Transformation der Gruppe, so werden wir mit S^{-1} die zu ihr inverse bezeichnen, die hiernach auch der Gruppe angehört. Mit ST werden wir künftig — wie es in der Substitutionstheorie zu geschehen pflegt — die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen S und T bezeichnen. Insbesondere werden wir, wenn S und T dieselbe Transformation bedeuten, statt SS das Symbol S^2 gebrauchen. So soll also S^n, wenn n eine ganze positive Zahl ist, die n-malige Aufeinanderfolge von S sein. Ebenso stellt S^{-n} die n-malige Aufeinanderfolge der zu S inversen Transformation S^{-1} dar. Hiernach hat, wenn $S, T, U \cdots$ Transformationen bedeuten, jeder Ausdruck von der Form $S^m T^n U^r \cdots$, in dem $m, n, r \cdots$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, einen ganz bestimmten begrifflichen Sinn. Insbesondere wird es hiernach zweckmässig sein, unter $S^0, T^0, U^0 \cdots$ die *identische* Transformation $x_1 = x$, $y_1 = y$ zu verstehen, die wir auch bloss mit 1 bezeichnen, sodass $SS^{-1} = S^0 = 1$ ist.

Wir bemerken im Anschluss an die Formeln (5) noch Folgendes: Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3 \end{vmatrix}$$

der Transformation (4) oder (4′), die der Aufeinanderfolge von (1) und (3) äquivalent ist, hat nach (5) den Wert

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Also gilt

Determinanten zweier Transformationen.

Satz 3: *Haben zwei projective Transformationen die Determinanten Δ_1 und Δ_2, so ist $\Delta_1 \Delta_2$ die Determinante der projectiven Transformation, die ihrer Aufeinanderfolge äquivalent ist.*

Proj. Transf., die ein Dreieck in ein anderes überführt.

Daraus, dass die projectiven Transformationen eine *Gruppe* bilden, können wir den Schluss ziehen, *dass es stets projective Transformationen giebt, welche die Seiten eines beliebig vorgelegten Dreiecks in die Seiten eines anderen beliebig gegebenen Dreiecks überführen.*

Sind nämlich

$$\begin{aligned} l_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ l_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \\ l_3 &\equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der drei ersten gegebenen Geraden und

$$L_1 \equiv A_1 X + B_1 Y + C_1 = 0,$$
$$L_2 \equiv A_2 X + B_2 Y + C_2 = 0,$$
$$L_3 \equiv A_3 X + B_3 Y + C_3 = 0$$

die Gleichungen der drei letzteren gegebenen Geraden, indem wir die laufenden Coordinaten der letzteren zur Unterscheidung mit X, Y bezeichnen, so bestimmen zunächst

$$(6) \qquad x_1 = \frac{l_1}{l_3}, \quad y_1 = \frac{l_2}{l_3}$$

nach § 3 des 1. Kapitels eine projective Transformation S der Punkte (x, y) in die Punkte (x_1, y_1), welche die drei ersten gegebenen Geraden in die Coordinatenaxen $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ und die unendlich ferne Gerade überführt. Ebenso liefern die Gleichungen

$$(7) \qquad x_1 = \frac{L_1}{L_3}, \quad y_1 = \frac{L_2}{L_3}$$

eine projective Transformation T der Punkte (X, Y) in die Punkte (x_1, y_1), welche die drei Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ in die Axen und die unendlich ferne Gerade verwandelt. Auflösung von (7) nach X, Y giebt, wie wir aus § 3 des 1. Kapitels wissen, die zur Transformation T inverse Transformation T^{-1} der Punkte (x_1, y_1) in die Punkte (X, Y), die ebenfalls projectiv ist. Dieselbe führt die Coordinatenaxen $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ und die unendlich ferne Gerade in die drei Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ über. Die Aufeinanderfolge ST^{-1} der beiden projectiven Transformationen S und T^{-1} ist, da alle projectiven Transformationen eine Gruppe bilden, einer einzigen projectiven Transformation äquivalent, welche direct die Punkte (x, y) in die Punkte (X, Y) überführt. Dieselbe wird analytisch durch Elimination von x_1, y_1 aus (6) und (7) erhalten, also zunächst in der Form:

$$(8) \qquad \frac{L_1}{L_3} = \frac{l_1}{l_3}, \quad \frac{L_2}{L_3} = \frac{l_2}{l_3}.$$

Natürlich hat man diese Gleichungen noch, um die gewöhnliche Form der projectiven Transformation zu erhalten, nach den neuen Variabeln X, Y aufzulösen. Dass diese Transformation ST^{-1} die drei ersten gegebenen Geraden in die drei letzten gegebenen Geraden überführt, ist nach Obigem klar: die Gerade $l_1 = 0$ wird durch S in die Gerade $x_1 = 0$ und diese durch T^{-1} in die Gerade $L_1 = 0$ verwandelt u. s. w. Auch erkennt man es direct aus (8). Denn ist $l_1 = 0$, d. h. liegt der ursprüngliche Punkt (x, y) auf der einen gegebenen Geraden, so giebt (8) auch $L_1 = 0$, d. h. der transformierte Punkt (X, Y) liegt auf der Geraden $L_1 = 0$, u. s. w.

Natürlich werde stillschweigend vorausgesetzt, dass die Geraden $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ ebenso wie die Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ ein wirkliches Dreiseit im Sinne der projectiven Geometrie bilden, d. h. dass jene drei Geraden nicht sämtlich einen Punkt gemein haben. Sonst nämlich wären S und T ausgeartete Transformationen.

Beispiel. Ein *Beispiel* erläutere obigen Gedankengang: Die drei Geraden

$$l_1 \equiv x = 0, \quad l_2 \equiv y = 0, \quad l_3 \equiv x + y + 1 = 0$$

bilden ein wirkliches Dreiseit, ebenso wie diese drei

$$L_1 \equiv X - 1 = 0, \quad L_2 \equiv Y + 1 = 0, \quad L_3 \equiv X = 0.$$

Wir verlangen eine projective Transformation der Punkte (x, y) in die Punkte (X, Y), welche die drei ersten Geraden in die drei letzten überführt. Wir setzen nach (8) an:

$$\frac{x}{x + y + 1} = \frac{X - 1}{X}, \quad \frac{y}{x + y + 1} = \frac{Y + 1}{X}$$

und erhalten durch Auflösung nach X, Y die gewünschte projective Transformation:

$$X = \frac{x + y + 1}{y + 1}, \quad Y = \frac{-1}{y + 1}.$$

Es ist nun nicht schwer, auch *die allgemeinste projective Transformation aufzustellen, welche die drei Geraden $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ in die drei Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ verwandelt.* Eine solche Transformation drückt nämlich X, Y als linear gebrochene Functionen von x, y mit gemeinsamem Nenner

$$n = \text{Const.}\ x + \text{Const.}\ y + \text{Const.}$$

aus. Nun soll $L_1 = 0$ eine Folge von $l_1 = 0$ vermöge der Transformation werden. Setzen wir also in L_1 die Werte von X, Y ein, so muss sich offenbar eine linear gebrochene Function von x, y ergeben, deren Nenner n ist und deren Zähler von l_1 nur um einen Zahlenfactor abweichen kann. Vermöge der Transformation ist demnach:

$$L_1 = \frac{\varrho_1 l_1}{n},$$

wo ϱ_1 eine Constante bedeutet. Ebenso ist

$$L_2 = \frac{\varrho_2 l_2}{n},$$

$$L_3 = \frac{\varrho_3 l_3}{n}.$$

Vermöge der Transformation ist also:

$$\frac{L_1}{L_3} = \frac{\varrho_1}{\varrho_3} \frac{l_1}{l_3}, \quad \frac{L_2}{L_3} = \frac{\varrho_2}{\varrho_3} \frac{l_2}{l_3}.$$

Demnach stellen die nach x, y wie nach X, Y auflösbaren Gleichungen

$$(9) \qquad \frac{L_1}{L_3} = \alpha \frac{l_1}{l_3}, \quad \frac{L_2}{L_3} = \beta \frac{l_2}{l_3},$$

in denen α, β Constanten bedeuten, die allgemeinste projective Transformation der gesuchten Art dar.

Satz 4: *Die allgemeinste projective Transformation, welche die drei ein wirkliches Dreieck bildenden Geraden:*

$$l_i \equiv a_i x + b_i y + c_i = 0$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

bezüglich in die drei ebenfalls ein wirkliches Dreieck bildenden Geraden

$$L_i \equiv A_i X + B_i Y + C_i = 0$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

überführt, ergiebt sich durch Auflösen der Gleichungen

$$\frac{L_1}{L_3} = \alpha \frac{l_1}{l_3}, \quad \frac{L_2}{L_3} = \beta \frac{l_2}{l_3}$$

nach X, Y. Hierbei bedeuten α, β irgend welche von Null verschiedene Constanten. Es giebt also ∞^2 derartige Transformationen.

In unserem obigen *Beispiel* sind also

Beispiele.

$$\frac{X-1}{X} = \alpha \frac{x}{x+y+1}, \quad \frac{Y+1}{X} = \beta \frac{y}{x+y+1}$$

oder

$$X = \frac{x+y+1}{(1-\alpha)x+y+1}, \quad Y = \frac{(\alpha-1)x+(\beta-1)y-1}{(1-\alpha)x+y+1}$$

die Gleichungen der allgemeinsten projectiven Transformation, welche die Geraden $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$ bez. in die Geraden $X - 1 = 0$, $Y + 1 = 0$, $X = 0$ verwandelt.

Zur Übung empfehlen wir dem Leser, die projectiven Transformationen aufzustellen, welche die Coordinatenaxen und die unendlich ferne Gerade unter einander vertauschen. Es sind, diejenigen eingeschlossen, welche die Coordinatenaxen und die unendlich ferne Gerade jede in sich überführen, diese sechs:

$$x_1 = \alpha x, \quad y_1 = \beta y; \qquad x_1 = \alpha y, \quad y_1 = \beta x;$$
$$x_1 = \alpha \frac{1}{y}, \quad y_1 = \beta \frac{x}{y}; \qquad x_1 = \alpha \frac{1}{x}, \quad y_1 = \beta \frac{y}{x};$$
$$x_1 = \alpha \frac{y}{x}, \quad y_1 = \beta \frac{1}{x}; \qquad x_1 = \alpha \frac{x}{y}, \quad y_1 = \beta \frac{1}{y}.$$

Wir heben, um ein neues Resultat abzuleiten, hervor, dass sich *jede* Gerade

$$ax + by + c = 0$$

mit Hülfe der drei von einander unabhängigen linearen Ausdrücke

$$l_i \equiv a_i x + b_i y + c_i$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

in der Form schreiben lässt:

$$(10) \qquad \mathfrak{a}_1 l_1 + \mathfrak{a}_2 l_2 + \mathfrak{a}_3 l_3 = 0,$$

wo $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ Constanten bedeuten. Denn zum identischen Bestehen der Gleichung

$$ax + by + c = \mathfrak{a}_1(a_1 x + b_1 y + c_1) + \mathfrak{a}_2(a_2 x + b_2 y + c_2) + \mathfrak{a}_3(a_3 x + b_3 y + c_3)$$

ist ja notwendig und hinreichend, dass

$$a = \mathfrak{a}_1 a_1 + \mathfrak{a}_2 a_2 + \mathfrak{a}_3 a_3,$$
$$b = \mathfrak{a}_1 b_1 + \mathfrak{a}_2 b_2 + \mathfrak{a}_3 b_3,$$
$$c = \mathfrak{a}_1 c_1 + \mathfrak{a}_2 c_2 + \mathfrak{a}_3 c_3$$

sei, und diese Gleichungen liefern, da die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \neq 0$ ist, gerade ein bestimmtes endliches Wertsystem $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$. Umgekehrt stellt auch jede Gleichung von der Form (10), wie auch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gewählt sein mögen, eine Gerade dar.

Diese Gerade (10) wird durch die allgemeinste projective Transformation (9), die $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ in $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ verwandelt, übergeführt in die Gerade

$$\mathfrak{a}_1 \alpha L_1 + \mathfrak{a}_2 \beta L_2 + \mathfrak{a}_3 L_3 = 0.$$

Aber jede Gerade der XY-Ebene lässt sich, da L_1, L_2, L_3 eine von Null verschiedene Determinante haben, in der Form schreiben:

$$(11) \qquad \mathfrak{A}_1 L_1 + \mathfrak{A}_2 L_2 + \mathfrak{A}_3 L_3 = 0,$$

in der $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ Constanten sein sollen. Wenn die Transformation (9) nun die allgemein gewählte Gerade (10) in die allgemein gewählte Gerade (11) überführen soll, so haben wir folglich die noch zur Verfügung stehenden Coefficienten α und β in (9) so zu wählen, dass

$$\frac{\mathfrak{a}_1 \alpha}{\mathfrak{A}_1} = \frac{\mathfrak{a}_2 \beta}{\mathfrak{A}_2} = \frac{\mathfrak{a}_3}{\mathfrak{A}_3}$$

wird, was immer und zwar auf nur eine einzige Weise möglich ist, sobald die Geraden (10) und (11) allgemeine Lage gegen die Dreiecke $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ resp. $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ einnehmen, d. h. sobald keine dieser Geraden durch eine Ecke der betreffenden Dreiecke geht, denn dann würden von den Coefficienten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ einige verschwinden.

Wir haben also erkannt:

Satz 5: *Es giebt stets eine und nur eine projective Transformation, die vier beliebige Geraden allgemeiner Lage, d. h. vier Geraden, von denen keine drei durch einen gemeinsamen Punkt gehen, in vier beliebige andere Geraden allgemeiner gegenseitiger Lage überführt. Insbesondere ist die identische Transformation* $x_1 = x$, $y_1 = y$ *die einzige projective Transformation, die vier Geraden allgemeiner gegenseitiger Lage in Ruhe lässt.*

Projective Transformation, die vier Gerade in vier andere überführt.

In unserem *Beispiel* können wir noch fordern, dass etwa die Gerade

Beispiel.

$$x + y - 1 = 0,$$

d. h. die Gerade

$$2l_1 + 2l_2 - l_3 = 0,$$

in die Gerade

$$Y = 0$$

oder

$$L_1 + L_2 - L_3 = 0$$

übergehe. Dies giebt die Bedingung

$$\frac{2\alpha}{1} = \frac{2\beta}{1} = \frac{-1}{-1}$$

oder

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2},$$

und die betreffende Transformation lautet:

$$X = \frac{x + y + 1}{-x + y + 1}, \quad Y = \frac{x + y - 1}{-x + y + 1}.$$

Fragen wir andererseits nach allen projectiven Transformationen, die vier *Punkte* allgemeiner gegenseitiger Lage, d. h. vier Punkte, von denen nicht drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen, in vier andere Punkte allgemeiner gegenseitiger Lage überführen.

Zunächst ist klar, dass eine solche Transformation die drei Geraden, die drei der ursprünglichen vier Punkte verbinden, bezüglich in die drei Geraden überführt, welche die entsprechenden drei Punkte verbinden. Umgekehrt ist auch klar, dass eine projective Transformation, die jene ersten drei Geraden in die neuen drei Geraden verwandelt, jene ersten drei Punkte in die neuen drei Punkte überführt. Hiernach handelt es sich also darum, alle projectiven Transformationen aufzustellen, die drei gegebene ein wirkliches Dreieck bildende Geraden $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ in drei andere gegebene ebenfalls ein wirkliches Dreieck bildende Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ und ausserdem einen gegebenen Punkt $(\bar{x}, \bar{y})$, der nicht auf einer der Geraden $l_i = 0$ liegt, in einen gegebenen Punkt $(\overline{X}, \overline{Y})$, der nicht

auf einer der Geraden $L_i = 0$ liegt, verwandelt. Die erstere Bedingung führt auf die ∞^2 Transformationen (9) oder:

$$\frac{A_1 X + B_1 Y + C_1}{A_3 X + B_3 Y + C_3} = \alpha \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3},$$

$$\frac{A_2 X + B_2 Y + C_2}{A_3 X + B_3 Y + C_3} = \beta \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Diese Gleichungen sollen nun bestehen, wenn x, y, X, Y gleich $\bar{x}, \bar{y}, \bar{X}, \bar{Y}$ gesetzt werden. Dadurch werden, weil kein Zähler oder Nenner bei den gemachten Voraussetzungen für diese Werte verschwindet, α und β in unzweideutiger Weise bestimmt.

So hat sich ergeben:

Projective Transformation, die vier Punkte in vier andere überführt.

Satz 6: *Es giebt stets eine und nur eine projective Transformation, die vier beliebige ein wirkliches Viereck bildende Punkte in vier beliebige andere ein wirkliches Viereck bildende Punkte überführt. Insbesondere ist die identische Transformation $x_1 = x$, $y_1 = y$ die einzige projective Transformation, die vier ein wirkliches Viereck bildende Punkte in Ruhe lässt.*

Als Zusatz können wir noch infolge der letzten Betrachtung dies aussprechen:

Projective Transformation, die ein Dreieck und einen Punkt in ebensolche überführt.

Satz 7: *Es giebt stets eine und nur eine projective Transformation, die drei ein wirkliches Dreieck bildende Geraden in sich überführt und überdies einen gegebenen Punkt allgemeiner Lage in einen anderen gegebenen Punkt allgemeiner Lage verwandelt.*

§ 2. Die infinitesimalen projectiven Transformationen.

Wir bemerkten schon, dass die Gruppe aller projectiven Transformationen der Ebene zu jeder Transformation

$$(1) \qquad x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

auch die *inverse* enthält. Führen wir beide nach einander aus, so ergiebt sich die *identische*, die Alles in Ruhe lässt. Da die Aufeinanderfolge jener beiden Transformationen infolge der Gruppeneigenschaft wieder eine Transformation aus der Schar aller projectiven Transformationen (1) ist, so folgt, dass es solche Werte der Constanten a_1, b_1, c_1 u. s. w. geben muss, für die sich die Gleichungen (1) auf $x_1 = x$, $y_1 = y$ reducieren. In der That, setzen wir in (1) statt x_1, y_1 die Veränderlichen x, y, und verlangen wir das identische Bestehen dieser Gleichungen, so ergiebt sich, da es auf einen Proportionalitätsfactor nicht ankommt, also das nicht-verschwindende $a_1 = 1$ gesetzt werden darf:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0;$$
$$a_2 = 0, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 0;$$
$$a_3 = 0, \quad b_3 = 0, \quad c_3 = 1.$$

Es giebt also ein und nur ein Wertsystem der Constanten, für das sich die projective Transformation (1) *auf die Identität reduciert.*

Infinitesimale projective Transformation.

Hieraus folgt, dass wir, um *alle unendlich kleinen* projectiven Transformationen zu erhalten, d. h. alle, welche die Lage eines jeden Punktes nur unendlich wenig ändern, den Constanten solche Werte zu geben haben, die von den soeben bestimmten nur unendlich wenig abweichen. Wir setzen also, unter δt eine infinitesimale Grösse verstanden:

$$a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t, \quad b_1 = \beta_1 \delta t, \quad c_1 = \gamma_1 \delta t,$$
$$a_2 = \alpha_2 \delta t, \quad b_2 = 1 + \beta_2 \delta t, \quad c_2 = \gamma_2 \delta t,$$
$$a_3 = \alpha_3 \delta t, \quad b_3 = \beta_3 \delta t, \quad c_3 = 1 + \gamma_3 \delta t,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \cdots$ beliebige Constanten bedeuten, und erhalten aus (1) als *allgemeinen* Ausdruck einer infinitesimalen projectiven Transformation:

$$x_1 = \frac{x + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t}{1 + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t}, \quad y_1 = \frac{y + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t}{1 + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{1 + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t} = 1 - (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^2 \delta t^2 - \cdots$$

und sonach kommt:

$$\begin{aligned} x_1 = x &- (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3) x \delta t + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^2 x \delta t^2 - \cdots \\ &+ (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t - (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t^2 + \cdots, \\ y_1 = y &- (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3) y \delta t + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^2 y \delta t^2 - \cdots \\ &+ (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t - (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Es sind die rechten Seiten, wie es sein muss, nur infinitesimal verschieden von x und y. Die unendlich kleinen Glieder sind Potenzreihen nach δt. Man erkennt sofort, dass die Glieder erster Ordnung in δt nur dann sämtlich verschwinden, wenn alle $\alpha, \beta, \gamma = 0$ gewählt werden. Dann aber verschwinden auch die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung, und die vorstehenden Gleichungen stellen nur die identische Transformation dar. Hieraus folgt, dass bei jeder infinitesimalen projectiven Transformation wenigstens eine der beiden Entwickelungen von x und y nach δt sicher ein nicht verschwindendes unendlich kleines Glied *erster* Ordnung enthält. Diesem gegenüber sind alsdann die Glieder höherer Ordnung zu vernachlässigen und es kommt:

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1 = x + (\gamma_1 + (\alpha_1 - \gamma_3)x + \beta_1 y - \alpha_3 x^2 - \beta_3 xy)\delta t, \\ y_1 = y + (\gamma_2 + \alpha_2 x + (\beta_2 - \gamma_3)y - \alpha_3 xy - \beta_3 y^2)\delta t \end{cases}$$

als allgemeiner Ausdruck einer infinitesimalen projectiven Transformation. Hierin können die α, β, γ irgend welche Constanten bedeuten, während δt eine infinitesimale Grösse sein soll. Wenn wir die Constanten nun anders bezeichnen, etwa setzen:

$$\gamma_1 = a, \quad \gamma_2 = b, \qquad \alpha_1 - \gamma_3 = c, \quad \beta_1 = d,$$
$$\alpha_2 = e, \quad \beta_2 - \gamma_3 = g, \quad -\alpha_3 = h, \qquad -\beta_3 = k,$$

so nehmen die Gleichungen die etwas übersichtlichere Form an:

$$(12')\qquad \begin{cases} x_1 = x + (a + cx + dy + hx^2 + kxy)\delta t, \\ y_1 = y + (b + ex + gy + hxy + ky^2)\delta t. \end{cases}$$

Bei einer infinitesimalen projectiven Transformation erfahren sonach die Coordinaten x und y unendlich kleine Incremente δx und δy, die, *wenn man nur die niedrigsten wirklich vorkommenden unendlich kleinen Grössen berücksichtigt, die allgemeine Form haben:*

$$(12'')\qquad \begin{cases} \delta x = x_1 - x = (a + cx + dy + hx^2 + kxy)\delta t, \\ \delta y = y_1 - y = (b + ex + gy + hxy + ky^2)\delta t. \end{cases}$$

Wären die unendlich kleinen Glieder niedrigster Ordnung gleich Null, so würden, wie oben bemerkt wurde, *alle* unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung ebenfalls verschwinden, und die Transformation wäre bloss die Identität. Vernachlässigt man die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung nicht, so stellen sich δx und δy als unendliche Reihen dar, *die nach ganzen Potenzen von δt fortschreiten.*

Eine beliebige Function f der Veränderlichen x, y erhält bei dieser infinitesimalen projectiven Transformation (12′) oder (12″) auch einen unendlich kleinen Zuwachs δf, nämlich, da

$$\delta f = f(x_1, y_1) - f(x, y) = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) =$$
$$= f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y$$

ist, diesen:

$$\delta f = \left\{(a + cx + dy + hx^2 + kxy)\frac{\partial f}{\partial x} + (b + ex + gy + hxy + ky^2)\frac{\partial f}{\partial y}\right\}\delta t.$$

Der Ausdruck

$$(13)\quad Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)\frac{\partial f}{\partial x} + (b + ex + gy + hxy + ky^2)\frac{\partial f}{\partial y},$$

der mit δt multipliciert dieses Increment darstellt, definiert nun unsere infinitesimale projective Transformation vollständig. Nehmen wir

nämlich hierin die beliebig zu wählende Function f gleich x an, so wird $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 1$ und $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, und es bleibt:

$$Ux \equiv a + cx + dy + hx^2 + kxy,$$

ein Ausdruck, der, mit δt multipliciert, den Zuwachs δx von x darstellt. Analog ist der mit δt multiplicierte Ausdruck

$$Uy \equiv b + ex + gy + hxy + ky^2$$

der Zuwachs der Veränderlichen y.

Wir werden daher künftig die infinitesimale projective Transformation nicht durch die Gleichungen (12') oder (12''), sondern durch den Ausdruck (13) definieren. Wir nennen diesen Ausdruck Uf *das Symbol der allgemeinen infinitesimalen projectiven Transformation* (12') oder (12'').

Symbol einer infinit. proj. Transf.

Beispiele.

Die Constanten $a, b \dots h, k$ in diesem Symbole sind willkürlich. Setzen wir z. B. $a = 1$ und alle anderen gleich Null, so kommt die besondere infinitesimale projective Transformation

$$Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial x},$$

d. h. diejenige, bei der die Incremente der Veränderlichen diese sind

$$\delta x = Ux \cdot \delta t \equiv \delta t, \quad \delta y = Uy \cdot \delta t \equiv 0.$$

Hier erfährt also x einen für alle Punkte (x, y) der Ebene gleichen Zuwachs δt, während y ungeändert bleibt; jeder Punkt (x, y) wird um dieselbe Strecke δt parallel der x-Axe verschoben. Es ist dies eine sogenannte infinitesimale Verschiebung oder *Translation*. Setzen wir andererseits alle Constanten gleich Null mit Ausnahme von c und g, die wir gleich 1 annehmen, so reduciert sich Uf auf:

$$Uf \equiv x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Hier wachsen die Coordinaten um

$$\delta x = Ux \cdot \delta t \equiv x\delta t, \quad \delta y = Uy \cdot \delta t \equiv y\delta t,$$

d. h. jeder Punkt (x, y) wird auf seinem Radiusvector um eine unendlich kleine diesem Radiusvector proportionale Strecke

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} = \delta t\sqrt{x^2 + y^2}$$

fortbewegt. Es ist dies eine sogenannte infinitesimale *Ähnlichkeitstransformation* vom Anfangspunkte aus. Setzt man ferner $d = 1$, $e = -1$ und die übrigen Constanten in Uf gleich Null, so resultiert:

$$Uf \equiv y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y},$$

wobei

$$\delta x \equiv Ux \cdot \delta t = y\delta t, \quad \delta y \equiv Uy \cdot \delta t = -x\delta t$$

ist. Diese Gleichungen stellen eine infinitesimale *Rotation um den Anfangspunkt* dar. U. s. w.

Zur grösseren Bequemlichkeit wollen wir künftig die partiellen Differentialquotienten der Function f, so lange diese willkürlich gelassen wird, mit p und q bezeichnen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv q.$$

Alsdann schreibt sich das Symbol Uf so:

$$(13') \qquad \begin{cases} Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)\, p \\ \qquad + (b + ex + gy + hxy + ky^2)\, q. \end{cases}$$

Dies Symbol setzt sich *linear mit constanten Coefficienten* $a, b \ldots h, k$ aus den acht einzelnen von willkürlichen Constanten freien Symbolen von speciellen infinitesimalen projectiven Transformationen zusammen:

$$p, \quad q; \quad xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq;$$
$$x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q,$$

die sich leicht dem Gedächtnis einprägen lassen, die beiden letzten insbesondere in der Form $x(xp + yq)$ und $y(xp + yq)$. Aus ihnen lässt sich die allgemeine infinitesimale projective Transformation Uf dadurch wieder zusammensetzen, dass man sie mit Constanten multipliciert und addiert. Jede infinitesimale Transformation Uf, die in dieser Weise mit *constanten* Coefficienten aus jenen acht zusammengesetzt werden kann, nennen wir *abhängig* von diesen. Insbesondere nennen wir z. B. die infinitesimale projective Transformation $axp + byq$ von xp und yq abhängig. Ebenso kann man sagen, dass die infinitesimale Rotation $yp - xq$ von yp und xq abhängt.

Nach dem Obigen würde es im ganzen ∞^8 infinitesimale projective Transformationen geben, da das allgemeine Symbol Uf gerade acht willkürliche Constanten enthält. Aber es ist naheliegend, zwei solche infinitesimale Transformationen, die sich nur dadurch unterscheiden, dass die Coefficienten der einen denen der anderen proportional sind, als identisch zu betrachten. Beide nämlich führen einen beliebigen Punkt der Ebene in *derselben* Richtung um unendlich kleine Strecken weiter, die zu einander in der ganzen Ebene in *demselben* Verhältnis stehen. Da die Wahl der infinitesimalen Grösse δt ganz beliebig ist, können wir diese Fortschreitungen direct dadurch gleich gross machen, dass wir das eine Mal ein gewisses Vielfaches von δt als neues δt benutzen.

Demnach werden wir sagen, dass es in (13) nur auf die Verhält-

nisse der acht Coefficienten $a, b \ldots h, k$ ankommt, d. h. *dass es im ganzen nur ∞^7 infinitesimale projective Transformationen giebt.*

∞^7 infinitesimale project. Transformation.

Wir wollen nunmehr annehmen, wir hätten die Coefficienten in Uf in irgend einer Weise bestimmt gewählt. Alsdann ordnet Uf den Punkten der Ebene ganz bestimmte Fortschreitungsstrecken in bestimmten Richtungen zu, indem x und y die Incremente erfahren

$$\delta x = (a + cx + dy + hx^2 + kxy)\delta t,$$
$$\delta y = (b + ex + gy + hxy + ky^2)\delta t.$$

Es liegt kein Hindernis vor, uns vorzustellen, dass diese unendlich kleine Lagenänderung in dem Zeitelement δt geschieht, indem wir der infinitesimalen Grösse δt eine anschauliche Bedeutung beilegen. Wenn wir die infinitesimale Transformation Uf ein zweites Mal im nächsten Zeitteilchen δt auf die gefundenen neuen Punkte, darauf ein drittes Mal auf die so erhaltenen Punkte u. s. w. ausüben, so gelangen die Punkte (x, y) schliesslich, etwa in der Zeit t, in neue Lagen (x_1, y_1), die von den ursprünglichen im allgemeinen endliche Entfernungen haben werden. Dann sind x_1, y_1 gewisse Functionen von t und den ursprünglichen Coordinaten x, y derart, dass sie sich für $t = 0$ auf x, y selbst reducieren, und dass sie zweitens, wenn t um dt zunimmt, um die Werte

$$dx_1 = (a + cx_1 + dy_1 + hx_1^2 + kx_1y_1)dt,$$
$$dy_1 = (b + ex_1 + gy_1 + hx_1y_1 + ky_1^2)dt$$

wachsen. Sie sind demnach die Functionen von t, die dem simultanen System genügen:

$$(14) \qquad \frac{dx_1}{a + cx_1 + dy_1 + hx_1^2 + kx_1y_1} = \frac{dy_1}{b + ex_1 + gy_1 + hx_1y_1 + ky_1^2} = dt,$$

dabei vorausgesetzt, dass sie sich für $t = 0$ auf x, y selbst reducieren.

Die durch Integration dieses simultanen Systems (14) erhaltenen neuen Lagen (x_1, y_1) der Punkte (x, y) sind also diejenigen, die sie nach unendlich oftmaliger Wiederholung der infinitesimalen Transformation Uf annehmen. Die Integralgleichungen:

$$(15) \qquad x_1 = \varphi(x, y, t), \quad y_1 = \psi(x, y, t),$$

die für $t = 0$ einfach $x_1 = x$, $y_1 = y$ ergeben, stellen demnach eine *endliche* Transformation der Punkte (x, y) in die Punkte (x_1, y_1) dar. Da sie eine willkürliche Grösse t enthalten, so haben sich factisch ∞^1 Transformationen (15) ergeben, unter denen insbesondere die identische $x_1 = x$, $y_1 = y$ enthalten ist. Wegen der Entstehungsart der Glei-

chungen (15) haben sie, nach Potenzen von t entwickelt, offenbar die Form:

$$x_1 = x + \xi(x,y)t + \cdots, \quad y_1 = y + \eta(x,y)t + \cdots,$$

wenn unter ξ und η die Grössen:

$$\xi \equiv a + cx + dy + hx^2 + kxy,$$
$$\eta \equiv b + ex + gy + hxy + ky^2$$

verstanden werden. Die Schar der ∞^1 Transformationen (15) enthält somit auch (für $t = \delta t$) die infinitesimale projective Transformation, von der wir ausgingen. Dies ist übrigens begrifflich klar. Bezeichnen wir nun mit T die infinitesimale Transformation Uf, so giebt ihre n-malige Wiederholung die Transformation T^n, ihre m-malige T^m. Dann ist die Aufeinanderfolge beider äquivalent der $(n + m)$-maligen Wiederholung von T:

$$T^n T^m = T^{n+m}.$$

Indem wir diese Überlegung auch auf unendlich oftmalige Wiederholung von T ausdehnen, durch die sich die ∞^1 Transformationen (15) ergeben, wird es einleuchtend, dass die Aufeinanderfolge zweier Transformationen T_a, T_b der Schar (15) einer einzigen Transformation T_c eben dieser Schar äquivalent ist: $T_a T_b = T_c$, dass also diese Schar die Gruppeneigenschaft besitzt. Natürlich ist dies kein strenger Nachweis der Gruppeneigenschaft. Wir verzichten hier jedoch auf eine bindende Beweisführung*).

Es mag also das Bemerkte genügen, um darzuthun, dass die endlichen Transformationen, die durch fortwährende Wiederholung der infinitesimalen projectiven Transformation Uf hervorgehen, eine sogenannte *Gruppe* bilden und zwar, da es ∞^1 Transformationen sind, eine *eingliedrige Gruppe, erzeugt von Uf.* Auch gehen wir nicht darauf ein, zu beweisen, *dass diese Gruppe zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse enthält.* Dagegen sollen einige Beispiele das Gesagte erläutern.

Eingliedrig. Gruppe, erzeugt von Uf.

Beispiele.

Liegt z. B. die infinitesimale projective Transformation

$$Uf \equiv p$$

vor, also die infinitesimale Translation

$$\delta x = \delta t, \quad \delta y = 0,$$

*) Eine strenge Begründung findet man in Kap. 2 des Werkes: Sophus Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, bearbeitet und herausgegeben von* G. Scheffers, Leipzig, Teubner 1891. Im Folgenden citieren wir dies Werk kurz als: „*Diffgln. m. inf. Trf.*“

so führt ihre unendlich oftmalige Wiederholung offenbar die Punkte (x, y) in die neuen Punkte

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y$$

über. Dabei ist die Verschiebungsstrecke a längs der x-Axe eine von x, y unabhängige Grösse. Hier lautet das simultane System (14):

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dy_1}{0} = dt$$

und giebt integriert mit den Anfangswerten x, y von x_1, y_1 für $t = 0$ diese Gleichungen:

$$x_1 = x + t, \quad y_1 = y,$$

also, bis auf andere Bezeichnung der Grösse a, die obigen. Offenbar stellen diese Gleichungen eine Gruppe von Transformationen dar, denn aus der Aufeinanderfolge von

$$x_1 = x + t, \quad y_1 = y$$

und

$$x_2 = x_1 + t_1, \quad y_2 = y_1$$

folgt

$$x_2 = x + (t + t_1), \quad y_2 = y,$$

also die Translation um die Strecke $(t + t_1)$ längs der x-Axe.

Die infinitesimale Ähnlichkeitstransformation

$$Uf \equiv xp + yq$$

oder

$$\delta x = x\delta t, \quad \delta y = y\delta t$$

giebt offenbar, unendlich oft ausgeführt, die endliche ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung vom Anfangspunkt aus:

$$x_1 = mx, \quad y_1 = my.$$

Integriert man hier das simultane System (14):

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{y_1} = dt$$

mit den Anfangswerten x, y von x_1, y_1 für $t = 0$, so erhält man

$$x_1 = xe^t, \quad y_1 = ye^t,$$

also in der That Gleichungen, die mit den obigen übereinstimmen, wenn nur die Grösse e^t durch m ersetzt wird. Sie stellen eine Gruppe dar, denn aus:

$$x_1 = xe^t, \quad y_1 = ye^t,$$
$$x_2 = x_1 e^{t_1}, \quad y_2 = y_1 e^{t_1}$$

folgt durch Elimination der Zwischenwerte x_1, y_1:

$$x_2 = xe^{t+t_1}, \quad y_2 = ye^{t+t_1},$$

und dies sind Gleichungen von eben jener Form.

Jede infinitesimale projective Transformation Uf erzeugt also eine gewisse Gruppe von ∞^1 endlichen Transformationen. Es liegt nun nahe, zu vermuten, dass diese endlichen Transformationen auch projectiv sein werden. Dies zu beweisen, würde unsere nächste Aufgabe sein. Wir finden es jedoch angebracht, vorerst einige Vorbetrachtungen anzustellen, die auch sonst ihr besonderes Interesse haben, um dann im übernächsten Paragraphen die angeregte Frage zu beantworten.

§ 3. Andere Definitionen der projectiven Transformationen.

In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, dass sich die projectiven Transformationen auch definieren lassen als die allgemeinsten Punkttransformationen, welche die Punkte einer Geraden stets wieder in die einer Geraden überführen. Hierfür geben wir nachher zwei Beweise: Der erste, umständlichere beruht auf synthetischen Überlegungen und führt daher am besten in die Sache ein. Der zweite, kürzere ist rein analytisch. Es bleibt dem Leser überlassen, welchen dieser Beweise er vorziehen will.

Zunächst eine Vorbemerkung:

Vorbemerkung.

Wenn durch einen Punkt O (Fig. 5) vier Strahlen s_1, s_2, s_3, s_4 gehen, die mit irgend einem bestimmten Strahl s_0 durch O Winkel bilden, deren Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sind, so ist es leicht, das Doppelverhältnis des Vierstrahls anzugeben. Denken wir uns nämlich eine Gerade g senkrecht zu s_0 im Abstande 1 von O gezogen, so schneidet sie s_1, s_2, s_3, s_4 in vier Punkten p_1, p_2, p_3, p_4, und nach Satz 1 des § 1, 1. Kap., ist

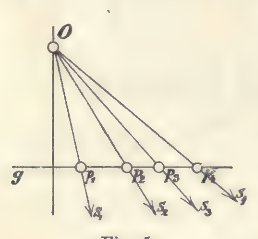


Fig. 5.

$$(s_1, s_2, s_3, s_4) = (p_1, p_2, p_3, p_4).$$

Der Punkt p_i hat offenbar die, vom Schnittpunkt der Geraden g mit s_0 an gerechnete Abscisse λ_i auf g, und also ist nach Satz 4 des § 1, 1. Kap.:

$$(s_1 s_2 s_3 s_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_3 - \lambda_4}.$$

Das Doppelverhältnis von vier Strahlen durch einen Punkt ist also gleich dem Doppelverhältnis der Tangenten ihrer Neigungswinkel zu irgend einer bestimmten Richtung.

Transformation der Richtungen bei belieb. Punkttransformation.

Nach dieser Vorbemerkung wollen wir nunmehr annehmen, es liegen die Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y) \tag{16}$$

irgend einer — nicht gerade notwendig projectiven — Transformation der Punkte (x, y) der Ebene in die Punkte (x_1, y_1) vor. Dabei sollen φ, ψ *differenzierbare* Functionen ihrer Argumente und die Gleichungen (16) auch umgekehrt nach x, y auflösbar sein. Der einem bestimmten, aber irgendwie gewählten Punkte (x, y) benachbarte Punkt $(x + dx, y + dy)$ wird durch diese Transformation in einen Punkt $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1)$ übergeführt, der dem Punkte (x_1, y_1) benachbart ist, in welchen die Stelle (x, y) vermöge (16) übergeht, und zwar kommt:

$$dx_1 = \varphi'(x)dx + \varphi'(y)dy, \quad dy_1 = \psi'(x)dx + \psi'(y)dy.$$

Diese Gleichungen lehren also, wie die in nächster Nähe der Stelle (x, y) gelegenen Punkte durch (16) transformiert werden. Jedes Incrementenpaar dx, dy bestimmt eine Richtung durch den Punkt (x, y) mit der Tangente $\frac{dy}{dx}$, die in eine Richtung durch den Punkt (x_1, y_1) mit der Tangente $\frac{dy_1}{dx_1}$ übergeht.

Da nun

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\psi'(x) + \psi'(y)\frac{dy}{dx}}{\varphi'(x) + \varphi'(y)\frac{dy}{dx}}$$

ist, so werden die Tangenten der Richtungen bei der Transformation (16) transformiert in der Art, wie die Punkte einer Geraden bei projectiver Transformation (vgl. § 2 des 1. Kap.), denn $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$, $\psi'(x)$, $\psi'(y)$ sind, da wir einen bestimmten Punkt (x, y) ins Auge gefasst haben, gewisse bestimmte Zahlen. Nach Satz 6, § 2 des 1. Kap., ist also auch das Doppelverhältnis aus vier *Tangenten* $\frac{dy}{dx}$ gleich dem aus den vier entsprechenden *Tangenten* $\frac{dy_1}{dx_1}$.

Invarianz des Doppelverhältnisses von vier Richtungen.

Nach der vorangeschickten Bemerkung ist folglich auch das Doppelverhältnis aus vier *Richtungen* durch (x, y) gleich dem aus den vier transformierten *Richtungen* durch (x_1, y_1).

Satz 8: *Bei jeder durch differenzierbare Gleichungen gegebenen Punkttransformation*

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y)$$

der Ebene werden je vier durch einen Punkt gehende Richtungen in solche Richtungen durch den transformierten Punkt übergeführt, die dasselbe Doppelverhältnis besitzen.

Möbius' Construction einer projectiven Transform.

Wir wollen von jetzt ab von der Punkttransformation (16) insbesondere voraussetzen, dass sie — wie die projectiven — alle Punkte einer Geraden stets wieder in die Punkte einer Geraden überführe.

Sie verwandele etwa die vier ein wirkliches Viereck bildenden Punkte p', p'', p''', p^{IV} in die vier Punkte p_1', p_1'', p_1''', p_1^{IV}, die dann auch ein wirkliches Viereck bilden (Fig. 6). Wir fragen, wohin ein beliebiger Punkt p durch (16) transformiert wird. Zu dem Zwecke ziehen wir die Geraden g, g'', g''', g^{IV}, welche p_1 mit p, p'', p''', p^{IV} verbinden. Nach Voraussetzung gehen sie wieder in Geraden über, also insbesondere g'', g''', g^{IV} in die drei Geraden g_1'', g_1''', g_1^{IV}, die p_1' mit p_1'', p_1''', p_1^{IV} verbinden. Nach unserem Satze muss g in eine Gerade g_1 durch p_1' übergehen, die mit g_1'', g_1''', g_1^{IV} dasselbe Doppelverhältnis bestimmt, wie g mit g', g'', g'''. Danach lässt sich g_1 eindeutig construieren. Der Punkt p_1 muss also auf einer ganz bestimmten Geraden g_1 gelegen sein, die von p_1' ausgeht. Ebenso kann man, indem man im Obigen p' mit p'' vertauscht, eine bestimmte Gerade durch p_1'' construieren, auf der p_1 ebenfalls liegen muss. p_1 ist somit gefunden. Also:

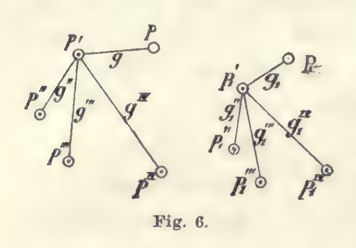


Fig. 6.

Satz 9: *Eine durch differenzierbare Gleichungen gegebene Punkttransformation, die Geraden in Geraden überführt, ist vollständig dadurch bestimmt, dass man angiebt, dass irgend vier gegebene Punkte p', p'', p''', p^{IV}, die ein wirkliches Viereck bilden, bei ihr in vier andere gegebene Punkte p_1', p_1'', p_1''', p_1^{IV} übergehen sollen, die natürlich auch ein wirkliches Viereck bilden müssen.*

Andererseits haben wir in § 1, Satz 6, erkannt, dass es auch gerade eine projective Transformation giebt, die p', p'', p''', p^{IV} in p_1', p_1'', p_1''', p_1^{IV} überführt. Da sie Geraden in Geraden verwandelt, muss sie folglich mit jener analytischen Transformation identisch sein.

Theorem 2: *Jede durch differenzierbare Gleichungen gegebene Punkttransformation der Ebene (x, y), die Geraden in Geraden überführt, ist eine projective Transformation:*

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Dieser Satz lässt die hervorragende Bedeutung der projectiven Transformationen ganz besonders ins Licht treten.

Die oben in Fig. 6 angedeutete Construction ist übrigens eine bekannte von Möbius herrührende Methode zur geometrischen Herstellung einer projectiven Transformation.

An diese Möbius'sche Construction knüpfen wir noch folgende Bemerkung an: In Fig. 6 können g, g'', g''', g^{IV} als *vier beliebige*

Geraden durch einen Punkt p' aufgefasst werden. Die Transformation führt sie in die Geraden g_1, g_1'', g_1''', g_1^{IV} durch p_1' über, die dasselbe Doppelverhältnis haben. Also folgern wir:

Satz 10: *Eine projective Transformation führt vier durch einen Punkt gehende Geraden stets in solche vier durch einen Punkt gehende Geraden über, die dasselbe Doppelverhältnis wie jene haben.*

Betrachten wir andererseits vier Punkte auf einer Geraden, so können wir sie mit irgend einem fünften Punkte durch vier Strahlen verbinden. Sie haben dann nach Satz 1, § 1 des 1. Kap., dasselbe Doppelverhältnis wie diese vier Strahlen, die bei der projectiven Transformation in vier Strahlen mit demselben Doppelverhältnis übergehen. Daher folgt noch:

Satz 11: *Eine projective Transformation führt vier auf einer Geraden liegende Punkte in solche vier auf einer Geraden liegende Punkte über, die dasselbe Doppelverhältnis wie jene haben.*

Wir können unserem obigen Theorem eine rein analytische Fassung geben: Die ∞^2 Geraden der Ebene sind die Integralcurven der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Projective Transformation definiert durch $y'' = 0$.

Eine Transformation

$$x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y) \tag{16}$$

führt daher dann und nur dann jede Gerade wieder in eine Gerade über, wenn bei ihr jene Differentialgleichung in den neuen Veränderlichen x_1, y_1 wieder die Form hat:

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0.$$

Es ist bei unserer Transformation:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{\psi'(x) + \psi'(y)\frac{dy}{dx}}{\varphi'(x) + \varphi'(y)\frac{dy}{dx}}$$

und hieraus lässt sich vermöge

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{d\,\frac{dy_1}{dx_1}}{dx} : \frac{dx_1}{dx}$$

auch $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ berechnen. Es kommt, wenn die partielle Differentation nach x bez. y durch angehängten Index x bez. y bezeichnet wird:

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(\varphi_x + \varphi_y y')^3}\Big\{(\psi_{xx} + 2\psi_{xy}y' + \psi_{yy}y'^2 + \psi_y y'')(\varphi_x + \varphi_y y') - \\ - (\varphi_{xx} + 2\varphi_{xy}y' + \varphi_{yy}y'^2 + \varphi_y y'')(\psi_x + \psi_y y')\Big\}.$$

Dies soll also gleich Null sein vermöge $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ oder $y'' = 0$ und zwar für alle Werte, die x, y und $\frac{dy}{dx}$ haben mögen. Diese Forderung führt auf die vier Bedingungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} \psi_{xx}\varphi_x - \varphi_{xx}\psi_x = 0, \\ \psi_{xx}\varphi_y - \varphi_{xx}\psi_y + 2\psi_{xy}\varphi_x - 2\varphi_{xy}\psi_x = 0, \\ \psi_{yy}\varphi_x - \varphi_{yy}\psi_x + 2\psi_{xy}\varphi_y - 2\varphi_{xy}\psi_y = 0, \\ \psi_{yy}\varphi_y - \varphi_{yy}\psi_y = 0. \end{cases}$$

Nach unserem obigen Ergebnis wissen wir, dass die Transformation (16) projectiv ist, sobald φ und ψ diese Bedingungen erfüllen. Durch wirkliche Integration dieser Differentialgleichungen wird man folglich dazu geführt werden, dass φ und ψ linear gebrochene Functionen von x und y mit demselben Nenner sein müssen. Indem wir diese Integration direct ausführen, ergiebt sich somit der oben angekündigte zweite analytische Nachweis.

In der That*), aus der ersten und letzten Gleichung (17) folgt:

$$\frac{\partial \lg \psi_x}{\partial x} = \frac{\partial \lg \varphi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \lg \psi_y}{\partial y} = \frac{\partial \lg \varphi_y}{\partial y}.$$

Es ist somit:

$$(18)\qquad \psi_x = Y\varphi_x, \quad \psi_y = X\varphi_y,$$

wo X und Y Functionen von x bez. y allein bedeuten. Setzen wir diese Werte in die beiden mittleren Gleichungen (17) ein, so kommt:

$$(19)\quad (X - Y)\varphi_{xx}\varphi_y - 2Y'\varphi_x^2 = 0, \quad (X - Y)\varphi_{yy}\varphi_x + 2X'\varphi_y^2 = 0.$$

Wenn wir ferner auf (18) die Integrabilitätsbedingung: $\psi_{xy} = \psi_{yx}$ anwenden, so ergiebt sich:

$$(20)\qquad (X - Y)\varphi_{xy} - Y'\varphi_x + X'\varphi_y = 0.$$

Wir differenzieren nun die erste Gleichung (19) partiell nach x. Dies liefert:

$$X'\varphi_{xx}\varphi_y + (X - Y)(\varphi_{xxx}\varphi_y + \varphi_{xx}\varphi_{xy}) - 4Y'\varphi_x\varphi_{xx} = 0$$

oder, wenn wir darin die aus (19) und (20) folgenden Werte der zweiten Differentialquotienten von φ einsetzen:

---

*) Die directe Integration der Gleichungen (17) ist vielleicht zuerst von Scheffers geleistet worden. Die linken Seiten von (17), dividiert durch $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x$, sind *Differentialinvarianten* der allgemeinen projectiven Gruppe. Lie benutzte sie im Jahre 1883 zur Integration aller auf die Form $y'' = 0$ reducibeln Gleichungen (Archiv for Math., „Classification u. Integration u. s. w." III.). Lie hat überhaupt früher als die Herren Liouville und Appell Differentialinvarianten *nicht* linearer Gleichungen eingeführt und hat überdies eine allgemeine Theorie derselben begründet. (Vgl. § 4 des 9. Kap.)

$$\varphi_{xxx} = \frac{6\,Y'^2}{(X - Y)^2}\;\frac{\varphi_x^{\;3}}{\varphi_y^{\;2}}.$$

Hieraus und aus der ersten Gleichung (19) schliessen wir:

$$\frac{\varphi_{xxx}}{\varphi_{xx}} = \frac{3}{2}\,\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}.$$

Integrieren wir diese Gleichung, so folgt: Es ist $\frac{\varphi_{xx}^{\;2}}{\varphi_x^{\;3}}$ eine Function von y allein, also auch $\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x^{\frac{3}{2}}}$, sodass das Integral hiervon, nämlich $\frac{1}{\varphi_x^{\frac{1}{2}}}$, linear in x ist und demnach φ_x die Form hat:

$$\varphi_x = \frac{1}{(\alpha x + \beta)^2},$$

in der α, β Functionen von y allein sind, sodass φ die Form

$$\frac{1}{\alpha x + \beta} + \gamma(y) \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{\varrho x + \sigma}{\alpha x + \beta}$$

hat, in der ϱ, σ, α, β Functionen von y allein sind. φ ist demnach linear gebrochen in x. Ganz analog folgt, dass φ auch in y linear gebrochen ist, sodass es diese Form hat:

$$\varphi = \frac{d_1 xy + a_1 x + b_1 y + c_1}{d_3 xy + a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Hier bedeuten die $a, \ldots d_3$ Constanten. Ähnliches ergiebt sich für ψ, und zwar hat ψ nach (18) denselben Nenner wie φ. Daher:

$$\psi = \frac{d_2 xy + a_2 x + b_2 y + c_2}{d_3 xy + a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Die erste und letzte Gleichung (17) werden durch diese Annahme erfüllt. Wenn wir dagegen diese Werte in die beiden mittleren Gleichungen (17) einführen, so folgt sofort, dass $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ sein muss. Mithin haben φ und ψ, wie zu beweisen war, die Form:

$$\varphi = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad \psi = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Dass vermöge einer projectiven Transformation $\frac{d^2 y_1}{dx_1^{\;2}} = 0$ eine Folge von $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ ist, können wir auch so aussprechen: Die Transformation führt die Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = 0$ in sich über, oder auch: Sie lässt $y'' = 0$ invariant. Schliesslich können wir auch sagen: $y'' = 0$ gestattet diese Transformation.

So hat sich ergeben:

Satz 12: *Man kann die projectiven Transformationen als die allgemeinsten Punkttransformationen der Ebene* (x, y) *definieren, welche die Differentialgleichung* $y'' = 0$ *invariant lassen.*

Inf. project. Transform. defin. durch $y''=0$.

Es liegt nun nahe zu vermuten, und wir wollen es direct nachweisen, dass auch die *infinitesimalen* projectiven Transformationen die allgemeinsten infinitesimalen Punkttransformationen der (xy)-Ebene sind, welche die Gleichung $y''=0$ invariant lassen.

Bei der infinitesimalen Transformation

$$Uf \equiv \xi p + \eta q$$

ist bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung:

$$\delta x = \xi \delta t, \quad \delta y = \eta \delta t.$$

Ferner ist das Increment von y':

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy \cdot dx - dy \cdot \delta dx}{dx^2}.$$

Die Zeichen δ und d können mit einander vertauscht werden, sodass kommt:

$$\delta y' = \frac{d\delta y \cdot dx - dy \cdot d\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - y' \frac{d\delta x}{dx} = \left(\frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}\right)\delta t,$$

also im vorliegenden Falle, da die Differentiationen nach x hierin totale sind:

$$\delta y' = [\eta_x + \eta_y y' - y'(\xi_x + \xi_y y')]\delta t$$
$$= [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2]\delta t.$$

Endlich ist analog:

$$\delta y'' = \frac{d\delta y'}{dx} - y'' \frac{d\delta x}{dx},$$

d. h. ausgerechnet:

$$\delta y'' = [\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 +$$
$$+ (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'']\delta t.$$

Unsere infinitesimale Punkttransformation lässt die Gleichung $y''=0$ dann und nur dann invariant, wenn $\delta y''=0$ ist, sobald $y''=0$ gesetzt wird, wenn also eine Gleichung von der Form

$$\delta y'' = \varrho y'' \delta t$$

besteht, d. h. wenn die vier folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0.$$

Die erste und letzte lehren, dass

$$\xi = Xy + X_0, \quad \eta = Yx + Y_0$$

ist, wobei X, X_0 nur x und Y, Y_0 nur y enthalten. Die beiden mittleren Bedingungen geben integriert:

$$\eta_y - 2\xi_x = X_1(x), \quad \xi_x - 2\eta_y = Y_1(y),$$

sodass

$$3\xi_x = -2X_1 - Y_1, \quad 3\eta_y = -2Y_1 - X_1$$

wird. Vergleichen wir dies mit den vorhergehenden Ausdrücken für ξ und η, so folgt:

$$3X'y + 3X_0' = -2X_1 - Y_1, \quad 3Y'x + 3Y_0' = -2Y_1 - X_1.$$

In der ersten Gleichung kommt y links linear und rechts nur in Y_1 vor. Also kann man

$$Y_1 = -3cy - 3d$$

und analog

$$X_1 = -3ax - 3b$$

setzen. a, b, c, d sind hierin Constanten. Nunmehr hat y in der ersten der beiden vorstehenden Bedingungen den Coefficienten $3X'$, rechts $3c$. Also ist $X' = c$ und analog $Y' = a$, sodass

$$X = cx + \gamma, \quad X = ay + \alpha$$

folgt. Jetzt liefern unsere Forderungen noch:

$$X_0' = 2ax + 2b + d, \quad Y_0' = 2cy + 2d + b,$$

also

$$X_0 = ax^2 + (2b + d)x + \beta, \quad Y_0 = cy^2 + (2d + b)y + \delta.$$

Wir haben demnach zu setzen:

$$\xi \equiv (cx + \gamma)y + ax^2 + (2b + d)x + \beta,$$
$$\eta \equiv (ay + \alpha)x + cy^2 + (2d + b)y + \delta.$$

Bezeichnen wir die Constanten anders, so finden wir Uf in der bekannten Form:

$$Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)p + (b + ex + gy + hxy + ky^2)q.$$

Hiermit ist denn wirklich dargethan, *dass die infinitesimalen projectiven Transformationen die allgemeinsten infinitesimalen Punkttransformationen der Ebene* (x, y) *sind, welche die Gleichung* $y'' = 0$ *invariant lassen.*

Dieses Ergebnis giebt uns Gelegenheit zu einigen Bemerkungen, die später verwertet werden sollen:

Sind zunächst

$$U_1 f \equiv \xi_1 p + \eta_1 q, \quad U_2 f \equiv \xi_2 p + \eta_2 q$$

irgend zwei infinitesimale Transformationen, so kann man den Ausdruck

$$U_1(U_2 f) - U_2(U_1 f)$$

bilden. Es ist ja:

$$U_1(U_2 f) \equiv \xi_1 \frac{\partial U_2 f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial U_2 f}{\partial y},$$
$$U_2(U_1 f) \equiv \xi_2 \frac{\partial U_1 f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial U_1 f}{\partial y}.$$

Rechnet man diese Werte aus und subtrahiert sie von einander, so fallen die zweiten Differentialquotienten von f sämtlich heraus, und es kommt:

$$(21)\quad \begin{cases} U_1(U_2f) - U_2(U_1f) \equiv \left(\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right)p + \\ \qquad + \left(\xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right)q \end{cases}$$

oder auch, da z. B.

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \equiv U_1 \xi_2$$

ist:

$$(21')\quad U_1(U_2f) - U_2(U_1f) \equiv (U_1\xi_2 - U_2\xi_1)p + (U_1\eta_2 - U_2\eta_1)q.$$

Dieser Ausdruck ist also wieder das Symbol einer gewissen infinitesimalen Transformation. Wir nennen ihn den mit U_1f und U_2f gebildeten *Klammerausdruck* und seine Bildung die *Klammeroperation.* Abkürzend bezeichnen wir diesen Ausdruck mit $(U_1\, U_2)$. Er wird in unseren späteren Betrachtungen eine äusserst wichtige Rolle spielen.

Klammerausdruck.

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass, wenn U_1f und U_2f infinitesimale projective Transformationen sind, auch $(U_1\, U_2)$ eine solche Transformation darstellt. In der That, es bestehen nach dem Vorangehenden Relationen von der Form:

$$U_1(y'') = \varrho_1 y'',$$
$$U_2(y'') = \varrho_2 y'',$$

also ist

$$U_1(U_2(y'')) = (U_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_2)y'',$$
$$U_2(U_1(y'')) = (U_2\varrho_1 + \varrho_1\varrho_2)y''$$

und infolgedessen:

$$U_1(U_2(y'')) - U_2(U_1(y'')) = (U_1\varrho_2 - U_2\varrho_1)y'';$$

diese Gleichung aber zeigt, dass die infinitesimale Transformation: $U_1(U_2(f)) - U_2(U_1(f))$ die Gleichung $y'' = 0$ invariant lässt, und dass sie somit projectiv ist.

Dies Ergebnis können wir aber auch direct ableiten. Sind nämlich U_1f und U_2f allgemeine infinitesimale projective Transformationen, ist also etwa (vgl. § 2):

$$U_1f \equiv \xi_1 p + \eta_1 q \equiv (a_1 + c_1x + d_1y + h_1x^2 + k_1xy)p +$$
$$+ (b_1 + e_1x + g_1y + h_1xy + k_1y^2)q,$$
$$U_2f \equiv \xi_2 p + \eta_2 q \equiv (a_2 + c_2x + d_2y + h_2x^2 + k_2xy)p +$$
$$+ (b_2 + e_2x + g_2y + h_2xy + k_2y^2)q,$$

so sind $U_1\xi_2$, $U_2\xi_1$, $U_1\eta_2$ und $U_2\eta_1$ sämtlich cubische Functionen von x und y. Doch ist $U_1\xi_2 - U_2\xi_1$ quadratisch und frei von y^2, während x^2 darin den Coefficienten

$$c_1h_2 - c_2h_1 + e_1k_2 - e_2k_1$$

und xy den Coefficienten

$$d_1 h_2 - d_2 h_1 + g_1 k_2 - g_2 k_1$$

besitzt. Eben diese Coefficienten haben xy und y^2 in $U_1\eta_2 - U_2\eta_1$, das quadratisch und von x^2 frei ist. Nach (21′) sind also in

$$(U_1 U_2) \equiv \xi p + \eta q$$

ξ und η quadratische Functionen von x, y, deren erste frei von y^2, deren zweite frei von x^2 ist, während x^2 in der ersten denselben Coefficienten wie xy in der zweiten und xy in der ersten denselben Coefficienten wie y^2 in der zweiten besitzt. Es hat also $(U_1 U_2)$ wieder die Form einer infinitesimalen *projectiven* Transformation.

Satz 13: *Der Klammerausdruck aus zwei infinitesimalen projectiven Transformationen ist wieder eine infinitesimale projective Transformation.*

Wir hätten dies auch so beweisen können: Jede infinitesimale projective Transformation setzt sich linear mit constanten Coefficienten zusammen aus:

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv q, \quad U_3 f \equiv xp, \quad U_4 f \equiv yp, \quad U_5 f \equiv xq,$$
$$U_6 f \equiv yq, \; U_7 f \equiv x^2 p + xyq, \quad U_8 f \equiv xyp + y^2 q.$$

Sind also Uf und Vf solche, so ist etwa:

$$Uf \equiv a_1 U_1 f + \cdots + a_8 U_8 f \equiv \Sigma a_i U_i f,$$
$$Vf \equiv b_1 U_1 f + \cdots + b_8 U_8 f \equiv \Sigma b_i U_i f.$$

Dann sieht man ohne Mühe nach (21′) ein, dass

$$(UV) \equiv \Sigma\Sigma a_i b_k (U_i U_k)$$

ist, dabei die Doppelsumme über i und k von 1 bis 8 erstreckt. Bilden wir aber die Klammerausdrücke $(U_i U_k)$ der obigen acht speciellen infinitesimalen Transformationen, so ersehen wir, dass sie alle wieder projectiv sind, mithin auch (UV).

So ist z. B.:

$$(U_4 U_7) \equiv xyp + y^2 q \equiv U_8 f,$$
$$(U_4 U_5) \equiv yq - xp \equiv U_6 f - U_3 f$$

u. s. w.

Da die $(U_i U_k)$ wieder infinitesimale projective Transformationen sind, so setzen sie sich linear mit constanten Coefficienten aus $U_1 f \cdots U_8 f$ zusammen, etwa in der Form:

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^8 {}_s\, c_{iks} U_s f$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots 8).$$

Dies Ergebnis werden wir späterhin erst seiner vollen Bedeutung nach würdigen können.

Noch bemerken wir, dass wir künftig sagen, *Vf sei aus U_1f, $U_2f \cdots U_rf$ linear abgeleitet*, wenn Vf sich so darstellen lässt:

$$Vf \equiv a_1 U_1 f + a_2 U_2 f + \cdots + a_r U_r f,$$

wo $a_1, a_2 \cdots a_r$ *Constanten* sind. Wir sagen ferner, Vf sei von $U_1 f \cdots U_r f$ *unabhängig*, wenn es keine solche Darstellung giebt (vgl. § 2). Demnach sind *$U_1 f \cdots U_r f$ von einander unabhängig* zu nennen, wenn keine derselben linear aus den übrigen ableitbar ist, wenn also keine Relation von der Form

$$a_1 U_1 f + a_2 U_2 f + \cdots + a_r U_r f = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden constanten Coefficienten $a_1, a_2 \cdots a_r$ existiert.

§ 4. Die eingliedrigen projectiven Gruppen.

Zum Schluss des § 2 warfen wir die Frage auf, *ob die eingliedrige Gruppe, die von einer infinitesimalen projectiven Transformation erzeugt wird, auch aus lauter projectiven Transformationen besteht.*

Eingliedrige Gruppe, bestehend aus projectiven Transformationen.

Wir werden diese Frage nunmehr in bejahendem Sinne auf zwei verschiedenen Wegen beantworten: Der eine, wenn auch weniger elementare, so doch auch keine Rechnungen erfordernde, geht von den Ergebnissen des vorigen Paragraphen aus und benutzt einen übrigens ziemlich selbstverständlichen Satz aus der Theorie der Differentialgleichungen. Der andere Weg ist derjenige, welcher sich naturgemäss darbietet und keinerlei fremde Sätze benutzt. Allerdings verlangt er recht ausführliche Rechnungen, die indess auf mehrere wichtige Formeln führen.

Erster Nachweis.

Um den *ersten* Weg einzuschlagen, benutzen wir den Satz, dass, wenn die Differentialgleichung $y'' = 0$ die infinitesimale Transformation Uf zulässt, sie auch jede durch continuierliche Wiederholung von Uf erzeugte endliche Transformation gestattet. Den analytischen Beweis dieses begrifflich selbstverständlichen Satzes findet man an anderer Stelle*).

Nun sei Uf eine infinitesimale *projective* Transformation. Sie lässt, wie wir wissen, $y'' = 0$ invariant. Demnach lässt auch jede endliche Transformation der von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe diese Differentialgleichung invariant. Nach Satz 12 des vorigen Paragraphen ist sie folglich projectiv, was zu beweisen war.

Zweiter Nachweis.

Um nun den *zweiten*, von fremden Hülfsmitteln freien Beweis zu geben, sei

*) „Diffgln. m. inf. Trf.", Kap. 16, § 3.

(22) $Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)p + (b + ex + gy + hxy + ky^2)q$

die vorgelegte infinitesimale projective Transformation. Die endlichen Gleichungen

(23) $$x_1 = \varphi(x, y, t), \quad y_1 = \psi(x, y, t)$$

der von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe gehen hervor durch Integration des simultanen Systems

(24) $$\frac{dx_1}{a + cx_1 + dy_1 + hx_1^2 + kx_1y_1} = \frac{dy_1}{b + ex_1 + gy_1 + hx_1y_1 + ky_1^2} = dt$$

mit den vorgeschriebenen Anfangswerten x, y von x_1, y_1 für $t = 0$. Es kommt also darauf an zu beweisen, dass diese Integralgleichungen die Form haben:

(25) $$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}.$$

Hierin sollen die a, b, c gewisse Functionen des Parameters t bedeuten.

Man bemerke nun zunächst, dass aus den Gleichungen (25) durch Differentiation nach t folgen würde:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{(a_3x + b_3y + c_3)\left(\frac{da_1}{dt}x + \frac{db_1}{dt}y + \frac{dc_1}{dt}\right) - (a_1x + b_1y + c_1)\left(\frac{da_3}{dt}x + \frac{db_3}{dt}y + \frac{dc_3}{dt}\right)}{(a_3x + b_3y + c_3)^2}.$$

Hieraus könnten wir noch vermöge (25) x und y eliminieren, da nach (25) bekanntlich (vgl. § 3 des 1. Kap.)

$$x = \frac{A_1x_1 + A_2y_1 + A_3}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3}, \quad y = \frac{B_1x_1 + B_2y_1 + B_3}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3}$$

ist, sobald die A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

hinsichtlich a_i, b_i, c_i bedeuten. Weil hiernach auch

$$a_1x + b_1y + c_1 = \frac{\Delta x_1}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3},$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = \frac{\Delta y_1}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3},$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = \frac{\Delta}{C_1x_1 + C_2y_1 + C_3}$$

ist, würde sich somit ergeben:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\Delta}\left\{(A_1x_1 + A_2y_1 + A_3)\frac{da_1}{dt} + (B_1x_1 + \cdots)\frac{db_1}{dt} + (C_1x_1 + \cdots)\frac{dc_1}{dt}\right\} -$$
$$- \frac{x_1}{\Delta}\left\{(A_1x_1 + A_2y_1 + A_3)\frac{da_3}{dt} + (B_1x_1 + \cdots)\frac{db_3}{dt} + (C_1x_1 + \cdots)\frac{dc_3}{dt}\right\}$$

oder

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{\varDelta}\Big\{A_3\frac{da_1}{dt} + B_3\frac{db_1}{dt} + C_3\frac{dc_1}{dt} +$$

$$+ \left(A_1\frac{da_1}{dt} + B_1\frac{db_1}{dt} + C_1\frac{dc_1}{dt} - A_3\frac{da_3}{dt} - B_3\frac{db_3}{dt} - C_3\frac{dc_3}{dt}\right)x_1 +$$

$$+ \left(A_2\frac{da_1}{dt} + B_2\frac{db_1}{dt} + C_2\frac{dc_1}{dt}\right)y_1 -$$

$$- \left(A_1\frac{da_3}{dt} + B_1\frac{db_3}{dt} + C_1\frac{dc_3}{dt}\right)x_1^2 -$$

$$- \left(A_2\frac{da_3}{dt} + B_2\frac{db_3}{dt} + C_2\frac{dc_3}{dt}\right)x_1 y_1\Big\}.$$

Ein ähnlicher Wert würde aus (25) für $\frac{dy_1}{dt}$, ausgedrückt in x_1, y_1, t, hervorgehen.

Die Gleichungen (25) sind nun dann und nur dann die Integralgleichungen des simultanen Systems (24), wenn letzteres dieselben Werte von $\frac{dx_1}{dt}$ und $\frac{dy_1}{dt}$, ausgedrückt in x_1, y_1 und t, liefert. Dies aber verlangt, wie der Vergleich lehrt, dass die a_i, b_i, c_i derartige Functionen von t seien, dass sie identisch die Gleichungen erfüllen:

$$(26)\left\{\begin{array}{ll}
1) & A_3\frac{da_1}{dt} + B_3\frac{db_1}{dt} + C_3\frac{dc_1}{dt} = \varDelta a,\\
2) & A_3\frac{da_2}{dt} + B_3\frac{db_2}{dt} + C_3\frac{dc_2}{dt} = \varDelta b,\\
3) & A_1\frac{da_1}{dt} + B_1\frac{db_1}{dt} + C_1\frac{dc_1}{dt} - A_3\frac{da_3}{dt} - B_3\frac{db_3}{dt} - C_3\frac{dc_3}{dt} = \varDelta c,\\
4) & A_2\frac{da_1}{dt} + B_2\frac{db_1}{dt} + C_2\frac{dc_1}{dt} = \varDelta d,\\
5) & A_1\frac{da_2}{dt} + B_1\frac{db_2}{dt} + C_1\frac{dc_2}{dt} = \varDelta e,\\
6) & A_2\frac{da_2}{dt} + B_2\frac{db_2}{dt} + C_2\frac{dc_2}{dt} - A_3\frac{da_3}{dt} - B_3\frac{db_3}{dt} - C_3\frac{dc_3}{dt} = \varDelta g,\\
7) & -A_1\frac{da_3}{dt} - B_1\frac{db_3}{dt} - C_1\frac{dc_3}{dt} = \varDelta h,\\
8) & -A_2\frac{da_3}{dt} - B_2\frac{db_3}{dt} - C_2\frac{dc_3}{dt} = \varDelta k.
\end{array}\right.$$

Hierin sind die a, b, c, d, e, g, h, k rechts die in Uf vorkommenden Zahlen, während die A_i, B_i, C_i gewisse quadratische Functionen der a_i, b_i, c_i sind, welch' letztere übrigens auch rechts in $\varDelta$ auftreten.

Diese Gleichungen (26) reichen zunächst gerade aus zur Bestimmung der $\frac{da_i}{dt}$, $\frac{db_i}{dt}$, $\frac{dc_i}{dt}$ durch die a_i, b_i, c_i selbst, allerdings bis auf eine willkürliche Function. Setzen wir nämlich

$$(26') \qquad -A_3\frac{da_3}{dt} - B_3\frac{db_3}{dt} - C_3\frac{dc_3}{dt} = \varDelta l,$$

so folgen aus der siebenten und achten sowie aus dieser Gleichung die Werte der Differentialquotienten von a_3, b_3, c_3, da die Determinante

$$\Sigma \pm A_1 B_2 C_3 = \Delta^2 \neq 0$$

ist. Die gefundenen Werte werden darauf in die dritte und sechste Gleichung eingetragen. Alsdann berechnen sich aus der ersten, dritten und vierten Gleichung die Differentialquotienten von a_1, b_1, c_1, aus der zweiten, fünften und sechsten die von a_2, b_2, c_2. So kommt:

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{da_1}{dt} = (c-l)a_1 + da_2 + aa_3, \\ \frac{db_1}{dt} = (c-l)b_1 + db_2 + ab_3, \\ \frac{dc_1}{dt} = (c-l)c_1 + dc_2 + ac_3; \\ \frac{da_2}{dt} = ea_1 + (g-l)a_2 + ba_3, \\ \frac{db_2}{dt} = eb_1 + (g-l)b_2 + bb_3, \\ \frac{dc_2}{dt} = ec_1 + (g-l)c_2 + bc_3; \\ \frac{da_3}{dt} = -(ha_1 + ka_2 + la_3), \\ \frac{db_3}{dt} = -(hb_1 + kb_2 + lb_3), \\ \frac{dc_3}{dt} = -(hc_1 + kc_2 + lc_3). \end{cases}$$

Es ist dies ein System von *linearen homogenen* Differentialgleichungen zur Bestimmung von a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 als Functionen von t. Nun giebt es bekanntlich stets Functionen a_i, b_i, c_i von t, welche diesen Gleichungen genügen. Es lassen sich also in der That stets die Coefficienten in (25) so als Functionen von t wählen, dass diese Gleichungen (25) die Integralgleichungen des simultanen Systems (24) werden. Da sich diese Integralgleichungen für $t = 0$ auf $x_1 = x$, $y_1 = y$ reducieren sollen, so werden wir das System (27) mit dem Anfangswerte 1 für a_1, b_2, c_3 und dem Anfangswerte 0 für die übrigen Functionen integriert denken. Dies ist immer gestattet, denn die Gleichungen (27) bestimmen die a_i, b_i, c_i als Potenzreihen nach t, geben aber nicht die Anfangswerte a_i^0, b_i^0, c_i^0. So kommt z. B.:

$$a_1 = a_1^0 + [(c-l)a_1^0 + da_2^0 + aa_3^0]t + \cdots.$$

Für $t = 0$ ist dies gleich a_1^0. Wir nehmen demnach die Constante a_1^0 gleich 1 an, um die obige Forderung zu erfüllen. Ähnlich verhält es sich mit den Reihenentwickelungen für die übrigen Grössen a_i, b_i, c_i.

Dass im System (27) die willkürliche Grösse l auftritt, darf nicht überraschen, denn wir wissen ja, dass von den neun Coefficienten der Transformation (25) einer überzählig ist (vgl. § 1), sodass also unmöglich alle neun eindeutig als Functionen von t bestimmt werden können. In der That bestimmen die Gleichungen (27) eindeutig gerade die Verhältnisse der a_i, b_i, c_i. Denn diese Gleichungen bestimmen zunächst die a_i, b_i, c_i als Functionen von at, $bt \,.\,.\, lt$. Nach (27) ist aber jedes

$$\frac{\partial a_i}{\partial lt} = - a_i, \quad \frac{\partial b_i}{\partial lt} = - b_i, \quad \frac{\partial c_i}{\partial lt} = - c_i,$$

d. h. jedes Verhältnis zweier der Grössen a_i, b_i, c_i ist frei von l, indem z. B.:

$$a_i : b_j = \frac{\partial a_i}{\partial lt} : \frac{\partial b_j}{\partial lt},$$

oder also:

$$\frac{\partial \frac{a_i}{b_j}}{\partial lt} = 0$$

wird. $\frac{a_i}{b_j}$ enthält demnach l nicht.

Ferner erkennen wir, dass die Gleichungen (27) die a_i, b_i, c_i als von einander unabhängige Functionen von at, $bt \,.\,.\, lt$ definieren, denn ihre Functionaldeterminante ist:

$$\Sigma \pm \frac{\partial a_1}{\partial ct} \frac{\partial b_1}{\partial dt} \frac{\partial c_1}{\partial at} \frac{\partial a_2}{\partial et} \frac{\partial b_2}{\partial gt} \frac{\partial c_2}{\partial bt} \frac{\partial a_3}{\partial ht} \frac{\partial b_3}{dkt} \frac{\partial c_3}{\partial lt} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ -a_1 & -b_1 & -c_1 & -a_2 & -b_2 & -c_2 & -a_3 & -b_3 & -c_3 \end{vmatrix} = -(\Sigma \pm a_1 b_2 c_3)^3.$$

Da sie nicht identisch verschwindet, besteht also auch keine Relation zwischen $a_1 \cdot\cdot c_3$. Die Verhältnisse der a_i, b_i, c_i sind, wie gesagt, frei von l und also von einander unabhängige Functionen von at, bt, ct, et, gt, ht und kt, denn sonst bestände ja eine Relation zwischen den a_i, b_i, c_i.

Durch den Nachweis der Möglichkeit der Bestimmung unserer neun Functionen a_i, b_i, c_i als Functionen von t in der Art, wie es in (26) verlangt wurde, ist nun dargethan, dass in der That die endlichen Gleichungen, die durch Integration des Systems (24) hervorgehen, die Form (25) einer projectiven Transformation haben, mit anderen Worten:

Theorem 3: *Die von einer infinitesimalen projectiven Transformation der Ebene erzeugte eingliedrige Gruppe besteht aus lauter projectiven Transformationen.*

Es erhebt sich nun noch eine Frage: Da es gerade ∞^7 infinitesimale projective Transformationen giebt, so existieren also auch gerade ∞^7 eingliedrige projective Gruppen von je ∞^1 endlichen projectiven Transformationen, sodass wir so im ganzen alle ∞^8 projectiven Transformationen erhalten würden, wenn nur noch feststünde, dass eine beliebige dieser von infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugten endlichen Transformationen im allgemeinen nur einer oder einer discreten Anzahl solcher eingliedriger Gruppen angehören kann. Wir entscheiden diese Frage sofort, indem wir umgekehrt erkennen, dass jede endliche projective Transformation (25) von einer infinitesimalen Transformation erzeugt wird. Denn die Gleichungen (27) bestimmen, wie wir sahen, die a_i, b_i, c_i als von einander unabhängige Functionen von $at, \cdots lt$ etwa in der Form:

$$\begin{aligned} a_i &= \varrho_i \varphi_i(at, \cdots kt), \\ b_i &= \varrho_i \psi_i(at, \cdots kt), \quad (i=1,2,3). \\ c_i &= \varrho_i \chi_i(at, \cdots kt). \end{aligned}$$

Hierin bezeichnet ϱ_i den lt enthaltenden Factor. Denken wir uns nun die endliche projective Transformation (25) gegeben, verstehen wir also unter den a_i, b_i, c_i Grössen, deren Verhältnisse uns als Zahlen gegeben sind, so werden die vorstehenden Gleichungen die $at \cdots kt$ als Functionen der Verhältnisse der a_i, b_i, c_i ergeben, denn diese Verhältnisse sind, wie wir sahen, von einander unabhängige Functionen von $at \cdots kt$, so lange die obige Determinante oder also Δ nicht Null ist. Wäre $\Delta = 0$, so würden bekanntlich die gegebenen Gleichungen (25) gar keine Transformation darstellen.

Wir sagen daher:

Satz 14: *Jede endliche projective Transformation gehört mindestens einer eingliedrigen projectiven Gruppe an.*

Jede proj. Transf. von inf. project. Trf. erzeugt.

Fassen wir alles zusammen, so können wir uns so ausdrücken:

Theorem 4: *Die ∞^7 infinitesimalen projectiven Transformationen der Ebene erzeugen die achtgliedrige Gruppe* ***aller***

endlichen projectiven Transformationen der Ebene. Diese Gruppe zerfällt dementsprechend in ∞^7 eingliedrige Untergruppen, und jede endliche projective Transformation gehört einer oder einer discreten Anzahl derselben an.

Bemerkungen für die pract. Ausrechn.

Bei der practischen Anwendung der Gleichungen (27) zur Integration des simultanen Systems (24) beachte man, dass dieselben in drei einzelne Systeme von je drei Gleichungen zerfallen und zwar so, dass diese drei Systeme bis auf die verschiedene Bezeichnung der Unbekannten sämtlich die Form haben:

$$(28)\qquad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = (c-l)u_1 + du_2 + au_3, \\ \frac{du_2}{dt} = eu_1 + (g-l)u_2 + bu_3, \\ \frac{du_3}{dt} = -hu_1 - ku_2 - lu_3. \end{cases}$$

Man wird also, wenn die infinitesimale Transformation Uf gegeben ist, zunächst (28) integrieren und dadurch u_1, u_2, u_3 als Functionen von t und drei Constanten bestimmen. Wählt man dann diese Constanten so, dass sich u_1, u_2, u_3 für $t=0$ auf 1, 0, 0 reducieren, so sind die gefundenen Functionen gleich a_1, a_2, a_3. Entsprechend ergeben sich die Functionen b_1, b_2, b_3 bez. c_1, c_2, c_3 bei den Anfangswerten 0, 1, 0 bez. 0, 0, 1. Dabei darf man der willkürlichen Grösse l irgend einen bestimmten Functionen- oder Zahlenwert geben, für den die Determinante der rechten Seite von (28) weder für allgemeines t noch für $t=0$ verschwindet oder unendlich gross wird.

Beispiel.

Beispiel: Wir fragen nach den von

$$(22')\qquad Uf \equiv (x^2+xy)p + (xy+y^2)q$$

erzeugten endlichen Transformationen. Vergleichen wir dies Uf mit (22), so sehen wir, dass jetzt $h=k=1$ ist, während alle anderen Coefficienten $a \cdots g$ gleich Null sind. Das System (28) lautet hier also:

$$(28')\quad \frac{du_1}{dt} = -lu_1, \quad \frac{du_2}{dt} = -lu_2, \quad \frac{du_3}{dt} = -u_1 - u_2 - lu_3.$$

Wir setzen $l=-1$ und erhalten durch Integration

$$u_1 = \alpha e^t, \quad u_2 = \beta e^t,$$

also

$$\frac{du_3}{dt} = -(\alpha+\beta)e^t + u_3,$$

d. h.

$$u_3 = e^t(\gamma - (\alpha+\beta)t).$$

$t=0$ liefert die Anfangswerte α, β, γ von u_1, u_2, u_3. Setzen wir sie gleich 1, 0, 0, bez. 0, 1, 0 bez. 0, 0, 1, so finden wir:

$$a_1 = e^t, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -te^t,$$
$$b_1 = 0, \quad b_2 = e^t, \quad b_3 = -te^t,$$
$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = e^t,$$

sodass (25) ergiebt:

(25′)
$$x_1 = \frac{x}{1 - t(x+y)}, \quad y_1 = \frac{y}{1 - t(x+y)}.$$

Kapitel 3.

Die eingliedrigen projectiven Gruppen und ihre Bahncurven.

Nachdem wir zunächst werden gezeigt haben, dass jede projective Transformation der Ebene, mithin auch jede infinitesimale projective Transformation und ebenfalls ihre eingliedrige Gruppe wenigstens einen Punkt und eine durch denselben gehende Gerade invariant lässt, benutzen wir eine möglichst bequeme Verlegung des Coordinatensystems zu den invarianten Gebilden und erreichen dadurch die Zurückführung aller infinitesimaler projectiver Transformationen auf *fünf typische Formen*. Alsdann sollen die *Bahncurven* der eingliedrigen projectiven Gruppen untersucht werden.

§ 1. Invarianz eines Punktes und einer durch ihn gehenden Geraden.

Vorgelegt sei eine projective Transformation:

(1)
$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Wir fragen uns, ob es einen Punkt (x, y) giebt, der bei ihr invariant bleibt, dessen Coordinaten also die Gleichungen erfüllen:

$$x = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn der Nenner mit ϱ bezeichnet wird, durch die drei Gleichungen ersetzen:

$$\varrho x = a_1 x + b_1 y + c_1,$$
$$\varrho y = a_2 x + b_2 y + c_2,$$
$$\varrho = a_3 x + b_3 y + c_3$$

oder

(2)
$$\begin{cases} (a_1 - \varrho)x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + (b_2 - \varrho)y + c_2 = 0, \\ a_3 x + b_3 y + (c_3 - \varrho) = 0, \end{cases}$$

deren Determinante lautet:

$$(3) \qquad \Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \varrho & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \varrho & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \varrho \end{vmatrix}.$$

Zum Bestehen der Gleichungen (2), die ja als drei in x, y, 1 lineare Gleichungen aufgefasst werden können, ist notwendig, dass $\Delta(\varrho) = 0$ sei. Demnach ist ϱ als Wurzel der cubischen Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ auszuwählen. Sicher besitzt diese Gleichung mindestens eine endliche Wurzel ϱ, da ϱ^3 in ihr einen nicht verschwindenden Coefficienten hat. Indem wir alsdann diese Wurzel ϱ in (2) eintragen, reducieren sich letztere Gleichungen bekanntlich auf höchstens zwei, da eine derselben eine blosse Folge der beiden anderen wird, etwa auf diese beiden Gleichungen:

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0,$$
$$\lambda' x + \mu' y + \nu' = 0.$$

Invarianter Punkt im Endlichen.

Ist die Determinante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ nicht Null, so stellen sie zwei sich schneidende Geraden dar. Ihr Schnittpunkt ist ein *invarianter Punkt*.

Ist dagegen diese zweireihige Determinante gleich Null, so haben nunmehr die linken Seiten von (2) die Formen:

$$(a_1 - \varrho)x + b_1 y + c_1 = \alpha(\lambda x + \mu y) + c_1,$$
$$a_2 x + (b_2 - \varrho) y + c_2 = \beta(\lambda x + \mu y) + c_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + (c_3 - \varrho) = \gamma(\lambda x + \mu y) + c_3 - \varrho,$$

sodass

$$a_1 = \varrho + \alpha\lambda, \quad b_1 = \alpha\mu,$$
$$a_2 = \beta\lambda, \quad b_2 = \varrho + \beta\mu,$$
$$a_3 = \gamma\lambda, \quad b_3 = \gamma\mu$$

wird und die vorgelegte projective Transformation (1) also lautet:

$$(1') \qquad x_1 = \frac{(\varrho + \alpha\lambda)x + \alpha\mu y + c_1}{\gamma\lambda x + \gamma\mu y + c_3}, \quad y_1 = \frac{\beta\lambda x + (\varrho + \beta\mu) y + c_2}{\gamma\lambda x + \gamma\mu y + c_3}.$$

Wenn nun zunächst λ und μ nicht beide Null sind, so stellt

$$\lambda x + \mu y = \text{Const.}$$

eine Schar von parallelen Geraden dar. Wir behaupten, dass die Transformation (1') jede Gerade dieser Schar wieder in eine solche überführt. In der That wird ja:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \frac{(\varrho + \alpha\lambda + \beta\mu)(\lambda x + \mu y) + \lambda c_1 + \mu c_2}{\gamma(\lambda x + \mu y) + c_3},$$

d. h. wenn

$$\lambda x + \mu y = \text{Const.}$$

ist, so ist auch

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \text{Const.},$$

was zu beweisen war. In diesem Falle also geht jede Gerade dieses Parallelenbüschels wieder in eine Gerade desselben über. Nun kann man ein Parallelenbüschel auffassen als das Büschel aller Strahlen, die durch einen über jede Grenze fernen Punkt hindurchgehen. Wenn die Geraden durch diesen Punkt unter einander vertauscht werden, so muss natürlich der Punkt selber invariant sein. Im vorliegenden Falle lässt daher die projective Transformation *ein Parallelenbüschel, d. h. einen unendlich fernen Punkt invariant.*

Unendlich ferner invarianter Punkt.

Sei jetzt sowohl λ als μ gleich Null, so lautet die projective Transformation (1′) so:

$$x_1 = \frac{\varrho x + c_1}{c_3}, \quad y_1 = \frac{\varrho x + c_2}{c_3},$$

d. h. sie hat die Form:

$$x_1 = mx + n, \quad y_1 = py + q.$$

Hier ist die Parallelenschar $x =$ Const. invariant, ebenso die Parallelenschar $y =$ Const. Wir erhalten demnach im vorliegenden Falle sofort sogar zwei *unendlich ferne invariante Punkte.*

Wir haben also gefunden:

Satz 1: *Jede projective Transformation der Ebene lässt mindestens einen Punkt in Ruhe.*

Wir wollen nun beweisen, dass auch durch einen invarianten Punkt stets eine invariante Gerade hindurchgeht. Dabei werden wir von der leicht zu verificierenden Thatsache Gebrauch machen, dass eine Gleichung von der Form

Invariante Gerade durch den inv. Punkt.

$$u = \frac{mu + n}{pu + q},$$

sobald sie nicht durch ein endliches u befriedigt werden kann, dadurch, dass man $\frac{1}{u} = v$ als Unbekannte einführt, auf eine Form gebracht wird:

$$v = \frac{p + qv}{m + nv},$$

in der sie durch $v = 0$ erfüllt wird.

Betrachten wir zunächst eine projective Transformation, die einen im Endlichen gelegenen Punkt (x_0, y_0) invariant lässt und den allgemein angenommenen Punkt (x, y) in den Punkt (x_1, y_1) überführt. Bekanntlich sind dann x_1, y_1 linear gebrochene Functionen von x, y mit gleichen Nennern. Dasselbe gilt auch von den um die Constante x_0 resp. y_0 verminderten Veränderlichen x_1, y_1. Da sich diese Differenzen für $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ auf Null reducieren, so muss dasselbe für diese gebrochenen linearen Functionen gelten, sobald darin $x = x_0$, $y = y_0$ gesetzt wird. Demnach bestehen Gleichungen von der Form:

$$x_1 - x_0 = \frac{\alpha_1 (x - x_0) + \beta_1 (y - y_0)}{\alpha_3 (x - x_0) + \beta_3 (y - y_0) + \gamma_3}, \quad y_1 - y_0 = \frac{\alpha_2 (x - x_0) + \beta_2 (y - y_0)}{\alpha_3 (x - x_0) + \beta_3 (y - y_0) + \gamma_3}.$$

Hiernach ist:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 \frac{y - y_0}{x - x_0}}{\alpha_1 + \beta_1 \frac{y - y_0}{x - x_0}}.$$

Setzen wir hierin x und y statt x_1 und y_1, so haben wir eine Gleichung von der oben bemerkten Form vor uns. Daraus schliessen wir: Es giebt entweder einen endlichen Wert $\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$, der bei der Transformation ungeändert bleibt, oder aber es bleibt $\frac{x - x_0}{y - y_0} = 0$ ungeändert. Im ersteren Falle geht die Gerade

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k,$$

im letzteren die Gerade

$$x - x_0 = 0$$

in sich über, d. h. es existiert jedenfalls eine durch den invarianten Punkt (x_0, y_0) gehende invariante Gerade.

Nunmehr wenden wir uns zu einer projectiven Transformation, die einen unendlich fernen Punkt invariant lässt, d. h. also die Strahlen eines Parallelenbüschels

$$\lambda x + \mu y = \text{Const.}$$

unter einander vertauscht. Es ist $\lambda x_1 + \mu y_1$ eine linear gebrochene Function von x, y und zwar eine solche, die sich für $\lambda x + \mu y = \text{Const.}$ ebenfalls auf eine Constante reducieren muss. Es ist mithin $\lambda x_1 + \mu y_1$ eine linear gebrochene Function von $\lambda x + \mu y$:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \frac{m(\lambda x + \mu y) + n}{p(\lambda x + \mu y) + q}.$$

Im allgemeinen existiert nun für die Gleichung

$$\lambda x + \mu y = \frac{m(\lambda x + \mu y) + n}{p(\lambda x + \mu y) + q}$$

ein endlicher Wert k von $\lambda x + \mu y$, der sie befriedigt. Alsdann ist

$$\lambda x + \mu y = k$$

eine Gerade, die durch die Transformation in sich übergeführt wird.

Ein solcher Wert existiert nur dann nicht, wenn $p = 0$ und $q = m$, also

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda x + \mu y + r$$

ist. x_1 und y_1 können dann offenbar nicht linear gebrochene Functionen von x und y mit *variabeln* Nennern sein, sie haben vielmehr die einfache Form:

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Hiernach ist, wenn *irgend eine* lineare Function $lx + my$ von x, y gleich Const. gesetzt wird, auch eine gewisse lineare Function $l'x_1 + m'y_1$ von x_1 und y_1 gleich Const., d. h. bei der vorliegenden Transformation wird *jede* Parallelenschar

$$lx + my = \text{Const.}$$

wieder in eine Parallelenschar

$$l'x_1 + m'y_1 = \text{Const.}$$

übergeführt. Da eine Parallelenschar aufgefasst werden kann als die Schar aller Geraden durch einen unendlich fernen Punkt, so können wir auch sagen: Es wird jeder unendlich ferne Punkt wieder in einen unendlich fernen Punkt übergeführt, d. h. der Ort aller unendlich ferner Punkte, die sogenannte *unendlich ferne Gerade* bleibt invariant. Es ist dies aber eine Gerade durch den unendlich fernen invarianten Punkt, den das ursprüngliche Parallelenbüschel $\lambda x + \mu y = \text{Const.}$ bestimmt.

Satz 2: *Bleibt bei einer projectiven Transformation der Ebene ein Punkt invariant, so giebt es auch eine durch diesen Punkt gehende invariante Gerade.*

Angenommen, eine projective Transformation lasse eine Gerade g invariant. Nach Satz 2 lässt sie einen Punkt P und eine durch ihn gehende Gerade g' in Ruhe. g' schneidet g sicher in einem Punkte P', der dann auch invariant ist, oder sie geht g parallel. Letzterenfalls können wir sagen, dass der unendlich ferne Punkt von g in Ruhe bleibt, denn wenn

$$ax + by + c = 0, \quad ax + by + c' = 0$$

die Gleichungen von g und g' sind, so ist bei der Transformation

$$ax_1 + by_1 + c = (ax + by + c) \cdot \frac{1}{N},$$

$$ax_1 + by_1 + c' = (ax + by + c') \cdot \frac{1}{N},$$

unter N einen linearen Ausdruck in x, y verstanden. Subtraction lehrt, dass N eine Function von $ax + by$ ist und also auch $ax_1 + by_1$ eine Function von $ax + by$ allein sein muss. Die Parallelenschar $ax_1 + by_1 = \text{Const.}$, welche den unendlich fernen Punkt von g definiert, wird daher in sich transformiert. Auf g existiert demnach sicher ein invarianter Punkt. Also:

Satz 3: *Bleibt bei einer projectiven Transformation der Ebene eine Gerade invariant, so giebt es auch einen auf dieser Geraden liegenden invarianten Punkt.*

Insbesondere ergiebt sich aus Satz 1 und 2:

Satz 4: *Jede projective Transformation der Ebene lässt mindestens einen Punkt und eine durch ihn gehende Gerade invariant.*

Es liegt nun nahe, zu vermuten, und der Leser kann es leicht direct beweisen, dass Satz 4 auch für *infinitesimale* projective Transformationen besteht. Es ist andrerseits so zu sagen begrifflich klar, dass, wenn eine infinitesimale Transformation Uf irgend ein Gebilde in sich transformiert, dasselbe auch von jeder endlichen Transformation der durch Wiederholung von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe gilt*).

Demnach ergiebt sich:

Invariantes Punkt- und Geradengebilde.

Theorem 5: *Jede eingliedrige projective Gruppe der Ebene lässt mindestens einen Punkt und eine durch ihn gehende Gerade invariant; durch jeden invarianten Punkt geht eine invariante Gerade und auf jeder invarianten Geraden liegt ein invarianter Punkt.*

Bei der soeben gegebenen Begründung mag allerdings die Invarianz unendlich ferner Punkte Bedenken erregen. Aber wir verfahren für diesen Fall einfach so: Lässt die infinitesimale projective Transformation $Uf \equiv \xi p + \eta q$ den unendlich fernen Punkt des Parallelenbüschels

$$\lambda x + \mu y = \text{Const.}$$

in Ruhe, so ist $\lambda \xi + \mu \eta$ eine Function von $\lambda x + \mu y$ allein:

$$\lambda \xi + \mu \eta \equiv \Omega(\lambda x + \mu y).$$

Die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Uf ergeben sich nun bekanntlich durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1)} = dt.$$

Es kommt hiernach:

$$d(\lambda x_1 + \mu y_1) = \big(\lambda \xi(x_1, y_1) + \mu \eta(x_1, y_1)\big) dt$$

oder:

$$d(\lambda x_1 + \mu y_1) = \Omega(\lambda x_1 + \mu y_1) dt,$$

d. h. $\lambda x_1 + \mu y_1$ wird eine Function von t und dem Anfangswerte $\lambda x + \mu y$ und ist daher in der That auch gleich Constans, sobald $\lambda x + \mu y = \text{Const.}$ gesetzt wird.

§ 2. Gleichberechtigte eingliedrige projective Gruppen.

Um mit Hülfe des Theorems 5 zu einer Classification der infinitesimalen projectiven Transformationen oder ihrer eingliedrigen Gruppen zu gelangen, müssen wir zunächst eine neue Betrachtung einführen:

*) Ein strenger Nachweis findet sich in den „Diffgln. m. inf. Trf.“, Kap. 4.

Denken wir uns, S_a, $S_b \cdots$ seien die projectiven Transformationen einer eingliedrigen Gruppe, es sei also jede Aufeinanderfolge S_a, S_b wieder eine Transformation $S_{(ab)}$ dieser Gruppe. Es seien:

$$x_1 = \varphi(x, y, a), \quad y_1 = \psi(x, y, a) \tag{4}$$

die Gleichungen von S_a. Nun möge T irgend eine projective Transformation sein, bei der wir die ursprünglichen Veränderlichen mit x, y, die neuen mit x', y' bezeichnen wollen:

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \mu(x, y). \tag{5}$$

Ausführung einer Transformation auf eine andere.

Wir sagen nun, *wir führen die Transformation T auf S_a aus,* wenn wir in den Gleichungen (4) von S_a auf beiden Seiten vermöge T neue Veränderliche einführen, wenn wir also gleichzeitig die Gleichungen (5) und:

$$x_1' = \lambda(x_1, y_1), \quad y_1' = \mu(x_1, y_1) \tag{6}$$

ansetzen und mit Hülfe derselben x, y und x_1, y_1 aus (4) eliminieren. Dadurch entsteht eine gewisse neue Transformation $\bar{S}$ von x', y' in x_1', y_1'. Sind:

$$x = \bar{\lambda}(x', y'), \quad y = \bar{\mu}(x', y') \tag{7}$$

die Auflösungen von (4) nach x', y', so erhält man die Gleichungen der neuen Transformation, indem man nacheinander ansetzt:

$$\left\{\begin{array}{ll} x = \bar{\lambda}(x', y'), & y = \bar{\mu}(x', y'); \\ x_1 = \varphi(x, y, a), & y_1 = \psi(x, y, a); \\ x_1' = \lambda(x_1, y_1), & y_1' = \mu(x_1, y_1). \end{array}\right. \tag{8}$$

Hierin stellen die beiden ersten Gleichungen die zu T inverse Transformation T^{-1} dar, die beiden folgenden S_a und die beiden letzten T, jedesmal ausgeführt auf das vorher erhaltene Veränderlichenpaar. Die neue Transformation $\bar{S}$ ist daher der Aufeinanderfolge $T^{-1}S_aT$ äquivalent:

$$\bar{S} = T^{-1}S_aT.$$

(Vgl. Fig. 7.)

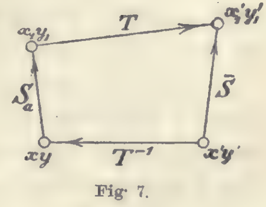
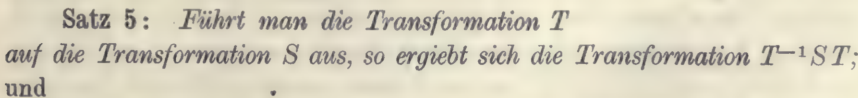


Fig. 7.

Nun ist T wie S eine projective Transformation, desgleichen die inverse T^{-1}, also auch $T^{-1}ST$. Also haben wir:



Satz 5: *Führt man die Transformation T auf die Transformation S aus, so ergiebt sich die Transformation $T^{-1}ST$;* und

Satz 6: *Eine projective Transformation S geht durch Einführung neuer Variabeln vermöge einer projectiven Transformation T über in die projective Transformation $T^{-1}ST$.*

Ausführung einer Transformation auf eine eingliedrige Gruppe.

So gehen S_a, $S_b \cdots$ durch Ausführung von T über in

$$T^{-1}S_aT, \quad T^{-1}S_bT, \cdots,$$

und diese bilden wie die S_a, $S_b \cdot\cdot$ eine eingliedrige Gruppe, denn es ist die Aufeinanderfolge

$$(T^{-1}S_aT)(T^{-1}S_bT) = T^{-1}S_aTT^{-1}S_bT$$

oder, da TT^{-1} die identische Transformation ist, gleich

$$T^{-1}S_aS_bT = T^{-1}S_{(ab)}T,$$

also wieder von der Form $T^{-1}ST$. Ist S_0 die identische Transformation der eingliedrigen Gruppe S_a, $S_b \cdots$, so ist

$$T^{-1}S_0T = T^{-1}T = S_0.$$

Wenn nun S die infinitesimale Transformation der eingliedrigen Gruppe S_a, $S_b \cdot\cdot$ ist, so ist $T^{-1}ST$ auch nur unendlich wenig von S_0 verschieden, d. h. die infinitesimale Transformation der neuen eingliedrigen Gruppe.

Satz 7: *Durch Ausführung einer projectiven Transformation auf eine eingliedrige projective Gruppe geht diese wieder in eine eingliedrige projective Gruppe und ihre infinitesimale Transformation gerade in die infinitesimale Transformation derselben über.*

Gleichberechtigte eingl. Untergruppen.

Alle eingliedrigen projectiven Gruppen, die aus einer solchen durch Ausführung projectiver Transformationen abgeleitet werden können, nennen wir mit der ursprünglichen *(innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe) gleichberechtigt.* Dementsprechend heissen zwei infinitesimale projective Transformationen gleichberechtigt (innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe), wenn die eine durch projective Transformation in die andere übergeführt werden kann.

Unmittelbar klar ist der

Satz 8: *Sind zwei eingliedrige projective Gruppen oder infinitesimale projective Transformationen mit einer dritten gleichberechtigt, so sind sie auch mit einander gleichberechtigt.*

Hiernach zerfallen alle ∞^7 eingliedrigen projectiven Gruppen in gewisse Scharen, deren jede lauter unter einander gleichberechtigte enthält; kennt man eine Gruppe aus einer der Scharen, so erhält man alle Gruppen derselben Schar, indem man auf jene eine alle ∞^8 projectiven Transformationen der Ebene ausführt. Wir werden daher im nächsten Paragraphen aus jeder dieser Scharen nur eine besonders einfache eingliedrige Gruppe zu bestimmen suchen. Haben wir dies gethan, so haben wir damit typische Formen für die eingliedrigen projectiven Gruppen gefunden. Die Bedeutung dieser typischen Formen tritt noch mehr durch folgende Bemerkung hervor:

Die Ausführung einer projectiven Transformation T auf eine andere solche, S, kann so aufgefasst werden, als ob der Transformation S ein neues recht- oder schiefwinkliges Coordinatensystem untergelegt wird, nämlich dasjenige, in welches das ursprüngliche durch Ausführung von T übergeht, wie die Gleichungen (8) deutlich zeigen. Diese Auffassung zeigt, dass der geometrische Charakter von S und $T^{-1}ST$, so lange rein projective Beziehungen in Frage kommen, genau der gleiche ist, dass also, wenn S ein gewisses Gebilde F aus Punkten und Geraden invariant lässt, auch $T^{-1}ST$ ein hierzu projectives Gebilde $\overline{F}$ in Ruhe lässt, nämlich dasjenige, welches aus F durch Ausführung von T hervorgeht. In der That, wenn

Invariante Gebilde gleichberechtigter Gruppen.

$$(F)S = (F)$$

und

$$(F)T = (\overline{F})$$

ist, so folgt:

$$(\overline{F})T^{-1}ST = (F)ST = (F)T = (\overline{F}).$$

Satz 9: *Lässt eine eingliedrige projective Gruppe ein gewisses Gebilde F invariant, so lässt die durch Ausführung der projectiven Transformation T hervorgehende Gruppe dasjenige Gebilde invariant, das durch Ausführung von T auf F entsteht.*

Hierdurch rechtfertigt sich auch der Name „gleichberechtigte Gruppe“.

Beispiel. Auf die infinitesimale projective Transformation

Beispiel.

$$Uf \equiv p$$

führen wir die endliche projective Transformation

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x}$$

aus. Uf hat die Gleichungen:

$$x_1 = x + \delta t, \quad y_1 = y.$$

Setzen wir also

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{y}{x};$$

$$x_1' = \frac{1}{x_1}, \quad y_1' = \frac{y_1}{x_1},$$

so kommt:

$$x_1' = \frac{1}{x+\delta t} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\delta t}{x}\right) = x'(1 - x'\delta t) = x' - x'^2\delta t,$$

$$y_1' = \frac{y}{x+\delta t} = \frac{y}{x}\left(1 - \frac{\delta t}{x}\right) = y'(1 - x'\delta t) = y' - x'y'\delta t,$$

sodass

$$\delta x' = -x'^2 \delta t, \quad \delta y' = -x'y'\delta t$$

ist, also das neue Uf die Form hat

$$-x'^2 p' - x'y'q',$$

geschrieben in den Veränderlichen x', y'. Kürzer findet man diese mit p gleichberechtigte infinitesimale Transformation durch directe Einführung der neuen Variabeln x', y' in Uf. Es kommt:

$$Uf = Ux' \cdot p' + Uy' \cdot q' = -\frac{1}{x^2} Ux \cdot p' + \left(-\frac{y}{x^2} Ux + \frac{1}{x} Uy\right) q'$$

$$= -\frac{1}{x^2} p' - \frac{y}{x^2} q' = -x'^2 p' - x'y'q'.$$

Ausführung einer Transformation auf eine inf. Transformation.

Wie in diesem Beispiel, so kann man auch allgemein, wenn es sich darum handelt, die aus Uf durch Einführung neuer Variabeln vermöge T:

$$(5) \qquad x' = \lambda(x, y), \quad y' = \mu(x, y)$$

entstehende infinitesimale Transformation zu finden, die neuen Variabeln in

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

einführen, also setzen:

$$Uf = \xi \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} \right) + \eta \left(\frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} \right)$$

oder offenbar:

$$Uf = Ux' \cdot \frac{\partial f}{\partial x'} + Uy' \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}.$$

Hierin müssen natürlich Ux' und Uy' vermöge (5) durch x', y' anstatt x, y ausgedrückt werden*).

§ 3. Classification der eingliedrigen projectiven Gruppen der Ebene.

Wir treten jetzt der schon angekündigten Aufgabe näher, aus jeder Schar von unter einander gleichberechtigten eingliedrigen projectiven Gruppen eine möglichst einfache zu bestimmen. Dazu verwerten wir zunächst das Theorem 5 des § 1 sowie den Satz 9 des § 2. Indem wir eine passende projective Transformation auf die infinitesimale Transformation Uf unserer eingliedrigen Gruppe ausüben, können wir hiernach immer erreichen, dass Uf gerade die unendlichferne Gerade in Ruhe lässt. Alsdann nimmt Uf eine solche Form an, in der sie jede Parallelenschar

Inf. project. Transform., welche die ∞ ferne Gerade inv. lässt.

$$lx + my = \text{Const.}$$

*) Wegen ausführlicherer Begründung verweisen wir auf die „Diffgln. m. inf. Trf.", Kap. 3, § 2.

wieder in einer Parallelenschar verwandelt. Eine Parallelenschar kann nun auch durch die Differentialgleichung

$$y' = \text{Const.}$$

definiert werden, die ja ∞^1 Parallelen darstellt. Bei

$$Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)p + (b + ex + gy + hxy + ky^2)q$$

müsste mithin das Increment, das y' erfährt, gleich Const. sein, sobald $y' = \text{Const.}$ wäre, d. h. es müsste von y' allein abhängen. Dies Increment lässt sich nach § 3 des 2. Kap. leicht berechnen. Es kommt:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = e + hy + y'(g + hx + 2ky - c - 2hx - ky) - y'^2(d + kx).$$

Dasselbe soll nur von y' abhängen, sodass also:

$$h = 0, \quad k = 0$$

oder Uf frei von den in x, y quadratischen Gliedern sein muss.

Satz 10: *Die allgemeinste infinitesimale projective Transformation der Ebene, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführt, setzt sich linear mit beliebigen constanten Coefficienten aus*

$$p, \; q, \; xp, \; yp, \; xq, \; yq$$

zusammen.

Wir schalten hier eine Bemerkung ein: Die allgemeine endliche projective Transformation

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

verwandelt y' in

$$y_1' \equiv \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{(a_2 + b_2 y')(a_3 x + b_3 y + c_3) - (a_3 + b_3 y')(a_2 x + b_2 y + c_2)}{(a_1 + b_1 y')(a_3 x + b_3 y + c_3) - (a_3 + b_3 y')(a_1 x + b_1 y + c_1)} =$$

$$= \frac{(a_3 b_2 - a_2 b_3)(xy' - y) + (c_3 b_2 - c_2 b_3) y' + (c_3 a_2 - c_2 a_3)}{(a_3 b_1 - a_1 b_3)(xy' - y) + (c_3 b_1 - c_1 b_3) y' + (c_3 a_1 - c_1 a_3)}.$$

Endl. proj. Transform., welche die ∞ ferne Gerade inv. lässt.

Sie lässt nur dann die unendlich ferne Gerade in Ruhe, wenn sie jede Differentialgleichung $y' = \text{Const.}$ einer Parallelenschar wieder in eine solche $y_1' = \text{Const.}$ verwandelt, d. h. wenn y_1' nur von y' abhängt. Es müssen also in dem obigen Ausdruck entweder im Zähler und Nenner die Coefficienten von $xy' - y$ verschwinden oder, wenn dies nicht der Fall ist, die drei Determinanten im Zähler denen im Nenner proportional sein. Letzteres ist ausgeschlossen, da sonst die Determinante Δ unserer projectiven Transformation verschwinden würde. Also folgt:

$$a_3 b_2 - a_2 b_3 = 0, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0.$$

Sicher ist dann $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, da sonst Δ doch verschwände. Folglich ist $a_3 = b_3 = 0$, d. h. unsere Transformation hat constanten Nenner, ist also von der Form (indem $c_3 = 1$ gesetzt werden kann):

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2.$$

x_1 und y_1 sind hier lineare ganze Functionen von x, y. Man nennt eine solche Transformation eine *lineare*.

Lineare Transform.

Satz 11: *Die allgemeinsten projectiven Transformationen der Ebene, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen, sind die linearen Transformationen.*

Nach dieser gelegentlichen Einschaltung kehren wir zu unserem Problem zurück.

Reduction einer infinit. linearen Transform.

Wir haben oben Uf auf die einfachere Form gebracht:

$$Uf \equiv (a + cx + dy)p + (b + ex + gy)q.$$

Nach Theorem 5 des § 1 existiert nun auf der invarianten unendlich fernen Geraden ein invarianter Punkt, etwa der des Parallelenbüschels

$$\lambda x + \mu y = \text{Const.}$$

Indem wir eine *lineare* Transformation

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = \varrho x + \sigma y$$

auf Uf ausüben, geht Uf in eine infinitesimale Transformation über, die nach Satz 9 des § 2 wieder die unendlich ferne Gerade und ausserdem den unendlich fernen Punkt der y-Axe in Ruhe lässt. δx hängt also jetzt nur noch von x ab, sodass Uf die Form hat:

$$Uf \equiv (a + cx)p + (b + ex + gy)q.$$

Ist $c \neq 0$, so führen wir durch die *lineare* Transformation

$$x' = a + cx, \quad y' = y$$

neue Veränderliche ein, wodurch Uf übergeht in

$$x'p' + (b' + e'x' + g'y')q'.$$

Wenn $c \neq 0$ ist, so können wir also insbesondere hierdurch $c = 1$ und $a = 0$ machen.

Ist dagegen $c = 0$, so ist entweder $a \neq 0$ und lässt sich dann gleich 1 setzen, oder es ist gleich Null.

Sonach erhalten wir drei Möglichkeiten für Uf:

$$\text{I.} \quad xp + (b + ex + gy)q,$$

$$\text{II.} \quad p + (b + ex + gy)q,$$

$$\text{III.} \quad (b + ex + gy)q.$$

Wir betrachten sie nacheinander:

I. Ist hier $g \neq 0$ und $\neq 1$, so führen wir durch die *lineare* Transformation

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{ex}{g-1} + \frac{b}{g}$$

neue Veränderliche ein. Dadurch geht Uf über in:

$$x'p' + gy'q'.$$

Wir erhalten also die typische Form:

$$\boxed{xp + \alpha yq}\,.$$

Wenn dagegen $g = 1$ ist, so führen wir Uf durch die *lineare* Transformation

$$x' = x, \quad y' = y + b$$

über in

$$x'p' + (ex' + y')q'.$$

Ist hier $e \neq 0$, so führen wir neue Veränderliche durch die *lineare* Transformation:

$$x'' = x', \quad y'' = \frac{y'}{e}$$

ein und erhalten

$$x''p'' + (x'' + y'')q''.$$

Somit haben wir den Typus gewonnen:

$$\boxed{xp + (x + y)q}\,.$$

Wenn aber $e = 0$ ist, so bleibt nur der Typus

$$\boxed{xp + yq}\,.$$

Wenn nun endlich $g = 0$ ist, so hat Uf zunächst die Form:

$$xp + (b + ex)q.$$

Ist dann $b \neq 0$, so benutzen wir die *lineare* Transformation

$$x' = \frac{y - ex}{b}, \quad y' = x$$

und erhalten

$$p' + y'q',$$

also ergiebt sich dann der Typus

$$\boxed{p + yq}\,.$$

Wenn aber $b = 0$ ist, liefert die *lineare* Transformation

$$x' = ex - y, \quad y' = x$$

den Typus

$$\boxed{yq}\,.$$

II. Wenn zunächst $g \neq 0$ ist, so erhalten wir durch Benutzung der *linearen* Transformation

$$x' = gx, \quad y' = y + \frac{e}{g}x + \frac{e}{g^2} + \frac{b}{g}$$

die Form

$$gp' + gy'q',$$

also den Typus

$$p + yq,$$

der sich schon unter I ergab. Wenn dagegen $g = 0$ und $e \neq 0$ ist, so setzen wir

$$x' = \sqrt{e} \cdot x + \frac{b}{\sqrt{e}}, \quad y' = y$$

und erhalten durch diese *lineare* Transformation

$$\sqrt{e} \cdot p' + \sqrt{e} \cdot x'q',$$

also den Typus

$$\boxed{p + xq}.$$

Ist endlich $g = e = 0$, so bleibt $p + bq$ und diese Translation lässt sich durch *lineare* Transformation auf die Form

$$\boxed{q}$$

bringen.

III. Wenn $g \neq 0$ ist, so liefert die Ausführung der *linearen* Transformation

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{e}{g} x + \frac{b}{g}$$

die Form yq, die sich schon oben ergab. Ist $g = 0$ und $e \neq 0$, so setzen wir

$$x' = b + ex, \quad y' = y$$

und erhalten den Typus

$$\boxed{xq}.$$

Wenn schliesslich $g = e = 0$ ist, so bleibt der schon vorhandene Typus q.

Wir haben also gefunden:

Typen von inf. linearen Transform.

Satz 12: *Die allgemeine infinitesimale projective Transformation, welche die unendlich ferne Gerade invariant lässt:*

$$Uf \equiv (a + cx + dy)p + (b + ex + gy)q$$

kann durch Ausführung einer linearen Transformation auf eine der folgenden acht typischen Formen gebracht werden:

$$xp + \alpha yq;$$

$$xp + (x + y)q, \qquad p + yq;$$

$$p + xq;$$

$$yq, \qquad xp + yq;$$

$$xq, \qquad q.$$

Wir haben zwar oben immer mehrere lineare Transformationen $T_1, T_2 \cdots$ nach einander auf Uf oder S ausgeführt. Es ist aber die Reihenfolge $T_1 T_2 \cdots$ mehrerer linearer Transformationen offenbar wieder eine lineare Transformation T und

$$\begin{aligned} & T_n^{-1} T_{n-1}^{-1} \cdots T_2^{-1} T_1^{-1} S T_1 T_2 \cdots T_{n-1} T_n \\ = & (T_1 T_2 \cdots T_{n-1} T_n)^{-1} S T_1 T_2 \cdots T_{n-1} T_n \\ = & T^{-1} S T, \end{aligned}$$

sodass die Ausübung von T allein das auf einmal geleistet hätte, was wir schrittweis fanden.

Dass wir die acht infinitesimalen Transformationen in der obigen Weise angeordnet haben, hat seinen Grund.

Die bei dies. Typen inv. Punkte u. Geraden.

Fragen wir uns nämlich nach den bei einer derselben *invarianten Punkten und Geraden*, etwa bei

$$xp + (x + y)q.$$

Soll ein im Endlichen gelegener Punkt hierbei invariant sein, so muss für ihn

$$x = 0, \quad x + y = 0$$

sein, d. h. es ist der Anfangspunkt. Da nach Theorem 5, § 1, durch jeden invarianten Punkt eine invariante Gerade geht, so kann es also im Endlichen nur solche invariante Geraden geben, die durch den Anfangspunkt gehen, etwa diese

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Sie ist invariant, wenn $\alpha \delta x + \beta \delta y$ vermöge der Gleichung verschwindet. Dies Increment ist aber gleich

$$(\alpha x + \beta(x + y))\delta t,$$

es soll die Form $\lambda \cdot (\alpha x + \beta y)$ haben. Offenbar geht dies nur, wenn $\beta = 0$ ist, d. h. $x = 0$. Die y-Axe ist also die einzige im Endlichen gelegene invariante Gerade. Wir wissen ferner, dass die unendlich ferne Gerade invariant ist. Auf ihr muss demnach wenigstens ein invarianter Punkt existieren. Seine Verbindungslinie mit dem Anfangspunkt wäre eine invariante Gerade, also die Gerade $x = 0$, d. h. auf der unendlich fernen Geraden bleibt nur der unendlich ferne Punkt der y-Axe in Ruhe. Bei unserer infinitesimalen Transformation

$$xp + (x + y)q$$

besteht also die gesuchte invariante Figur aus zwei Geraden und zwei Punkten: eine der Geraden geht durch die beiden Punkte, einer der Punkte ist der Schnittpunkt beider Geraden.

Suchen wir analog das bei

$$p + yq$$

invariante Gebilde aus Punkten und Geraden. Offenbar ist hier kein im Endlichen gelegener Punkt in Ruhe. Wohl aber ist $y = 0$ eine invariante Gerade. Ausser ihr giebt es im Endlichen keine invariante Gerade, da sonst der Schnittpunkt beider ein invarianter Punkt wäre, es sei denn, dass die andere Gerade dieser parallel wäre. Aber die Gerade $y = c$ bleibt nur dann in Ruhe, wenn $c = 0$ ist. Wir wissen, dass die unendlich ferne Gerade invariant ist. Danach ist der unendlich ferne Punkt der x-Axe $y = 0$ ein in Ruhe bleibender. Wäre nun noch ein Punkt der unendlich fernen Geraden in Ruhe, so müsste das durch ihn gehende Büschel von Parallelgeraden in sich transformiert werden. Ein solches Büschel kennen wir schon, nämlich $y =$ Const. Jedes andere hat die Gleichungenform

$$x - \varkappa y = \text{Const.}$$

Es ist invariant, wenn $\delta x - \varkappa \delta y$, also $1 - \varkappa y$ auch gleich Const. vermöge $x - \varkappa y =$ Const. ist. Dies gilt nur für $\varkappa = 0$. Danach besteht das gesuchte invariante Gebilde bei $p + yq$ aus zwei Geraden und zwei Punkten, und zwar geht eine der Geraden durch beide Punkte und einer der Punkte ist Schnittpunkt der beiden Geraden.

Zusammenstellung der inv. Typen.

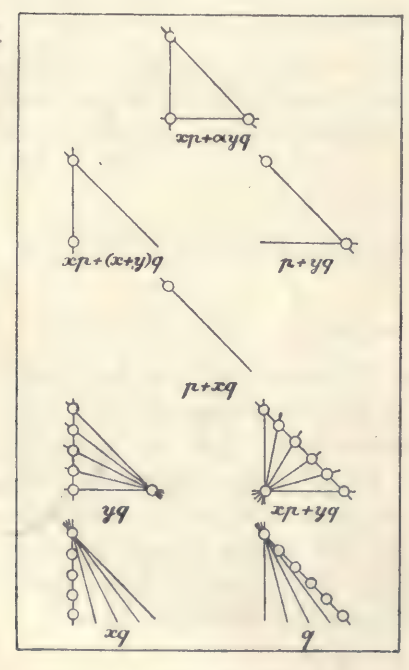


Fig. 8.

Das invariante Gebilde ist demnach bei

$$xp + (x + y)q \text{ und } p + yq$$

dasselbe, soweit keine metrischen, sondern nur Lagenbeziehungen berücksichtigt werden. Ähnliches gilt von den beiden anderen Paaren infinitesimaler Transformationen, die in obigem Satze neben einander gestellt werden.

Wir haben die invarianten Gebilde aus Punkten und Geraden, wie sie sich in jedem Falle durch Räsonnements ergeben, die den obigen ganz ähnlich sind, in nebenstehender Tafel schematisch zusammengestellt. Dabei bedeutet die Horizontale die x-Axe, die Verticale die

y-Axe und die schräge Gerade die unendlich ferne. (Fig. 8.) Bei den vier letzten infinitesimalen Transformationen bleiben unendlich viele Geraden, die ein Strahlenbüschel, und unendlich viele Punkte, die eine Punktreihe bilden, einzeln invariant. Sie sind jedesmal durch einige Strahlen resp. einige Punkte angedeutet.

Man erkennt nun sofort, dass es unmöglich ist, eine dieser acht infinitesimalen Transformationen in eine andere derselben vermöge einer *linearen* Transformation T überzuführen, denn dies würde, da T das invariante Punkt- und Geradengebilde der einen in das der anderen überführen müsste, zunächst höchstens bei den nebeneinander stehenden Paaren von infinitesimalen Transformationen möglich sein. Aber bei diesen müsste jedesmal T eine im Endlichen gelegene Gerade in eine unendlich ferne verwandeln, d. h. T könnte nicht linear sein.

Weitere Reduction der inf. project Transform.

Dagegen ist es sehr wohl möglich, durch eine *allgemeine* projective Transformation T diese Paare in sich zu vertauschen, und indem wir hierauf eingehen, erledigen wir den Rest der zu Anfang dieses Paragraphen gestellten Aufgabe, alle Typen von infinitesimalen projectiven Transformationen zu bestimmen.

Zunächst geht

$$xp + (x + y)q$$

durch die projective Transformation

$$x' = -\frac{y}{x}, \quad y' = +\frac{1}{x}$$

über in

$$p' + y'q'.$$

Ferner geht

$$yq$$

durch diese:

$$x' = \frac{1}{y}, \quad y' = \frac{x}{y}$$

über in

$$x'p' + y'q'.$$

Endlich wird

$$xq$$

durch die projective Transformation

$$x' = \frac{y}{x}, \quad y' = \frac{1}{x}$$

übergeführt in

$$q'.$$

Es bleiben demnach nur fünf Typen von infinitesimalen projectiven Transformationen übrig, nämlich:

$$\boxed{xp + \alpha yq} \quad \boxed{p + yq} \quad \boxed{p + xq} \quad \boxed{xp + yq} \quad \boxed{q}.$$

Offenbar kann keiner derselben vermöge einer projectiven Transformation in einen anderen dieser Typen übergeführt werden, da jeder eine andere invariante Figur besitzt.

Im ersten Typus $xp + \alpha yq$ ist allerdings noch eine Constante α vorhanden, die von 1 und von 0 verschieden anzunehmen ist, denn sonst würde diese infinitesimale Transformation unendlich viele Geraden invariant lassen (vgl. den vierten Typus). Es fragt sich nun nur noch, ob es nicht möglich ist, durch eine projective Transformation T die Constante α zu specialisieren, d. h. zu erreichen, dass $xp + \alpha yq$ in $x'p' + \alpha' y'q'$ übergeht, wo α' einen bestimmten particularen Wert hat. Eine solche projective Transformation T müsste jenes Dreieck, das bei $xp + \alpha yq$ invariant ist, ebenfalls invariant lassen. Entweder müsste sie also jede Seite für sich invariant lassen, also linear sein und die Form haben:

$$x' = \lambda x, \quad y' = \mu y.$$

Dann aber würde $xp + \alpha yq$ übergehen in $x'p' + \alpha y'q'$, also α doch den ursprünglichen Wert behalten. Zweitens aber könnte T die unendlich ferne Gerade zwar invariant lassen, also linear sein, aber die beiden Axen $x = 0$, $y = 0$ mit einander vertauschen:

$$x' = \lambda y, \quad y' = \mu x.$$

Dann würde $xp + \alpha yq$ übergehen in $\alpha x'p' + y'q'$ oder $x'p' + \frac{1}{\alpha} y'q'$. Also können wir erreichen, dass α in $\frac{1}{\alpha}$ übergeht. Nun sind noch vier Möglichkeiten vorhanden. T kann statt der unendlich fernen Geraden eine der beiden Axen invariant lassen, die andere mit der unendlich fernen Geraden vertauschen. Dies giebt zwei Fälle. Weiterhin kann T die drei Dreieckseiten cyklisch oder endlich in inversem Sinne cyklisch vertauschen. Man findet dann — die Ausrechnung überlassen wir dem Leser —, dass die sechs Werte

$$\alpha, \quad \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \quad 1 - \alpha, \quad \frac{\alpha - 1}{\alpha}, \quad \frac{1}{1 - \alpha}$$

an Stelle von α in $xp + \alpha yq$ eingehen können. Also ist die Constante α nicht in einen speciellen Wert überführbar, sie ist *wesentlich*, und nur die sechs obigen Werte liefern infinitesimale Transformationen, die mit einander innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind. Die Analogie der obigen Werte mit den sechs Werten der Doppelverhältnisse von vier Punkten (vgl. § 1 des 1. Kap.) hat übrigens einen tieferen Grund.

Wir fassen das Bisherige zusammen in dem

Theorem 6: *Jede infinitesimale projective Transformation oder jede eingliedrige projective Gruppe der Ebene ist inner-*

halb der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene mit einer der folgenden:

$$xp + \alpha yq, \quad p + yq, \quad p + xq, \quad xp + yq, \quad q$$

gleichberechtigt. Die Constante α im ersten Typus ist wesentlich und verschieden von Eins und von Null.

Geom. Ableitung der fünf invar. Figuren.

Man kann übrigens auch auf *rein anschaulichem Wege* erkennen, dass nur die fünf oben gefundenen Figuren, bestehend aus invarianten Punkten und Geraden, bei den infinitesimalen projectiven Transformationen auftreten können. Dabei hat man nur von den Sätzen Gebrauch zu machen, dass eine infinitesimale projective Transformation Uf die Doppelverhältnisse ungeändert lässt, und dass sie mindestens einen invarianten Punkt und eine durch ihn gehende invariante Gerade besitzt. Hieraus folgt nämlich, dass, wenn vier Punkte invariant sind, die ein wirkliches Viereck bilden, alsdann infolge der Möbius'schen Construction (vgl. § 3, Kap. 2) alle Punkte in Ruhe bleiben, dass ferner, wenn drei Punkte invariant sind, die auf einer Geraden liegen, jeder Punkt dieser Geraden in Ruhe bleibt und endlich analog, wenn drei durch einen Punkt gehende Geraden invariant sind, jede Gerade durch denselben invariant sein muss (mit Benutzung des Satzes 5 des § 1, 1. Kap.).

Danach sind, was die invarianten *Punkte* anbetrifft, nur fünf Constellationen möglich: Ist es eine endliche Zahl von Punkten, so können es höchstens drei sein, und wenn es wirklich drei sind, so dürfen dieselben nicht auf gerader Linie liegen. Es können aber auch nur zwei sein oder es bleibt nur ein Punkt invariant. Bleiben andererseits unendlich viele Punkte in Ruhe, so müssen dieselben eine gerade Linie erfüllen und ausserhalb dieser Geraden kann höchstens noch ein Punkt fest sein, oder aber es bleibt keiner sonst in Ruhe. Sonach ergeben sich die fünf Zusammenstellungen in Fig. 9. Wir bezeichnen sie mit 1), 2), 3), 4), 5).

Fig. 9.

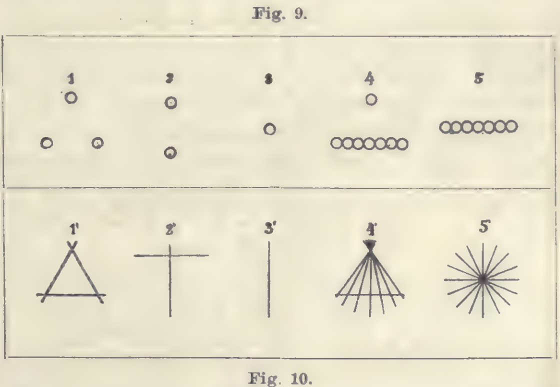


Fig. 10.

Entsprechend können wir in betreff der invarianten *Geraden* schliessen und erhalten so ebenfalls fünf Constellationen, siehe Fig. 10, die wir mit 1'), 2'), 3'), 4'), 5') bezeichnen.

Nun fragt es sich, wie die fünf ersten Figuren mit den fünf letzteren zusammen auftreten können. Liegt der Fall 1) vor, so bleiben offenbar nur die drei Geraden invariant, welche die invarianten Punkte verbinden. Denn jede weitere invariante Gerade würde invariante Schnittpunkte mit diesen dreien haben. Sonach gehören 1) und 1') zusammen. Dies liefert das Bild I in Fig. 11. Im Fall 4) haben wir offenbar unendlich viele

invariante Geraden, die die Constellation 4′) haben. Also gehören 4) und 4′) zusammen, sie liefern das Bild IV in Fig. 11. Im Fall 5) bleibt zunächst die Gerade der invarianten Punkte in Ruhe. Wird irgend ein Punkt p durch Uf nach p' geführt, so ist offenbar die Gerade pp' invariant, denn einer ihrer Punkte, ihr Schnittpunkt mit der invarianten Punktreihe, ist fest.

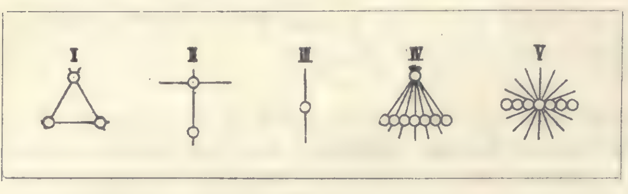


Fig. 11.

Sonach giebt es durch jeden Punkt der Ebene eine invariante Gerade, und alle invarianten Geraden können nur in der Form 5′) angeordnet sein. 5) und 5′) liefern das Bild V in Fig. 11. Nun könnten noch 2), 2′), ferner 3), 3′), endlich aber auch 2), 3′) und 3), 2′) zusammen gehören. Erstere beiden Paare liefern die Bilder II und III in Fig. 11. Letztere beiden Paare sind aber unmöglich, wie wir jetzt beweisen werden*):

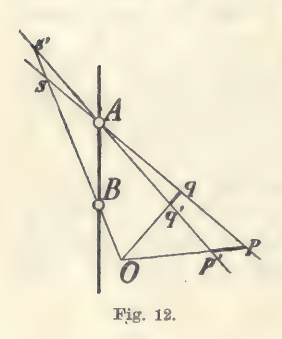


Fig. 12.

Wir brauchen den Beweis nur für den Fall 2), 3′) zu führen, da die Annahme 3), 2′) dadurch aus ihm hervorgeht, dass Punkt mit Gerade zu vertauschen ist. Im Falle 2), 3′) würden nun zwei Punkte A, B und ihre Verbindende invariant sein. Ausserdem darf kein Punkt und keine Gerade in Ruhe bleiben. Nun werde der Punkt p durch Uf nach p' geführt. (Fig. 12.) Dann geht Ap bei Uf in Ap' über, ein Punkt q von Ap also in einen Punkt q' von Ap'. pp' und qq' schneiden sich in einem Punkte O. Wir werden sehen, dass BO eine invariante Gerade sein müsste. BO schneide nämlich Ap in s, Ap' in s'. Alsdann ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen Bp, Bq, BA, Bs gleich dem der vier Punkte p, q, A, s, also gleich dem der vier Strahlen von O nach p, q, A, s, d. h. gleich dem der vier Punkte p', q', A, s' oder schliesslich gleich dem der vier Strahlen Bp', Bq', BA, Bs'. Bei Uf geht nun Bp in Bp', Bq in Bq', BA in sich über. Weil das Doppelverhältnis der vier Strahlen Bp, Bq, BA, Bs durch Uf nicht gestört wird, und weil es gleich dem der vier Strahlen Bp', Bq', BA, Bs' ist, so geht mithin bei Uf der Strahl Bs in den Strahl Bs' über. Beide aber fallen zusammen in BO, d. h. BO ist eine invariante Gerade. Nun soll aber nur AB eine invariante Gerade sein. Demnach liegt O auf AB. (Fig. 13.) Da

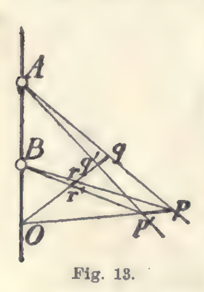


Fig. 13.

*) Dieser geometrische Beweis rührt von Scheffers her. Es sei hervorgehoben, dass der Beweis mit geringen Änderungen auch für die endlichen projectiven Transformationen gilt.

pp', qq' durch O gehen, so sehen wir: Die Punkte des Strahls Ap erhalten bei Uf Fortschreitungsrichtungen nach O hin. A und B können wir nun in dieser Überlegung vertauschen und finden: Die Punkte des Strahls Bp bewegen sich bei Uf auf O zu. Ein Strahl von O aus, der Ap in q, Bp in r trifft, enthält also zwei Punkte q und r, die bei Uf diesen Strahl nicht verlassen. Jeder Strahl von O aus ist somit eine invariante Gerade, es existieren also unendlich viele invariante Geraden, was der Voraussetzung widerspricht.

Die Combination 2), 3′) ist also unmöglich, ebenso die Combination 3), 2′), und es bleiben mithin nur die fünf in Fig. 11 angegebenen Fälle I bis V. In der That haben wir oben gerade diese fünf Fälle auf anderem Wege erhalten.

Man könnte nunmehr, auf diesen geometrischen Ergebnissen fussend, auf neuem Wege die Typen von infinitesimalen projectiven Transformationen bestimmen. Z. B. im Fall I wählt man das Coordinatensystem so, dass die beiden Axen und die unendlich ferne Gerade die invarianten Geraden werden. Nach Satz 10 hat dann wegen der invarianten unendlich fernen Geraden Uf die Form

$$Uf \equiv (a + cx + dy)p + (b + ex + gy)q.$$

Da $x = 0$ und $y = 0$ invariant sein sollen, so muss $a = d = b = e = 0$ sein und es bleibt

$$cxp + gyq.$$

Nun soll keine weitere invariante Gerade ausser jenen dreien existieren. Eine solche würde noch einen invarianten Punkt auf der x- oder y-Axe nach sich ziehen oder ginge durch den Anfangspunkt. Ersteres ist dann und nur dann ausgeschlossen, wenn c und $g \neq 0$ sind. Die Gerade $y - \lambda x = 0$ bleibt nur dann invariant, wenn $gy - \lambda cx$ vermöge $y = \lambda x$ verschwindet, d. h. wenn $\lambda(g - c) = 0$ ist. Dies würde nur dann für ein von 0 verschiedenes λ möglich sein, wenn $g = c$ wäre. Also ist $g \neq c$. Indem wir durch c dividieren und $\frac{g}{c} = \alpha$ setzen, finden wir in der That unseren Typus

$$xp + \alpha yq,$$

im dem wegen $g \neq 0$, $c \neq 0$, $g \neq c$ auch $\alpha \neq 0$ und $\neq 1$ sein muss.

In dieser Weise könnten wir von neuem auch zu den Figuren II bis V die Typen ableiten und würden so wieder zu den früher gefundenen kommen.

Wir empfehlen dem Leser, dies wirklich für die Fälle II bis V durchzuführen. Man hat jedesmal das Coordinatensystem in passender Weise in die invariante Figur hineinzulegen.

Ist eine infinitesimale projective Transformation $Uf \equiv \xi p + \eta q$ vorgelegt, so kann man die Frage aufwerfen, mit welchem Typus sie gleichberechtigt ist. Zur Beantwortung sucht man zunächst die invarianten Punkte und Geraden. Die im Endlichen gelegenen invarianten Punkte machen keine Schwierigkeit. Man findet sie, indem man

$\xi = \eta = 0$ setzt. Die unendlich fernen werden am bequemsten durch Benutzung des Differentialquotienten y' bestimmt. Es ist ja:

$$\delta y' = \left(\frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}\right)\delta t$$

(vgl. § 3 des 2. Kap.). $y' = c$ ist invariant, wenn $\delta y'$ für $y' = c$ verschwindet. Alsdann ist $y - cx = \text{Const.}$ ein invariantes Parallelenbüschel und der Punkt desselben ein unendlich ferner invarianter Punkt. Dabei ist zu beachten, dass die Schar $x = \text{Const.}$ besonders untersucht werden muss, da sie nicht durch eine Differentialgleichung $y' = c$ dargestellt werden kann. y' spielt bei diesen Untersuchungen gewissermassen die Rolle der Coordinate der unendlich fernen Punkte. Eine gleichartige Behandlungsweise aller Punkte der Ebene wird uns erst später die Benutzung homogener Coordinaten ermöglichen.

y' als Coordinate für ∞ ferne Punkte.

Beispiele.

1. Beispiel: Man soll $yp - xq$ auf den zugehörigen Typus zurückführen. Im Endlichen ist nur der Anfangspunkt invariant. Ferner ist hier

$$\delta y' = -(1 + y'^2)\delta t,$$

d. h. es sind die Parallelenbündel $y' = \pm i$ invariant. Da somit gerade drei invariante Punkte existieren, ist der zugehörige Typus der erste: $xp + \alpha yq$. Die Überführung verlangt offenbar nur eine lineare Transformation, welche die Geraden $\frac{x}{y} = \pm i$ in die Geraden $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ verwandelt. Es soll also x_1 vermöge $x - iy = 0$ und y_1 vermöge $x + iy = 0$ verschwinden. Wir setzen daher direct

$$x_1 = x - iy, \quad y_1 = x + iy$$

und erhalten

$$\begin{aligned} yp - xq &= (y + ix)p_1 + (y - ix)q_1 \\ &= i(x_1 p_1 - y_1 q_1), \end{aligned}$$

womit die Reduction geleistet und der Coefficient $\alpha = -1$ bestimmt ist.

2. Beispiel: Man führe $x^2p + xyq$ auf den zugehörigen Typus zurück.

§ 4. Die selbstprojectiven Curven.

Wir gehen jetzt dazu über, die *Bahncurven* der eingliedrigen projectiven Gruppen zu untersuchen. Eine infinitesimale Transformation

$$Uf \equiv \xi p + \eta q$$

erzeugt, wie wir wissen, eine eingliedrige Gruppe (vgl. § 2 des 2. Kap.), deren ∞^1 Transformationen durch Wiederholung von Uf entstehen. Bei dieser fortwährenden Ausführung von Uf beschreibt ein Punkt (x, y) allgemeiner Lage eine Curve, deren Tangentialrichtung durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi}$$

gegeben wird. Im ganzen existieren also ∞^1 derartige Curven, nämlich die Integralcurven der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}.$$

Führt man auf einen beliebigen Punkt p irgend eine endliche Transformation der eingliedrigen Gruppe Uf aus, so geht er in einen Punkt der durch p laufenden Integralcurve über. Wir nennen daher jene ∞^1 Integralcurven die *Bahncurven* der eingliedrigen Gruppe Uf.

Bahncurven.

Offenbar ist jede Bahncurve invariant gegenüber der Gruppe Uf, denn die Transformationen der Gruppe führen die Punkte dieser Curve immer wieder in Punkte derselben Curve über. Eine bei der Gruppe Uf invariante Curve ist demnach entweder Bahncurve oder sie besteht aus lauter einzeln invarianten Punkten*).

Nach Satz 9 in § 2 dieses Kapitels ist daher auch klar, dass, wenn die Gruppe Uf durch Ausführung einer projectiven Transformation T in die gleichberechtigte Gruppe Vf übergeht, alsdann auch die Bahncurven der ersteren durch T in die der letzteren Gruppe verwandelt werden. Demnach werden wir, um überhaupt alle möglichen Bahncurven der eingliedrigen projectiven Gruppen zu untersuchen, uns darauf beschränken können, die Bahncurven der fünf Typen zu studieren. Durch projective Transformation gehen ja aus ihren Bahncurven alle denkbaren Bahncurven hervor.

Vierter und fünfter Typus.

Wir beginnen mit den einfachsten Fällen, dem *vierten* und *fünften* Typus, also mit $xp + yq$ und q. In beiden Fällen sind die Bahncurven — wie schon aus der geometrischen Bedeutung von $xp + yq$ und q hervorgeht — *Geraden*, die entweder von dem einzeln invarianten Punkte oder aber von einem Punkte der Geraden invarianter Punkte ausgehen. Man erkennt dies auch aus den Differentialgleichungen der Bahncurven:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dx}{0} = \frac{dy}{1},$$

deren Integration $\frac{y}{x} = \text{Const.}$ und $x = \text{Const.}$ giebt. Bei einer mit $xp + yq$ gleichberechtigten eingliedrigen projectiven Gruppe verlaufen

*) Eine genauere Begründung findet man in den „Dffgln. m. inf. Trf.“, Kap. 4, § 3. Die Gleichungen der besprochenen Curven treten schon bei d'Alembert und Jacobi auf. Im Übrigen vergleiche man die Fussnote zum Schluss dieses Paragraphen.

die Bahncurven also wie in Fig. 14, bei einer mit q gleichberechtigten wie in Fig. 15. Die invarianten Punkte sind in diesen Figuren angedeutet.

Dritter Typus.

Bei der eingliedrigen Gruppe des *dritten* Typus $p + xq$ erhalten wir als die Bahncurven die Integralcurven der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x},$$

d. h. die Curven zweiten Grades

$$y - \tfrac{1}{2}x^2 = \text{Const.}$$

Die elementare analytische Theorie der *Curven zweiten Grades oder*

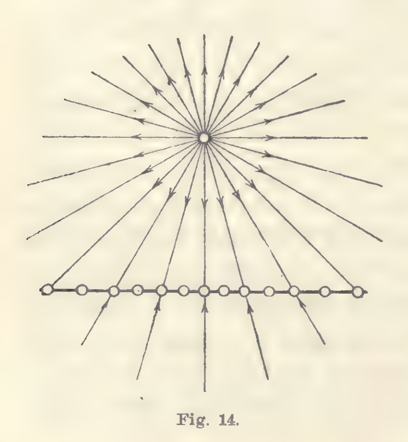


Fig. 14.

Fig. 15.

Kegelschnitte.

Kegelschnitte setzen wir als bekannt voraus und wollen bei dieser Gelegenheit einige projective Sätze über diese Curven möglichst kurz entwickeln:

Da jede Gleichung zweiten Grades

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi = 0$$

offenbar wieder in eine Gleichung zweiten Grades übergeht, wenn man vermöge einer projectiven Transformation neue Veränderliche x_1, y_1 einführt, so folgt:

Satz 13: *Jeder Kegelschnitt geht durch projective Transformation wieder in einen Kegelschnitt über.*

Denken wir uns an einen Kegelschnitt in zwei Punkten o und p die Tangenten, die sich in q schneiden mögen, und überdies die Berührsehne op gezogen, so giebt es (nach Satz 4, § 1 des 2. Kap.) immer eine projective Transformation, welche die eine Tangente, etwa die in o berührende, in die x-Axe, die Berührsehne op in die y-Axe und die andere Tangente in die unendlich ferne Gerade verwandelt.

(Fig. 16.) Dabei nimmt auch die Gleichung des Kegelschnittes eine besonders einfache Gestalt an. Weil die Curve durch den Anfangspunkt o geht, so fehlt in ihrer Gleichung das absolute Glied φ. Weil die x-Axe in o berühren soll, so ist auch der Coefficient δ gleich Null. Der unendlich ferne Punkt p der y-Axe soll dem Kegelschnitt angehören, d. h. die Gleichung darf für $x = 0$ nur eine endliche Wurzel y haben. Es muss demnach auch $\gamma = 0$ sein. Jetzt lautet die Gleichung:

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + 2\varepsilon y = 0.$$

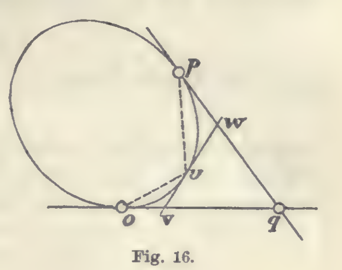


Fig. 16.

Die unendlich ferne Gerade sollte Tangente in p sein. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) aber lautet jetzt, wenn x', y' die laufenden Coordinaten bezeichnen:

$$(\alpha x + \beta y)x' + (\beta x + \varepsilon)y' = -\varepsilon y$$

oder

$$\left(\alpha \frac{x}{y} + \beta\right)x' + \left(\beta \frac{x}{y} + \frac{\varepsilon}{y}\right)y' = -\varepsilon.$$

Für den Punkt p, d. h. für $x = 0$, $y = \infty$ würde diese Gleichung die im Endlichen gelegene Tangente

$$\beta x' + \varepsilon = 0$$

liefern, wenn nicht $\beta = 0$ ist. Somit bleibt als jetzige Kegelschnittsgleichung:

$$\alpha x^2 + 2\varepsilon y = 0.$$

Natürlich kann die nichtverschwindende Zahl α fortdividiert und die Zahl ε durch Einführung eines passenden Vielfachen von y als neues y, also durch eine projective Transformation, welche das Dreieck opq ungeändert lässt, etwa gleich -1 gemacht werden. Daher:

Reduction aller Kegelschnitte auf eine typ. Form.

Satz 14: *Jeder nicht zerfallende Kegelschnitt kann durch projective Transformation auf die Gleichung*

$$x^2 - 2y = 0$$

gebracht werden.

Oben ergaben sich die ∞^1 Bahncurven

$$x^2 - 2y = \text{Const.}$$

Somit folgt:

Satz 15: *Jeder Kegelschnitt ist Bahncurve wenigstens einer eingliedrigen projectiven Gruppe.*

Proj. Transf. eines Kegelschnittes in sich.

Es ist übrigens leicht, mehrfach unendlich viele projective Transformationen zu finden, die einen vorgelegten Kegelschnitt in sich überführen. Sind nämlich m, μ, l_1, l_2, λ_1, λ_2 gewisse lineare Functionen von x, y und

bedeuten $m = 0$, $\mu = 0$ zwei Geraden, die beide den Kegelschnitt in getrennten Punkten schneiden, sind ferner $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ die Tangenten in den Schnittpunkten der Geraden $m = 0$, dagegen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ die in den Schnittpunkten der Geraden $\mu = 0$ mit dem Kegelschnitt, so giebt es, wie man leicht erkennt, immer zwei solche Zahlen k und $\varkappa$, dass die Gleichung des Kegelschnittes sowohl in der Form

$$l_1 l_2 - km^2 = 0,$$

auch als in der Form

$$\lambda_1 \lambda_2 - \varkappa\mu^2 = 0$$

geschrieben werden kann. Nehmen wir an, die linearen Functionen λ_1, λ_2 und μ seien, statt in x, y, in x_1, y_1 geschrieben, so bestimmen die Gleichungen

$$\frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{\lambda_2}{l_2} = \frac{\mu\sqrt{\varkappa}}{m\sqrt{k}}$$

eine projective Transformation der Punkte (x, y) in die Punkte (x_1, y_1) und zwar eine solche, die unsere drei Geraden $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $m = 0$ in die drei Geraden $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\mu = 0$ und den Kegelschnitt in sich überführt. Da die Geraden $m = 0$ und $\mu = 0$ beliebig angenommen werden konnten, so findet man in dieser Weise ∞^3 projective Transformationen, die den Kegelschnitt in sich überführen.

Den Kegelschnitt $x^2 - 2y = 0$ können wir jetzt als den Typus aller (nicht in zwei Geraden zerfallender) Kegelschnitte betrachten. Sätze, die für diesen gelten und nur von Lagenbeziehungen reden, gelten dann auch für jeden Kegelschnitt. Diesen Umstand benutzen wir zur Ableitung einiger wichtiger Sätze, die wir, da sie manchem Leser nichts neues bieten mag, durch kleineren Druck herausheben.

Sätze aus der project. Geometrie der Kegelschnitte.

Ein Punkt u oder (x, y) durchlaufe den Kegelschnitt (Fig. 16). Alsdann beschreiben die Strahlen pu und ou je ein Strahlenbüschel, und zwar ist jedem Strahl pu des ersteren ein Strahl ou des letzteren durch den Kegelschnitt eindeutig zugeordnet. Wir werden zeigen, dass stets vier Strahlen des einen dasselbe Doppelverhältnis bilden wie die entsprechenden vier Strahlen des anderen. pu zunächst ist bei unserer Wahl des Coordinatensystems parallel der y-Axe, daher schneidet pu auf der x-Axe die Strecke x ab. Nach Satz 1 und 4 des § 1, 1. Kap., ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des Büschels p gleich dem der vier entsprechenden Werte x. Der Strahl ou bildet mit der x-Axe einen Winkel, dessen Tangente gleich $\frac{y}{x}$ ist, und vier Strahlen des Büschels o bilden dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden vier Werte von $\frac{y}{x}$, nach der zu Anfang des § 3, 2. Kap., gemachten Bemerkung. Nun besteht wegen der Kegelschnittsgleichung zwischen x und $\frac{y}{x}$ die Beziehung

$$x = 2\frac{y}{x}.$$

Nach Satz 6, § 2 des 1. Kap., ist demnach das Doppelverhältnis von vier Werten x gleich dem der entsprechenden Werte $\frac{y}{x}$. Also sind in der That die Büschel p und o projectiv auf einander bezogen: Vier Strahlen des ersteren bilden dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden vier Strahlen des letzteren. p und o waren beliebige Punkte des Kegelschnittes. Somit folgt:

Satz 16: *Durchläuft ein Punkt einen Kegelschnitt, so beschreiben die Strahlen von ihm nach zwei festen Punkten des Kegelschnittes projective Strahlenbüschel.*

Sind also z. B. a, b, c, d, x, y sechs Punkte des Kegelschnittes, so ist, wenn wir x und y zu Strahlencentren wählen, das Doppelverhältnis der Strahlen xa, xb, xc, xd gleich dem der Strahlen ya, yb, yc, yd. Lassen wir x den Kegelschnitt durchlaufen, so folgt also:

Satz 17: *Ein Kegelschnitt kann dadurch erzeugt werden, dass man irgend vier Punkte auf ihm wählt und einen fünften Punkt der Curve sich so bewegen lässt, dass seine Strahlen nach jenen vier Punkten ein constantes Doppelverhältnis bilden.*

Legen wir andrerseits im Punkte u die Tangente an den obigen Kegelschnitt. Sie bestimmt auf den Tangenten oq und pq je einen Punkt v bez. w. Durchläuft u den Kegelschnitt, so durchlaufen v und w die beiden festen Tangenten und zwar, wie leicht zu sehen, in projectiven Punktreihen. Das Doppelverhältnis von vier Lagen von w ist nämlich gleich dem der Strahlen von o nach den Stellen w (nach Satz 1, § 1 des 1. Kap.). Diese Strahlen sind parallel den Tangenten ow, und das Doppelverhältnis derselben ist demnach gleich dem Doppelverhältnis der vier trigonometrischen Tangenten der Neigungen unserer vier Curventangenten. Die Tangente im Punkt (x, y) hat aber die Gleichung

$$xx' - y' = y,$$

sodass die trigonometrische Tangente ihrer Neigung gerade gleich x ist. Der Schnittpunkt v der Tangente mit der x-Axe dagegen hat die Abscisse $\frac{y}{x}$. Entsprechend dem Obigen folgt also:

Satz 18: *Umhüllt eine Gerade einen Kegelschnitt, so bestimmt sie auf zwei festen Tangenten desselben projective Punktreihen.*

In der projectiven Geometrie pflegt man häufig durch die Sätze 16 und 18 direct die Kegelschnitte zu *definieren* und rückwärts zu zeigen, dass es die Curven zweiten Grades sind.

Man kann nämlich auch umgekehrt sagen:

Satz 19: *Bewegt sich ein Punkt so, dass seine Strahlen nach vier festen Punkten beständig dasselbe Doppelverhältnis bilden, so beschreibt er eine Curve zweiten Grades; eine Gerade, deren Schnittpunkte mit vier festen Geraden beständig dasselbe Doppelverhältnis bilden, umhüllt eine Curve zweiten Grades.*

Wir verzichten darauf, den einfachen Beweis hierfür besonders anzugeben.

Kehren wir nun zu den Bahncurven des Typus $p + xq$ zurück. Es sind dies die ∞^1 congruenten Parabeln

$$y - \tfrac{1}{2}x^2 = \text{Const.},$$

die ihre Axen in der y-Axe haben, also gewisse ∞^1 Kegelschnitte, welche die invariante Gerade (die unendlich ferne Gerade) sämtlich in dem invarianten Punkte A berühren (dem unendlich fernen Punkte der y-Axe). Daher sind auch die ∞^1 Bahncurven einer beliebigen mit $p + xq$ gleichberechtigten Gruppe ∞^1 solche Kegelschnitte. Fig. 17 giebt ein Bild derselben.

Es bleibt nun noch der *erste* und *zweite* Typus zu untersuchen übrig.

Erster Typus.

Der *erste* Typus $xp + \alpha yq$ ist von allen fünf Typen der *allgemeinste*. Denn es giebt wirklich ∞^7 infinitesimale projective Transformationen, die, wie diese, nur drei Punkte in Ruhe lassen. Zunächst nämlich giebt es, da der Typus eine wesentliche Constante α enthält, ∞^1 solche, die ein bestimmtes Punktetripel in Ruhe lassen, also, da es in der Ebene ∞^6 Tripel von Punkten giebt, gerade ∞^7 infinitesimale Transformationen, die mit $xp + \alpha yq$ gleichberechtigt sind. Im allgemeinen wird daher eine vorgelegte infinitesimale projective Transformation Uf zu diesem ersten Typus gehören; nur in Specialfällen, wenn zwischen den Coefficienten von Uf gewisse besondere Relationen bestehen, wird Uf auf einen der vier anderen Typen reducibel sein.

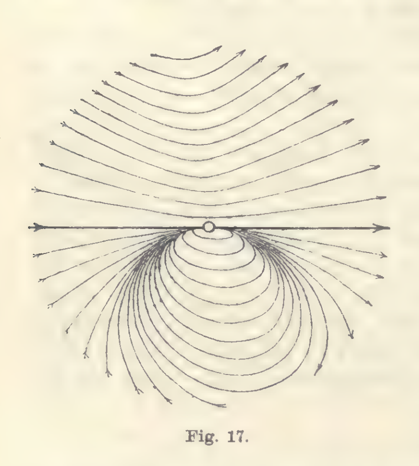


Fig. 17.

Wir werden uns deshalb mit diesem ersten Typus eingehender beschäftigen. Es sind

$$xp + \alpha yq, \quad xp + \beta yq$$

zwei zu diesem Typus gehörige eingliedrige Gruppen, die dasselbe Dreieck invariant lassen. Ihre endlichen Gleichungen ergeben sich durch Integration der simultanen Systeme:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{\alpha y_1} = dt, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{\beta y_1} = d\tau$$

in der Form:

$$x_1 = xe^t, \quad y_1 = ye^{\alpha t}; \quad x_1 = xe^\tau, \quad y_1 = ye^{\beta\tau}.$$

Führt man aber diese beiden Transformationen nach einander in der einen oder anderen Reihenfolge aus, so erhält man beide Male *dieselbe* Transformation, nämlich:

$$x_1 = xe^{t+\tau}, \quad y_1 = ye^{\alpha t + \beta\tau}.$$

Wir sagen also:

Satz 20: *Lassen zwei eingliedrige projective Gruppen dieselben drei Punkte und keine anderen Punkte in Ruhe, und ist S eine Transformation der einen, T eine der anderen, so ist $ST = TS$. Oder: die beiden Gruppen sind vertauschbar*).*

Wir wollen nun annehmen, die eingliedrige projective Gruppe Uf sei auf den Typus $xp + \alpha yq$ reducibel, aber nicht gerade notwendig schon reduciert. Sie lässt dann drei Geraden invariant, deren Schnittpunkte A, B, C die drei invarianten Punkte sind. (Siehe Fig. 18.) Es sei ferner p ein beliebiger Punkt. Uf erteilt ihm eine infinitesimale Fortschreitung, die mit der Tangente der durch p gehenden Bahncurve zusammenfällt. Nun giebt es nach Satz 7, § 1 des 2. Kap., stets eine projective Transformation T, die auch gerade die drei Punkte A, B, C in Ruhe lässt, und die den Punkt p in eine vorgegebene beliebige andere Stelle p' überführt. S möge irgend eine Transformation der Gruppe Uf sein. Führen wir T auf die Transformationen der Gruppe Uf aus, so geht S in $T^{-1}ST$ über (nach Satz 5, § 2 des 3. Kap.). Nach Satz 20 aber ist S mit T vertauschbar, daher $T^{-1}ST = T^{-1}TS = S$. T führt daher die eingliedrige Gruppe Uf in sich über. Zugleich aber führt T den Punkt p in p' und die durch p gehende in die durch p' gehende Bahncurve über, also auch die Tangente oder Fortschreitungsrichtung von p in die von p', während pA, pB, pC in $p'A$, $p'B$, $p'C$ übergehen. Andrerseits lässt T als projective Transformation Doppelverhältnisse ungeändert. Mithin folgt:

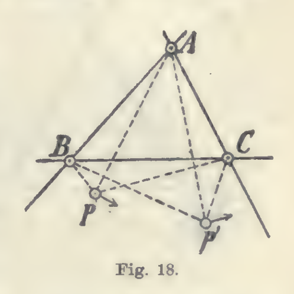


Fig. 18.

Satz 21: *Längs aller Bahncurven einer nur drei Punkte invariant lassenden eingliedrigen projectiven Gruppe ist das Doppelverhältnis der Strahlen nach den invarianten Punkten und der Tangente der Bahncurve ein und dasselbe.* Geometr. Definition der Bahncurven.

Ganz analog lässt sich beweisen:

Satz 22: *Längs aller Bahncurven des vorigen Satzes ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Tangente mit den invarianten Geraden und des Berührpunktes der Tangente dasselbe.*

Nach dem ersten Satze kann man die Fortschreitungsrichtung jedes Punktes durch eine einfache Construction bestimmen, sobald sie für einen Punkt gegeben ist. Indem man beständig den so con-

---

*) Kürzer folgt dies aus den „Diffgln. m. inf. Trf.", Satz 12 des § 4, Kap. 14.

struierten Richtungen nachgeht, erhält man die Bahncurven. Fig. 19 giebt ein Bild von ihnen. Die drei invarianten Punkte sind im allgemeinen singuläre Punkte der Bahncurven; diese selbst sind zumeist transcendent. Wir kommen hierauf nachher zurück.

Sätze über die Bahncurven.

Man kann ohne Mühe eine Reihe von Sätzen über die Bahncurven aufstellen*). Wenn man z. B. in jedem Punkte einer Bahncurve eine Gerade zieht, die mit den Strahlen nach den invarianten Punkten irgend ein gegebenes Doppelverhältnis bildet, so erhält man eine Schar von ∞^1 Geraden, die offenbar durch Uf unter einander vertauscht werden. Die Curve, die sie einhüllen, geht daher ebenfalls in sich über, d. h. sie ist eine Bahncurve. Ebenso: Wenn man auf jeder Tangente einer Bahncurve den Punkt bestimmt, der mit den Schnittpunkten der Tangente mit den drei invarianten Geraden irgend ein gegebenes Doppelverhältnis bestimmt, so ist der Ort dieser Punkte wieder eine Bahncurve. Aus Satz 20 und 19 folgt ferner: Zieht man von irgend einem bestimmten Punkte Tangenten an alle Bahncurven, so liegen deren Berührpunkte auf einem Kegelschnitt durch A, B, C und jenen Punkt. Analog: Wenn man in jedem Punkt irgend einer bestimmten Geraden die Tangente an die hindurchgehende Bahncurve zieht, so umhüllen diese Tangenten wieder einen Kegelschnitt, der die gegebene Gerade und die drei invarianten Geraden berührt. Leicht zu beweisen ist auch, dass, sobald zwei Punkte einer Bahncurve gefunden sind, beliebig viele Punkte dieser oder irgend einer anderen Bahncurve durch blosses Geradenziehen construiert werden können.

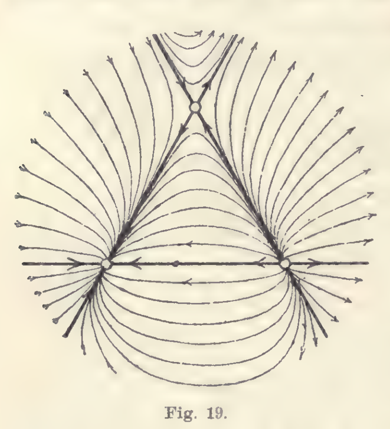


Fig. 19.

Sind die drei invarianten Punkte A, B, C reell und ist auch die infinitesimale Transformation reell, so sieht man leicht ein, dass die reellen Bahncurven durch zwei der drei invarianten Punkte hindurchgehen, durch den dritten nicht. Wir verzichten jedoch auf den Nachweis.

Sind

$$l_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$l_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$
$$l_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

die drei invarianten Geraden, so hat jede Transformation der Gruppe Uf bekanntlich (vgl. Satz 4, § 1 des 2. Kap.) die Form:

$$\frac{l_1'}{l_3'} = e^{\varrho t}\,\frac{l_1}{l_3}, \quad \frac{l_2'}{l_3'} = e^{\sigma t}\,\frac{l_2}{l_3},$$

wo die l' die Ausdrücke l, aber in x', y' statt in x, y geschrieben,

*) Vgl. die Fussnote zum Schluss dieses Paragraphen.

bedeuten. Elimination von t giebt die Bahncurve des Punktes x, y, geschrieben in den laufenden Coordinaten x', y', in der Form:

$$\left(\frac{l_1'}{l_3'}\right)^\sigma : \left(\frac{l_1}{l_3}\right)^\sigma = \left(\frac{l_2'}{l_3'}\right)^\varrho : \left(\frac{l_2}{l_3}\right)^\varrho.$$

Die Schar der ∞^1 Bahncurven wird demnach, geschrieben in x, y, dargestellt durch

Allgemeine Gleichung der Bahncurven

$$\left(\frac{l_1}{l_3}\right)^\sigma = \text{Const.} \left(\frac{l_2}{l_3}\right)^\varrho$$

oder

$$l_1^{\lambda_1} l_2^{\lambda_2} l_3^{\lambda_3} = \text{Const.},$$

wenn

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

ist, sonst aber die λ beliebige Zahlen bedeuten, wie die l_1, l_2, l_3 drei beliebige von einander unabhängige lineare Ausdrücke in x, y.

Da, wie wir schon bemerkten, die infinitesimale projective Transformation

$$Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)p + (b + ex + gy + hxy + ky^2)q$$

im allgemeinen eine von der hier betrachteten Art ist, so folgt, dass die Integralcurven der sogenannten *Jacobi'schen Differentialgleichung*:

Jacobi'sche Differentialgleichung.

$$\frac{dx}{a + cx + dy + hx^2 + kxy} = \frac{dy}{b + ex + gy + hxy + ky^2}$$

die Form haben:

$$(a_1x + b_1y + c_1)^{\lambda_1}(a_2x + b_2y + c_2)^{\lambda_2}(a_3x + b_3y + c_3)^{\lambda_3} = 0,$$

in der $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ist. Diese Differentialgleichung pflegt man meistens so zu schreiben:

$$(hx + ky)(xdy - ydx) + (a + cx + dy)dy - (b + ex + gy)dx = 0.$$

Benutzt man statt x, y homogene Punktcoordinaten, wie wir es später thun werden, so geht die Jacobi'sche Differentialgleichung in ein *verkürztes d'Alembert'sches System* mit drei abhängigen Veränderlichen über.

Indem wir den invarianten Punkten A, B, C besonders ausgezeichnete Lagen erteilen, etwa dadurch, dass wir auf Uf eine passende projective Transformation ausüben, erhalten die Bahncurven besonders interessante Formen:

Erste specielle Gestalt der Bahncurven.

Nehmen wir zunächst an, zwei der invarianten Punkte seien die unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen, der dritte der Anfangspunkt, so nimmt Uf bekanntlich die Form

$$xp + \alpha yq$$

an. Die Bahncurven sind dann die Integralcurven

$$y = \text{Const.}\, x^\alpha$$

der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{\alpha y}.$$

Sie sind transcendent, solange α keine rationale Zahl ist.

Sobald α rational ist, sind die Bahncurven dagegen algebraische Curven. Kegelschnitte ergeben sich in den Specialfällen $\alpha = 2$, $\frac{1}{2}$ oder -1. Die Annahmen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ waren früher (siehe Theorem 6 in § 3) ausgeschlossen worden. Man zeigt ohne Mühe, dass das in Satz 21 auftretende Doppelverhältnis durch α gemessen wird. Die Bahncurven sind also Kegelschnitte, wenn die drei Strahlen nach den invarianten Punkten und die Curventangente *harmonisch* liegen. (Vgl. § 1 des 1. Kap.)

Die Curven $y = \text{Const.}\, x^\alpha$ gehen durch den einen invarianten Punkt, den Anfangspunkt, hindurch, wenn α positiv ist, durch einen anderen invarianten Punkt, den unendlich fernen Punkt der y-Axe, wenn α negativ ist. Auf die Frage, ob die Curven durch sonstige invariante Punkte gehen, gehen wir nicht ein, da sie von wesentlich functionentheoretischem Charakter ist und auch für uns kein Interesse hat.

Die Differentialgleichung derjenigen Curven, welche die Bahncurven orthogonal schneiden, lautet:

$$x dx + \alpha y dy = 0.$$

Die Bahncurven sind daher stets die orthogonalen Trajectorien der ähnlichen concentrischen Kegelschnitte

$$x^2 + \alpha y^2 = \text{Const.}$$

Man kann sich hiernach ein Bild vom Verlauf der Bahncurven von $xp + \alpha y q$ herstellen (Fig. 20)*). In den Fällen $\alpha = 2$, $\frac{1}{2}$ oder -1 erhalten wir als orthogonale Trajectorien dieser Kegelschnitte, wie oben bemerkt, wieder Kegelschnitte, in den beiden ersten Fällen Parabeln als orthogonale Trajectorien von Ellipsen, im letzten Fall gleichseitige Hyperbeln als orthogonale Trajectorien ebensolcher Curven.

Zweite specielle Gestalt der Bahncurven.

Fig. 20.

Wir wollen nunmehr annehmen, der eine invariante Punkt sei wieder der Anfangspunkt, während die beiden anderen die sogenannten Kreispunkte seien, jene beiden unendlich fernen imaginären Punkte also, in denen alle Kreise der Ebene die unendlich ferne Gerade schneiden. Die Transformation lässt dann die unendlich ferne Gerade, sowie die beiden imaginären Geraden $x \pm iy = 0$ invariant. Wegen der ersteren Geraden ist sie linear nach Satz 11 des § 3. Sind x_1, y_1 die transformierten Coordinaten, so setzen wir also:

---

*) Bemerkung von Scheffers.

$$x_1 + iy_1 = a(x + iy), \quad x_1 - iy_1 = b(x - iy).$$

Infinitesimal ist die Transformation, wenn a und b unendlich wenig von 1 abweichen, also etwa $a = 1 + \lambda\delta t$, $b = 1 + \mu\delta t$ ist. Dann kommt:

$$\delta x = x_1 - x = \tfrac{1}{2}\,(\lambda(x + iy) + \mu(x - iy))\delta t,$$

$$\delta y = y_1 - y = \frac{1}{2i}\,(\lambda(x + iy) - \mu(x - iy))\delta t,$$

sodass das Symbol lautet, wenn $\lambda + \mu$ mit 2ϱ, $i(\lambda - \mu)$ mit 2σ bezeichnet wird:

$$Uf \equiv \varrho(xp + yq) + \sigma(yp - xq).$$

$xp + yq$ ist die infinitesimale Ähnlichkeitstransformation vom Anfangspunkt aus, $yp - xq$ die infinitesimale Rotation um den Anfangspunkt. Uf stellt also jetzt eine sogenannte infinitesimale Spiraltransformation dar: Die Fortschreitungsrichtung $\frac{\delta y}{\delta x}$ jedes Punktes bildet, wie leicht zu sehen, mit der Richtung $\frac{y}{x}$ des Radiusvectors einen constanten Winkel, die Bahncurven sind also jetzt *logarithmische Spiralen* um den Anfangspunkt mit demselben Steigwinkel. (Fig. 21.)*)

Logarithm. Spiralen.

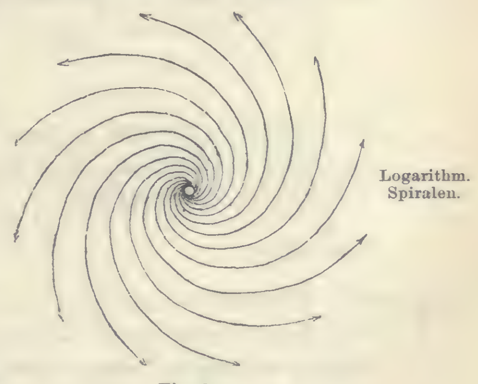


Fig. 21.

Man könnte dies von vornherein aus Satz 21 schliessen, wenn man davon Gebrauch machte, dass der Winkel zweier Geraden in einer einfachen Beziehung zu dem Doppelverhältnis steht, welches diese beiden Geraden mit den Strahlen von ihrem Schnittpunkte nach den Kreispunkten bilden. Denn dann folgt aus der Constanz des in Satz 21 erwähnten Doppelverhältnisses die des oben erwähnten Winkels.

Da Uf jetzt den Winkel zweier beliebiger Geraden unverändert lässt, so folgt: Zieht man durch alle Punkte einer logarithmischen Spirale Geraden, unter constantem Winkel zur Tangente geneigt, so umhüllen sie wieder eine logarithmische Spirale mit demselben Steigwinkel. Insbesondere: Die Evolute einer logarithmischen Spirale ist wieder eine solche.

Zweiter Typus.

Wir kommen nun zu den Bahncurven einer infinitesimalen projectiven Transformation Uf, die auf den *zweiten* Typus $p + yq$ reducibel ist. Uf hat zwei invariante Geraden, ihr Schnittpunkt A und ein Punkt B auf einer der beiden Geraden bleiben in Ruhe, sonst kein Punkt. Man kann auch hier ähnlich wie im Falle des ersten Typus constructiv die Richtung der Bahncurve in jedem Punkte finden, sobald

*) Vgl. hierzu die Fussnote zum Schluss des Paragraphen.

sie für einen Punkt gegeben ist. Wir wollen jedoch nicht näher darauf eingehen und geben nur in Fig. 22 eine Übersicht über den Verlauf der Bahncurven. Wählt man die beiden invarianten Punkte als die unendlich fernen Punkte der Axen und die eine invariante Gerade als x-Axe, so hat Uf die Form $p + yq$ und die Bahncurven werden die Integralcurven von

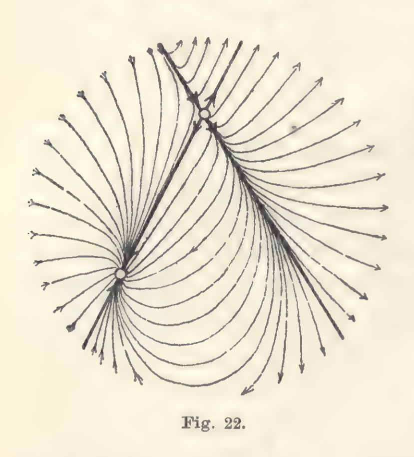


Fig. 22.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y},$$

d. h. die *transcendenten* Curven

$$y = \text{Const.}\, e^x.$$

Dieselben gehen alle durch die beiden invarianten Punkte, was daraus folgt, dass

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{\lg y + \text{Const.}}$$

für unendlich grosses y unendlich gross und y für unendlich grosses negatives x unendlich klein wird. Diese Curven sind die orthogonalen Trajectorien der Parabeln

$$y^2 + 2x = \text{Const.}$$

(Fig. 23.)

Zusammenfassung.

Überblicken wir jetzt die Ergebnisse dieses Paragraphen:

Eine Curve bleibt bei einer infinitesimalen projectiven Transformation invariant, wenn sie entweder Bahncurve ist oder aus lauter invarianten Punkten besteht. Letzterer Fall kann, wie wir im vorigen Paragraphen einsahen, nur dann eintreten, wenn die Curve eine Gerade ist. Sonach ergiebt sich: Eine invariante Curve ist entweder eine Gerade oder ein Kegelschnitt oder aber sie kann bei passender Wahl des Coordinatensystems (d. h. durch Ausübung einer projectiven Transformation) auf eine der Formen

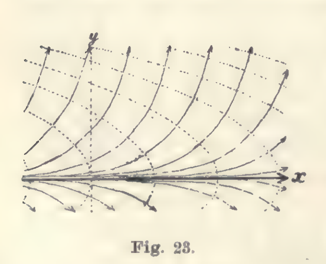


Fig. 23.

$$y = x^\alpha, \quad y = e^x$$

gebracht werden.

Inf. project. Transform., welche die Bahncurven gestatten.

Eine derartige Curve gestattet, wenn sie nicht Gerade oder Kegelschnitt ist, auch nur eine infinitesimale projective Transformation, wie leicht zu sehen ist:

Die Curve

$$y = x^\alpha$$

ist weder Gerade noch Kegelschnitt, wenn

$$\alpha \neq, -1,\ 0,\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2$$

ist. Sie gestattet

$$Uf \equiv (a + cx + dy + hx^2 + kxy)p + (b + ex + gy + hxy + ky^2)q,$$

wenn $\delta(y - x^\alpha)$ oder also $\delta y - \alpha x^{\alpha - 1}\delta x$ vermöge $y = x^\alpha$ verschwindet, d. h. wenn:

$$b + ex + gx^\alpha + hx^{\alpha+1} + kx^{2\alpha} - \alpha x^{\alpha-1}(a + cx + dx^\alpha + hx^2 + kx^{\alpha+1}) = 0$$

ist für jedes x. Dies liefert, sobald α nicht einen der soeben ausgeschlossenen Werte hat, sofort:

$$b = 0,\quad e = 0,\quad a = 0,\quad g - \alpha c = 0,\quad h = 0,\quad d = 0,\quad k = 0,$$

d. h. Uf reduciert sich auf $c(xp + \alpha yq)$.

Die Curve gestattet also nur die eine infinitesimale projective Transformation $xp + \alpha yq$, die, wie bekannt, überdies drei ganz bestimmte Punkte und deren Verbindungsgeraden in Ruhe lässt. Einer von diesen drei Punkten liegt, wie wir wissen, sicher auf der Curve.

Die Curve ferner:

$$y = e^x$$

gestattet die allgemeine infinitesimale projective Transformation Uf nur dann, wenn $\delta(y - e^x)$ oder $\delta y - e^x\delta x$ vermöge $y = e^x$ verschwindet, also identisch

$$b + ex + ge^x + hxe^x + ke^{2x} - e^x(a + cx + de^x + hx^2 + kxe^x) = 0$$

ist, und diese Forderung führt nur auf $Uf \equiv p + yq$, eine infinitesimale Transformation, die zwei ganz bestimmte Punkte, ihre Verbindungsgerade und noch eine ganz bestimmte Gerade durch einen der Punkte invariant lässt. Die beiden Punkte liegen nach dem Früheren sicher auf der Curve.

Inf. project. Transf., die eine Gerade gestattet.

Die Geraden und Kegelschnitte dagegen gestatten mehr als eine infinitesimale projective Transformation. Ist nämlich eine Gerade etwa unendlich fern, so gestattet sie nach Satz 10 des § 3 die ∞^5 infinitesimalen projectiven Transformationen:

$$(a + cx + dy)p + (b + ex + gy)q.$$

Inf. project. Transform. eines Kegelschnittes.

Dass andererseits ein Kegelschnitt ∞^3 projective Transformationen gestattet, wurde schon oben (nach Satz 5) in einer Note bemerkt. Wir wollen hier insbesondere die infinitesimalen projectiven Transformationen eines Kegelschnittes bestimmen. Er kann nach Satz 14 in der Form

$$x^2 - 2y = 0$$

angenommen werden. Er gestattet Uf, wenn $x\delta x - \delta y$ vermöge $y = \frac{x^2}{2}$ verschwindet, also identisch

$$x\left(a + cx + \frac{d}{2}x^2 + hx^2 + \frac{k}{2}x^3\right) - \left(b + ex + \frac{g}{2}x^2 + \frac{h}{2}x^3 + \frac{k}{4}x^4\right) = 0,$$

d. h.

$$b = 0, \quad e = a, \quad g = 2c, \quad h + d = 0, \quad k = 0$$

ist. Der Kegelschnitt gestattet demnach die ∞^2 infinitesimalen projectiven Transformationen:

$$(a + cx + dy - dx^2)p + (ax + 2cy - dxy)q,$$

die sich linear mit constanten Coefficienten aus

$$p + xq, \quad xp + 2yq, \quad (x^2 - y)p + xyq$$

zusammensetzen lassen.

Wir sagen also:

Theorem 7: *Es giebt vier Classen von Curven, die infinitesimale projective Transformationen zulassen. Jede derartige Curve kann bei passender Wahl des Coordinatensystems in einer der Formen dargestellt werden:*

$$y - x^\alpha = 0, \quad y - e^x = 0, \quad x^2 - 2y = 0, \quad y = 0.$$

Eine solche Curve gestattet, sobald sie nicht eine Gerade oder ein Kegelschnitt ist, nur eine infinitesimale projective Transformation, die überdies noch drei oder zwei ganz bestimmte Punkte, sonst aber keinen Punkt der Ebene invariant lässt. Einer dieser Punkte liegt sicher auf der Curve. Jeder Kegelschnitt dagegen gestattet ∞^2, jede Gerade ∞^5 infinitesimale projective Transformationen, die aus drei bez. sechs bestimmten von einander unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen linear abzuleiten sind.

Die hier betrachteten Curven, also die Curven, welche wenigstens eine infinitesimale projective Transformation in sich gestatten, wollen wir künftig *selbstprojective Curven* oder, wo kein Missverständnis möglich, kurz *projective Curven* nennen.

Selbstprojective Curven.

Einen Teil des Theorems sprechen wir nun so aus:

Satz 23: *Eine infinitesimale projective Transformation, die eine bestimmte selbstprojective Curve in sich überführt, lässt auch wenigstens einen bestimmten Punkt der Curve und zwei oder drei ganz bestimmte Geraden in Ruhe, sobald die Curve weder eine Gerade noch ein Kegelschnitt ist.*

Den invarianten Punkt werden wir als *singulären* Punkt der Curve bezeichnen, da er also besondere Eigenschaften hat*).

*) Dass diese Curven eingliedrige projective Gruppen sowie eine Reihe anderer Berührungstransformationen gestatten, bemerkte zuerst Lie. Klein erkannte zuerst, dass die logarithmischen Spiralen zu den projectiven Curven gehören. Vgl. zwei Abhandlungen von Klein und Lie in den Comptes Rendus von 1870 und den Math. Ann., Bd. 4.

Kapitel 4.

Einige Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene.

Wir haben bisher die allgemeine achtgliedrige und die ∞^7 eingliedrigen projectiven Gruppen der Ebene besprochen. Die letzteren nennen wir, da sie in jener enthalten sind, *eingliedrige Untergruppen* der allgemeinen projectiven Gruppe.

In entsprechender Weise bezeichnen wir jede Gruppe von projectiven Transformationen (mit paarweis inversen Transformationen), sobald sie nicht alle ∞^8 projectiven Transformationen umfasst, als eine *Untergruppe* der allgemeinen projectiven Gruppe. Später werden wir *alle* diese Untergruppen, sobald sie von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, besprechen und bestimmen.

Im vorliegenden Kapitel sollen dagegen zur Einführung in die späteren Theorien nur einige besonders wichtige Untergruppen als Beispiele besprochen werden. Die Wege, die wir dabei einschlagen, werden sich öfters durch Benutzung späterer Sätze abkürzen lassen, wie wir schon früher hervorgehoben. Gerade dadurch wird die Bedeutung der späteren Entwickelungen für den Leser einleuchtender werden.

§ 1. Die allgemeine lineare Gruppe.

Projective Transform., welche eine Gerade gestattet.

Greifen wir aus der Schar aller ∞^8 projectiven Transformationen der Ebene diejenigen heraus, die eine bestimmte Gerade g invariant lassen. Sie seien mit S_a, S_b . . bezeichnet. Definiert sind sie durch die symbolischen Gleichungen:

$$(g)S_a = (g), \quad (g)S_b = (g), \cdots.$$

Offenbar ist dann auch

$$(g)S_aS_b = (g)S_b = (g),$$

d. h. auch diejenige projective Transformation $S_{(ab)}$, welche die Aufeinanderfolge von S_a und S_b ersetzt, lässt die Gerade g invariant, gehört demnach auch der Schar aller S_a, $S_b \cdots$ an. Ist ferner S_a^{-1} die zu S_a inverse projective Transformation, so folgt aus

$$(g) = (g)S_a,$$

wenn wir hierauf S_a^{-1} ausüben:

$$(g)S_a^{-1} = (g)S_aS_a^{-1} = (g),$$

denn $S_aS_a^{-1}$ ist die Identität. Also auch S_a^{-1} gehört zur Schar der g invariant lassenden projectiven Transformationen.

Satz 1: *Alle projectiven Transformationen, die eine bestimmte Gerade invariant lassen, bilden eine Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Denn dass $S_a S_b$ wieder eine gewisse Transformation S_c der Schar S_a, $S_b \cdot\cdot$ ist, drücken wir eben dadurch aus, dass wir sagen: Die Schar ist eine *Gruppe*.

Gruppe derselben.

Wir nennen die obige Gruppe insbesondere eine *Untergruppe* der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene, da sie in dieser enthalten ist.

Lineare Transformationen.

Nehmen wir insbesondere die Gerade g unendlich fern an. Wir zeigten schon in Satz 11, § 3 des 3. Kap., dass die allgemeinsten projectiven Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade in Ruhe lassen oder — in elementarer Ausdrucksweise — Parallelen wieder in Parallelen überführen, die *lineare* Form haben:

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2. \tag{1}$$

Allgemeine lineare Gruppe.

Daher nennen wir die Gruppe aller projectiven Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen, die *allgemeine lineare Untergruppe* der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene oder kurz die *allgemeine lineare Gruppe.* Dass alle Transformationen von der Form (1) eine Gruppe bilden, kann man übrigens auch analytisch verificieren: Zwei solche lineare Transformationen geben, nach einander ausgeführt, wieder eine lineare Transformation.

Die allgemeine lineare Gruppe (1) enthält *sechs* Constanten a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2, die sämtlich wesentlich sind, denn zwei Transformationen von der Form (1) sind dann und nur dann dieselben, wenn die sechs Coefficienten der einen mit denen der anderen übereinstimmen. Die vorliegende Gruppe ist demnach eine *sechsgliedrige Untergruppe* der allgemeinen projectiven Gruppe.

Natürlich wird immer vorausgesetzt, dass die Gleichungen (1) auch nach x, y auflösbar seien, d. h. dass die Determinante

$$\Delta \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

sei. Dies folgt schon aus der in § 3 des 1. Kapitels getroffenen Festsetzung, dass die Determinante Δ der allgemeinen projectiven Transformation von Null verschieden sein soll. Diese Determinante Δ reduciert sich jetzt (indem $a_3 = b_3 = 0$, $c_3 = 1$ zu setzen ist) auf die vorstehende. Aus Satz 3, § 1 des 2. Kap., folgt daher auch sofort, wenn wir Δ die Determinante von (1) nennen:

Satz 2: *Haben zwei lineare Transformationen die Determinanten Δ_1 und Δ_2, so ist $\Delta_1 \Delta_2$ die Determinante der linearen Transformation, die ihrer Aufeinanderfolge äquivalent ist.*

Durch Auflösung der Gleichungen (1) erhält man die zur Transformation (1) inverse, ebenfalls lineare, also der Gruppe angehörende Transformation. Die Aufeinanderfolge beider Transformationen muss eine Transformation der Gruppe liefern. Sie giebt aber die identische Transformation. Es muss also solche Werte der Constanten in (1) geben, für die sich jene Gleichungen auf $x_1 = x$, $y_1 = y$ reducieren. In der That sind $a_1 = b_2 = 1$, $b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = 0$ diese Werte. Nehmen wir nun die Coefficienten unendlich wenig verschieden von diesen Werten an, setzen wir also, indem wir unter δt eine infinitesimale Grösse verstehen:

$$a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t, \quad b_1 = \beta_1 \delta t, \quad c_1 = \gamma_1 \delta t,$$
$$a_2 = \alpha_2 \delta t, \quad b_2 = 1 + \beta_2 \delta t, \quad c_2 = \gamma_2 \delta t,$$

so muss sich eine *infinitesimale* Transformation der Gruppe ergeben. Wirklich erhalten dann x und y unendlich kleine Incremente $\delta x = x_1 - x$, $\delta y = y_1 - y$ oder:

Inf. lineare Transform.

$$\delta x = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t, \quad \delta y = (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t.$$

Die allgemeine infinitesimale lineare Transformation oder die allgemeinste infinitesimale projective Transformation, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführt, d. h. Parallelen in Parallelen verwandelt, hat folglich das Symbol:

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)p + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)q.$$

Hiermit stimmt Satz 10 in § 3 des 3. Kap. überein, denn Uf ist linear ableitbar aus den sechs von einander unabhängigen infinitesimalen linearen Transformationen:

$$p, \; q, \; xp, \; yp, \; xq, \; yq.$$

Man bemerke, dass diese sechs, wenn sie mit $U_1 f \cdot\cdot U_6 f$ bezeichnet werden, die Eigentümlichkeit haben, dass jeder Klammerausdruck $(U_i U_k)$ linear aus $U_1 f \cdot\cdot U_6 f$ (mit *constanten* Coefficienten) ableitbar, also ebenfalls eine infinitesimale lineare Transformation ist. (Man vergleiche hiermit die analoge Bemerkung bei der allgemeinen projectiven Gruppe in § 3 des 2. Kap.) Im zweiten Abschnitt kommen wir auf die Bedeutung dieses wichtigen Umstandes zurück.

Die linearen Transformationen führen die unendlich ferne Gerade in sich über. Da die Parabeln als diejenigen Kegelschnitte definiert werden können, welche die unendlich ferne Gerade zur Tangente haben, so führt eine lineare Transformation — wegen Satz 13, § 4 des 3. Kap. — immer die Parabeln wieder in Parabeln über. Eine projective Transformation andererseits, die Parabeln immer wieder in Parabeln verwandelt, führt die unendlich ferne Gerade in sich über, denn sie führt alle Parabeln, welche die unendlich ferne Gerade in demselben Punkte berühren, in lauter

Lin. Transf. als solche, welche Parabeln in Parabeln überführen.

Parabeln über, die eine gewisse Gerade in demselben Punkt berühren. Wäre diese Gerade nicht wieder die unendlich ferne, so hätten die neuen Parabeln zwei gemeinsame Tangenten — nämlich noch die unendlich ferne Gerade. Dies aber kann nicht der Fall sein, denn sonst müssten auch die ursprünglichen Parabeln noch eine zweite gemeinsame Tangente haben. Also kann man die linearen Transformationen definieren als diejenigen projectiven Transformationen, die jede Parabel in eine Parabel verwandeln. Es giebt insgesamt ∞^4 Parabeln, dieselben erfüllen also eine gewisse Differentialgleichung vierter Ordnung. Die linearen Transformationen sind daher alle projectiven Transformationen, welche diese Differentialgleichung vierter Ordnung invariant lassen. Um die Differentialgleichung aufzustellen, haben wir die allgemeine Gleichung einer Parabel

$$(ax + by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

viermal zu differenzieren und die Coefficienten zu eliminieren. Durch die erste Differentiation wird sogleich e entfernt. Die zweite Differentiation schafft auch c fort, und die dritte giebt, wenn wir durch y'' dividieren:

$$\frac{(a + by')^2}{y''} + abx + b^2y + d = 0.$$

Die nächste Differentiation entfernt d. Indem wir dann $\frac{a}{b} = \lambda$ setzen, kommt:

$$\lambda + y' - 3\frac{y''^2}{y'''} = 0,$$

und durch die letzte Differentiation wird endlich auch λ fortgeschafft, sodass sich ergiebt:

$$5y'''^2 - 3y''y^{\text{IV}} = 0.$$

Wir bemerken noch, dass die Geraden als degenerierte Parabeln aufgefasst werden können, also jede Transformation, die Parabeln in Parabeln überführt, auch Geraden in Geraden verwandelt, d. h. an sich projectiv ist.

Satz 3: *Die linearen Transformationen können definiert werden als diejenigen Punkttransformationen überhaupt, welche die Differentialgleichung vierter Ordnung*

$$5y'''^2 - 3y''y^{\text{IV}} = 0$$

invariant lassen).*

Inf. lineare Transf. als Erzeuger endlicher linearer Transform.

Wir fanden als allgemeinste infinitesimale lineare Transformation diese:

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)p + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)q.$$

Da wir Uf und $c \cdot Uf$ als im Grunde identische infinitesimale Transformationen betrachten, sobald c eine Constante ist, so giebt es folglich gerade ∞^5 infinitesimale lineare Transformationen. Eine beliebige derselben erzeugt nun durch fortwährende Wiederholung ∞^1 endliche

---

*) Diese Definition aller linearen Transformationen dürfte zuerst von Scheffers ausgesprochen worden sein.

Transformationen, die eine eingliedrige Gruppe bilden. Es liegt nahe zu vermuten, dass es *lineare* Transformationen sind. Wir werden dies analog dem früheren Beweise für projective Transformationen überhaupt (in § 4 des 2. Kap.) zeigen.

Es handelt sich darum, nachzuweisen, dass das simultane System

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1} = \frac{dy_1}{\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2} = dt,$$

dessen Integration mit den Anfangswerten x, y von x_1, y_1 für $t = 0$ die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Uf liefert, durch Gleichungen von der Form

$$(3) \qquad x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2$$

integriert wird, in denen die a, b, c gewisse Functionen des Parameters t bedeuten.

Die Gleichungen (3) sind die Integralgleichungen von (2), wenn identisch für jedes x und y:

$$\frac{da_1}{dt} x + \frac{db_1}{dt} y + \frac{dc_1}{dt} = \alpha_1(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta_1(a_2 x + b_2 y + c_2) + \gamma_1,$$

$$\frac{da_2}{dt} x + \frac{db_2}{dt} y + \frac{dc_2}{dt} = \alpha_2(a_1 x + b_1 y + c_1) + \beta_2(a_2 x + b_2 y + c_2) + \gamma_2$$

wird, oder also, wenn die a, b, c die Gleichungen erfüllen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{da_1}{dt} = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2, & \dfrac{da_2}{dt} = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2, \\ \dfrac{db_1}{dt} = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2, & \dfrac{db_2}{dt} = \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2, \\ \dfrac{dc_1}{dt} = \alpha_1 c_1 + \beta_1 c_2 + \gamma_1, & \dfrac{dc_2}{dt} = \alpha_2 c_1 + \beta_2 c_2 + \gamma_2. \end{cases}$$

Diese sechs linearen Differentialgleichungen aber lassen sich sicher erfüllen durch gewisse Functionen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 von t. Die Integrationsconstanten sind so zu particularisieren, dass a_1 und b_2 für $t = 0$ gleich Eins, die übrigen b_1, c_1, a_2, c_2 aber gleich Null werden, denn nur dann geben die Gleichungen (3) für $t = 0$ die identische Transformation. Dass diese Specialisierung möglich ist, folgt daraus, dass sich die a, b, c vermöge (4) nach Potenzen von t entwickeln lassen, ohne dass durch (4) die Anfangsglieder bestimmt werden, denn nach (4) ist offenbar z. B.

$$a_1 = a_1^0 + (\alpha_1 a_1^0 + \beta_1 a_2^0)t + \cdots, \quad a_2 = a_2^0 + (\alpha_2 a_1^0 + \beta_2 a_2^0)t + \cdots,$$

wenn unter a_1^0, a_2^0 Integrationsconstanten verstanden werden. Diese Werte aber reducieren sich für $t = 0$ auf a_1^0, a_2^0, die wir also gleich 1 und 0 annehmen werden. Ähnlich verhält es sich mit den Entwickelungen von b_1, b_2 und c_1, c_2.

Es ist also bewiesen:

Satz 4: *Die von einer infinitesimalen linearen Transformation der Ebene erzeugte eingliedrige Gruppe besteht aus linearen Transformationen.*

Für die Praxis gewährt die Zürückführung der Gleichungen (2) auf die Gleichungen (4) keine Vorteile. Vielmehr wird man im gegebenen Falle direct die Gleichungen (2) zu integrieren suchen. Wir kommen darauf nachher zurück.

Man bemerkt, dass die Gleichungen (4) die a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 als Functionen von $\alpha_1 t$, $\beta_1 t$, $\gamma_1 t$ und $\alpha_2 t$, $\beta_2 t$, $\gamma_2 t$ bestimmen, die hinsichtlich dieser sechs Grössen unabhängig sind. Denn es ist nach (4) die Functionaldeterminante:

$$\Sigma \pm \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1 t} \frac{\partial b_1}{\partial \beta_1 t} \frac{\partial c_1}{\partial \gamma_1 t} \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_2 t} \frac{\partial b_2}{\partial \beta_2 t} \frac{\partial c_2}{\partial \gamma_2 t} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

also gleich $\Delta^2 \neq 0$. Es besteht daher keine Relation zwischen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 allein. Dieser Umstand gestattet sofort die Beantwortung der Frage, ob die ∞^5 von den infinitesimalen linearen Transformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen von je ∞^1 endlichen linearen Transformationen auch alle ∞^6 endlichen linearen Transformationen enthalten oder nicht. Ist nämlich eine endliche lineare Transformation (3) gegeben, sind also a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 gegebene Zahlen, so bestimmen die Integrationsgleichungen des Systems (4) wegen ihrer Unabhängigkeit $\alpha_1 t$, $\beta_1 t$, $\gamma_1 t$, $\alpha_2 t$, $\beta_2 t$, $\gamma_2 t$, d. h. die Verhältnisse der α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 als Zahlen. *Jede* endliche lineare Transformation (3) wird also von einer infinitesimalen linearen Transformation

Endliche lin. Transformation, erzeugt von inf. linearen Transformationen.

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)p + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)q$$

erzeugt, denn in Uf kommt es ja eben gerade nur auf die Verhältnisse der α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 an. Also:

Satz 5: *Jede endliche lineare Transformation gehört mindestens einer eingliedrigen linearen Gruppe an.*

Die Sätze 4 und 5 lassen sich in dem Theorem zusammenfassen:

Lin. Gruppe, erzeugt von inf. linearen Transform.

Theorem 8: *Die ∞^5 infinitesimalen linearen Transformationen der Ebene erzeugen die sechsgliedrige Gruppe aller*

endlichen linearen Transformationen der Ebene. Diese Gruppe zerfällt dementsprechend in ∞^5 eingliedrige Untergruppen, und jede endliche lineare Transformation gehört einer oder einer discreten Anzahl derselben an.

Wenn wir auf eine lineare Transformation S eine andere lineare Transformation T ausführen, so entsteht die Transformation $T^{-1}ST$ (vgl. Satz 5, § 2 des 3. Kap.), die ebenfalls linear ist. Einmal folgt dies rein begrifflich: Denn T^{-1}, S und T verwandeln alle drei Parallelenbüschel wieder in Parallelenbüschel, mithin führt auch $T^{-1}ST$ Parallelen in Parallelen über, d. h. $T^{-1}ST$ ist eine lineare Transformation. Aber man kann es natürlich auch analytisch einsehen.

Eine lineare Transformation T führt nun alle Transformationen einer eingliedrigen linearen Gruppe wieder in die Transformationen einer solchen über, insbesondere die infinitesimale Transformation der ersteren in die der letzteren Gruppe, nach Satz 7, § 2 des 3. Kap.

Innerhalb der linearen Gruppe gleichberechtigte eingl. Untergruppen.

Wir werden alle diejenigen eingliedrigen linearen Gruppen *mit einander innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe gleichberechtigt* nennen, die durch lineare Transformation in einander überführbar sind. Alsdann können wir nach typischen Formen für die verschiedenen Scharen von gleichberechtigten eingliedrigen linearen Gruppen fragen. Diese Frage wurde schon in § 3 des 3. Kap. durch Satz 12 erledigt. Jenen Satz werden wir jetzt so aussprechen:

Satz 6: *Jede eingliedrige lineare Gruppe ist innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe gleichberechtigt mit einer der acht folgenden:*

$$xp + \alpha yq, \quad xp + (x + y)q, \quad p + yq, \quad p + xq,$$

$$yq, \quad xp + yq, \quad xq, \quad q.$$

Schon damals gaben wir die Figuren der invarianten Punkte und Geraden bei diesen acht Typen an. (Siehe Fig. 8.) Danach ist es klar, dass keiner dieser Typen überzählig ist, denn es giebt keine lineare Transformation, also keine die unendlich ferne Gerade in sich überführende projective Transformation, die eine jener invarianten Figuren in eine andere derselben überführt.

Wir kommen schliesslich auf das Problem der Integration des Systems (2) oder:

$$(5) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2$$

zurück, welche die endlichen Gleichungen der von

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)p + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)q$$

erzeugten eingliedrigen linearen Gruppe liefert. Das System (5) ist ein sogenanntes *d'Alembert'sches System*, und man kann einsehen, dass *die d'Alembert'sche Integrationsmethode desselben in sehr enger Beziehung zur Zurückführung der infinitesimalen Transformation* Uf *auf eine ihrer acht typischen Formen steht.*

d'Alembert'sches System.

Das d'Alembert'sche Verfahren besteht bekanntlich darin, dass man zwei Zahlen λ, μ so zu bestimmen sucht, dass:

$$\frac{d(\lambda x_1 + \mu y_1)}{dt} = \varrho(\lambda x_1 + \mu y_1) + n \tag{6}$$

wird. Alsdann nämlich ist diese Gleichung leicht zu integrieren. Sie liefert ja, wenn $\varrho \neq 0$ ist:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \frac{n}{\varrho} = e^{\varrho t}\left(\lambda x + \mu y + \frac{n}{\varrho}\right)$$

und, wenn $\varrho = 0$ ist:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda x + \mu y + nt.$$

Existieren nun zwei Verhältnisse $\lambda : \mu$, für welche je eine Gleichung von der Form (6) besteht, so erhalten wir so zwei von einander unabhängige Integralgleichungen und das Integrationsgeschäft ist zu Ende. Andernfalls dagegen müssen wir andere Wege einschlagen. Wir werden die Fälle einzeln besprechen:

Da nach (5)

$$\frac{d(\lambda x_1 + \mu y_1)}{dt} = \lambda(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1) + \mu(\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2)$$

ist, so ist (6) dann und nur dann richtig, wenn

$$\begin{cases}(\alpha_1 - \varrho)\lambda + \alpha_2\mu = 0, \\ \beta_1\lambda + (\beta_2 - \varrho)\mu = 0,\end{cases} \quad \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 = n \tag{7}$$

ist. Weil λ, μ, auf deren Verhältnis es nur ankommt, nicht beide Null sein sollen, muss demnach ϱ so gewählt werden, dass:

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 - \varrho & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 - \varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

wird. $\Delta(\varrho) = 0$ ist eine quadratische Gleichung für ϱ, die mindestens eine endliche Wurzel besitzt. Für jede Wurzel ϱ liefert (7) einen Wert des Verhältnisses $\lambda : \mu$. Bekanntlich ergiebt (7) unendlich viele Werte des Verhältnisses dann und nur dann, wenn alle Glieder der Determinante $\Delta(\varrho)$ verschwinden. Endlich gehören zu zwei verschiedenen Werten ϱ_1 und ϱ_2, die (8) erfüllen, auch verschiedene Werte des Verhältnisses $\lambda : \mu$.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Erledigung der einzelnen Fälle über, die möglich sind, wenn die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ zwei verschiedene Wurzeln besitzt:

Integrationsmeth. v. d'Alembert.

I. $\Delta(\varrho) = 0$ hat zwei von einander und von Null verschiedene Wurzeln ϱ_1, ϱ_2:

$$\varrho_1 \neq \varrho_2, \quad \varrho_1 \neq 0, \quad \varrho_2 \neq 0.$$

Dann verschwinden weder für ϱ_1 noch für ϱ_2 alle Glieder der Determinante $\Delta(\varrho)$. Zu jeder Wurzel bestimmen wir also das zugehörige Verhältnis $\lambda : \mu$. Es sei dies $\lambda_1 : \mu_1$ und $\lambda_2 : \mu_2$. Dann giebt die letzte Gleichung (7) jedesmal einen Wert n, etwa n_1 und n_2. Sei $\frac{n_1}{\varrho_1} = \nu_1$, $\frac{n_2}{\varrho_2} = \nu_2$, so ergeben sich also die Integralgleichungen:

$$\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 = e^{\varrho_1 t}(\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1),$$
$$\lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 + \nu_2 = e^{\varrho_2 t}(\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2).$$

Hiermit ist das Integrationsgeschäft erledigt. Wir bemerken, dass wir $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1$ und $\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2$ als neue Veränderliche x und y einführen können. Dann käme:

$$x_1 = e^{\varrho_1 t} x, \quad y_1 = e^{\varrho_2 t} y,$$

und

$$\frac{dx_1}{dt} = \varrho_1 x_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \varrho_2 y_1.$$

Uf würde also auf die Form $\varrho_1 xp + \varrho_2 yq$ reduciert sein, in der $\varrho_1 \neq \varrho_2$, $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_2 \neq 0$ ist. Bekanntlich lässt diese infinitesimale Transformation Uf *zwei* Geraden im Endlichen invariant (vgl. Fig. 8, § 3 des 3. Kap.). In der That sind — in den ursprünglichen Veränderlichen x, y:

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 = 0, \quad \lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2 = 0$$

diese Geraden, wie man sofort aus den Integralgleichungen sieht. Die d'Alembert'sche Methode läuft also darauf hinaus, die im Endlichen gelegenen, bei Uf invarianten Geraden zu finden.

II. $\Delta(\varrho) = 0$ hat zwei verschiedene Wurzeln, deren eine, ϱ, von Null verschieden, deren andere gleich Null ist. Zur ersteren Wurzel gehört ein bestimmtes Verhältnis $\lambda_1 : \mu_1$ und nach der letzten Gleichung (7) ein gewisses n_1. Setzen wir $\frac{n_1}{\varrho} = \nu_1$, so ergiebt sich als eine Integralgleichung diese:

$$\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 = e^{\varrho t}(\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1).$$

Zur zweiten Wurzel 0 von $\Delta(\varrho) = 0$ gehört auch ein gewisses Verhältnis $\lambda_2 : \mu_2$ und nach (7) ein gewisses n_2. Dann haben wir:

$$\frac{d(\lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1)}{dt} = n_2$$

oder integriert:

$$\lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 = \lambda_2 x + \mu_2 y + n_2 t. \tag{9}$$

Hiermit ist das Integrationsgeschäft beendet, denn wir haben zwei von einander unabhängige Integralgleichungen erhalten. Benutzen wir $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1$ und $\lambda_2 x + \mu_2 y$ als neue Veränderliche anstatt x, y, so nimmt offenbar Uf die Form $\varrho x p + n_2 q$ an, die sich, da $\varrho \neq 0$ ist, ohne Mühe auf einen der Typen $xp + q$ und xp reducieren lässt, je nachdem $n_2 \neq 0$ oder $= 0$ ist. Im ersteren Fall bleibt im Endlichen nur eine Gerade invariant (vgl. den Typus $p + yq$ in Fig. 8, § 3 des 3. Kap.), es ist dies in den ursprünglichen Veränderlichen die Gerade $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 = 0$. Dagegen stellt dann $\lambda_2 x + \mu_2 y = \text{Const.}$ ein invariantes Parallelenbüschel dar, dessen unendlich ferner Punkt der noch vorhandene zweite invariante Punkt ist. Im Falle $n_2 = 0$ bleibt (vgl. Typus yq in jener Fig. 8) eine einzelne Gerade $\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 = 0$ sowie jede Gerade des Parallelenbüschels $\lambda_2 x + \mu_2 y = \text{Const.}$ für sich invariant, wie aus (9) unmittelbar abzulesen ist.

Wenn die Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, so sind mehrere einzelne Fälle zu unterscheiden, die wir jetzt auch noch behandeln wollen:

III. $\Delta(\varrho) = 0$ hat eine Doppelwurzel $\varrho \neq 0$, und zwar sollen für diese Wurzel nicht alle Glieder von $\Delta(\varrho)$ verschwinden. Alsdann gehört zu ϱ ein Verhältnis $\lambda : \mu$ sowie ein gewisses n. Wir setzen wieder $\frac{n}{\varrho} = \nu$ und erhalten als eine Integralgleichung:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu = e^{\varrho t}(\lambda x + \mu y + \nu).$$

Nun benutzen wir $\lambda x + \mu y + \nu$ als die eine neue Variabele $\mathfrak{x}$ und irgend eine hiervon unabhängige lineare Function von x und y als die andere $\mathfrak{y}$. Alsdann nimmt das System (5) die Form an:

$$\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = \varrho \mathfrak{x}_1, \quad \frac{d\mathfrak{y}_1}{dt} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{b}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{c}.$$

Für die Determinante dieses Systems gelten dann dieselben Voraussetzungen wie für die des ursprünglichen Systems, da diese Voraussetzungen, wie wir sahen und fernerhin sehen werden, einen rein geometrischen Sinn haben. Die neue Determinante lautet:

$$\begin{vmatrix} \varrho - \varrho & 0 \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} - \varrho \end{vmatrix}.$$

Da nur eine Wurzel ϱ existieren soll, so ist mithin $\mathfrak{b} = \varrho$. Ferner ist $\mathfrak{a} \neq 0$, weil sonst alle Glieder der Determinante verschwänden. Die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{y}_1}{dt} = \mathfrak{a} e^{\varrho t}\mathfrak{x} + \varrho \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{c},$$

in der der Anfangswert $\mathfrak{x}$ die Rolle einer Constanten spielt, ist als lineare Gleichung leicht integrierbar. In $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ hat Uf jetzt die Form

$$\varrho \mathfrak{x} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + (\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \varrho \mathfrak{y} + \mathfrak{c}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}},$$

und diese Form ist wegen $\varrho \neq 0$, $\mathfrak{a} \neq 0$ leicht auf den Typus $xp + (x + y)q$ reducierbar. Bei diesem bleibt nach dem Früheren nur eine endliche Gerade in Ruhe, es ist dies in den ursprünglichen Veränderlichen die Gerade $\lambda x + \mu y + \nu = 0$. Es existiert ferner keine invariante Geradenschar, der diese Gerade nicht selbst angehört, sodass die Integration nicht weiter vereinfacht werden kann.

IV. $\Delta(\varrho) = 0$ hat eine Doppelwurzel $\varrho \neq 0$, und zwar sollen für diese alle Glieder von $\Delta(\varrho)$ verschwinden. Es ist hier also:

$$\alpha_1 = \varrho, \quad \beta_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \varrho$$

und das System (5) lautet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varrho x_1 + \gamma_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \varrho y_1 + \gamma_2.$$

Hier ergeben sich die Integralgleichungen:

$$x_1 + \frac{\gamma_1}{\varrho} = e^{\varrho t}\left(x + \frac{\gamma_1}{\varrho}\right), \quad y_1 + \frac{\gamma_2}{\varrho} = e^{\varrho t}\left(y + \frac{\gamma_2}{\varrho}\right),$$

und aus diesen folgt, dass jedes:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 + \frac{\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2}{\varrho} = e^{\varrho t}\left(\lambda x + \mu y + \frac{\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_1}{\varrho}\right)$$

wird. Es ist also jede Gerade der Schar:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \text{Const.}$$

invariant. Dies deckt sich damit, dass Uf die Form $(\varrho x + \gamma_1)p + (\varrho y + \gamma_2)q$ hat, die sich ohne weiteres auf $xp + yq$ zurückführen lässt, da $\varrho \neq 0$ ist. (Vgl. Fig. 8, § 3 des 3. Kap.)

V. $\Delta(\varrho) = 0$ hat die Doppelwurzel 0, für die nicht alle Glieder von $\Delta(\varrho)$ verschwinden. Dann gehört zu diesem $\varrho = 0$ ein System von Verhältnissen von λ, μ, n und wir erhalten:

$$\frac{d(\lambda x_1 + \mu y_1)}{dt} = n,$$

d. h. als Integralgleichung:

$$\lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda x + \mu y + nt.$$

Ist $n \neq 0$, so sagt dies aus, dass wir eine invariante Parallelenschar $\lambda x + \mu y = \text{Const.}$ oder einen unendlich fernen invarianten Punkt, aber keine einzeln invariante Gerade im Endlichen haben. Ist $n = 0$, so sagt die Gleichung dagegen aus, dass jede Gerade $\lambda x + \mu y = \text{Const.}$ für sich invariant ist. In beiden Fällen benutzen wir $\lambda x + \mu y$ als neues $\mathfrak{x}$ und eine hiervon unabhängige lineare Function von x und y als neues $\mathfrak{y}$, sodass das System die Form annimmt:

$$\frac{d\mathfrak{x}_1}{dt} = n, \quad \frac{d\mathfrak{y}_1}{dt} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{b}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{c}.$$

Hier ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} -\varrho & 0 \\ \mathfrak{a} & \mathfrak{b} - \varrho \end{vmatrix}.$$

Sie soll, gleich Null gesetzt, nur die Wurzel $\varrho = 0$ haben. Also ist $\mathfrak{b} = 0$.

Für $\varrho = 0$ würden alle Glieder verschwinden, wenn nicht $\mathfrak{a} \neq 0$ wäre. In der neuen Form lautet Uf:

$$n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + (\mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{c}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

und ist, da $\mathfrak{a} \neq 0$ ist, auf die Form $p + xq$ oder xq reducierbar, je nachdem $n \neq 0$ oder $n = 0$ ist. Die bei diesen Typen invarianten Figuren entsprechen in der That den oben gemachten Bemerkungen. In beiden Fällen ist die Integration der Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{y}_1}{dt} = \mathfrak{a}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{x} + nt) + \mathfrak{c}$$

ohne weiteres zu leisten.

VI. $\varDelta(\varrho) = 0$ hat die Doppelwurzel $\varrho = 0$, für die alle Glieder der Determinante verschwinden. Hier ist also $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ und das System lautet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \gamma_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = \gamma_2.$$

Es ist sofort integriert:

$$x_1 = x + \gamma_1 t, \quad y_1 = y + \gamma_2 t.$$

Hier kommt also

$$\gamma_2 x_1 - \gamma_1 y_1 = \gamma_2 x - \gamma_1 y,$$

d. h. jede Gerade $\gamma_2 x_1 - \gamma_1 y_1 = \text{Const.}$ ist invariant. Uf hat die Form $\gamma_1 p + \gamma_2 q$ und ist sofort auf den Typus q reducibel.

Wie man sieht, sind bei der d'Alembert'schen Methode genau die Fälle zu unterscheiden, die den Typen von infinitesimalen linearen Transformationen entsprechen. Die Methode besteht eben im wesentlichen darin, dass man die bei Uf invarianten Geraden und Geradenscharen aufsucht.

§ 2. Die specielle lineare Gruppe.

In Satz 2 des vorigen Paragraphen bemerkten wir, dass die lineare Transformation, die der Aufeinanderfolge zweier linearer Transformationen mit den Determinanten $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ äquivalent ist, die Determinante $\varDelta_1 \varDelta_2$ besitzt. Sind $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ beide gleich 1, so ist also auch die neue Determinante gleich 1.

Die Aufeinanderfolge zweier linearer Transformationen mit der Determinante 1 ist mithin wieder einer linearen Transformation mit der Determinante 1 äquivalent.

Ist S eine lineare Transformation mit der Determinante 1 und S^{-1} die zu ihr inverse, so ist

$$SS^{-1} = 1.$$

Wenn also S^{-1} etwa die Determinante D hat, so kommt, da die identische Transformation die Determinante 1 besitzt:

$$1 \cdot D = 1,$$

d. h. $D = 1$. Die zu einer linearen Transformation mit der Determinante 1 inverse lineare Transformation besitzt somit ebenfalls die Determinante 1.

Aus diesen Bemerkungen folgt:

Specielle lineare Gruppe.

Satz 7: *Alle linearen Transformationen mit der Determinante* 1 *bilden eine Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Wir nennen sie die *specielle lineare Gruppe.* Ihre allgemeinen Gleichungen lauten:

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2,$$

doch sind die sechs Coefficienten an die Relation gebunden:

$$\Delta \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1.$$

Die Gruppe enthält folglich nur fünf wesentliche Constanten, sie ist *fünfgliedrig* und also eine *fünfgliedrige Untergruppe* der allgemeinen linearen Gruppe und auch der allgemeinen projectiven Gruppe.

Inf. Transformation derselben.

Ihre identische Transformation geht hervor, wenn $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = c_1 = c_2 = 0$ gesetzt wird, ihre allgemeine infinitesimale also dadurch, dass wir setzen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \alpha_1 \delta t, & b_1 &= \beta_1 \delta t, & c_1 &= \gamma_1 \delta t \\ a_2 &= \alpha_2 \delta t, & b_2 &= 1 + \beta_2 \delta t, & c_2 &= \gamma_2 \delta t. \end{aligned}$$

Dann kommt wie früher:

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) p + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) q.$$

Doch soll $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ sein, also:

$$\begin{vmatrix} 1 + \alpha_1 \delta t & \beta_1 \delta t \\ \alpha_2 \delta t & 1 + \beta_2 \delta t \end{vmatrix} = 1.$$

Dies liefert, da wir nur die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung zu berücksichtigen brauchen:

$$1 + (\alpha_1 + \beta_2) \delta t = 1,$$

also:

$$\beta_2 = -\alpha_1,$$

sodass kommt:

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1) p + (\alpha_2 x - \alpha_1 y + \gamma_2) q.$$

Hierin sind α_1, β_1, γ_1, α_2, γ_2 völlig willkürlich. Also:

Satz 8: *Die allgemeinste infinitesimale Transformation der speciellen linearen Gruppe ist linear ableitbar aus den fünf von einander unabhängigen:*

$$p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp.$$

Bezeichnen wir diese der Reihe nach mit $U_1 f \cdot\cdot U_5 f$, so bemerken wir, dass jedes $(U_i U_k)$ wieder aus $U_1 f \cdot\cdot U_5 f$ linear ableitbar ist. Auf diese Bemerkung kommen wir später zurück.

Endliche spec. lineare Transform., erzeugt von einer infinit.

Unsere Gruppe enthält ∞^4 infinitesimale Transformationen (da Uf und Const. Uf als identisch betrachtet werden). Jede derselben erzeugt eine eingliedrige Gruppe von ∞^1 endlichen linearen Transformationen. Es steht zu vermuten, dass diese endlichen Transformationen der speciellen linearen Gruppe angehören.

Um dies zu beweisen, kehren wir auf einen Augenblick zu einigen Formeln des vorigen Paragraphen zurück. Wir fanden dort, dass die in den endlichen Gleichungen

$$x_1 = a_1x + b_1y + c_1, \quad y_1 = a_2x + b_2y + c_2$$

der eingliedrigen Gruppe

$$Uf \equiv (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)p + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)q$$

auftretenden Functionen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 von t den Gleichungen (4) genügen. Nach denselben ist nun:

$$\frac{d\varDelta}{dt} \equiv \frac{d(a_1b_2 - a_2b_1)}{dt} = a_1(\alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2) + b_2(\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2) - $$
$$- a_2(\alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2) - b_1(\alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2)$$
$$= (\beta_2 + \alpha_1)(a_1b_2 - a_2b_1) = (\alpha_1 + \beta_2)\varDelta,$$

also, wenn integriert und dabei bedacht wird, dass sich für $t = 0$ a_1, b_1, a_2, b_2 bez. auf 1, 0, 0, 1, also $\varDelta$ auf 1 reduciert:

$$\varDelta = e^{(\alpha_1 + \beta_2)t}.$$

Gehört nun Uf der speciellen linearen Gruppe an, d. h. ist $\alpha_1 + \beta_2 = 0$, so kommt $\varDelta = 1$. Jede endliche Transformation der eingliedrigen Gruppe Uf hat dann also die Determinante 1.

Satz 9: *Die von einer infinitesimalen Transformation der speciellen linearen Gruppe erzeugte eingliedrige Gruppe besteht aus Transformationen der speciellen linearen Gruppe.*

Da, wie in § 1 bewiesen wurde, *jede* endliche lineare Transformation von einer infinitesimalen linearen Transformation erzeugt wird, so können wir diesen Satz erweitern zu dem

Specielle lin. Gruppe, erzeugt von inf. Transf.

Theorem 9: *Die ∞^4 infinitesimalen Transformationen der speciellen linearen Gruppe der Ebene erzeugen diese fünfgliedrige Gruppe. Dieselbe zerfällt dementsprechend in ∞^4 eingliedrige Untergruppen, und jede endliche lineare Transformation mit der Determinante Eins gehört einer oder einer discreten Anzahl derselben an.*

Wir könnten hier wie in § 1 die innerhalb der speciellen linearen Gruppe gleichberechtigten, d. h. durch eine lineare Transformation mit der Determinante Eins in einander überführbaren eingliedrigen Gruppen auf typische Formen zurückführen. Wir wollen uns jedoch statt dessen

ein anderes Problem stellen, zu dem wir im Bisherigen noch kein Analogon gegeben haben.

Zunächst bemerken wir, dass eine lineare Transformation

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 \tag{10}$$

wie jede andere Transformation gleichzeitig *alle* Punkte der Ebene in neue Lagen überführt. Wir greifen irgend drei Punkte (x, y), (x', y'), (x'', y'') heraus, die bei der linearen Transformation (10) etwa in die Lagen (x_1, y_1), (x_1', y_1'), (x_1'', y_1'') übergehen mögen. Dann ist:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1, & y_1 &= a_2 x + b_2 y + c_2,\\
x_1' &= a_1 x' + b_1 y' + c_1, & y_1' &= a_2 x' + b_2 y' + c_2,\\
x_1'' &= a_1 x'' + b_1 y'' + c_1, & y_1'' &= a_2 x'' + b_2 y'' + c_2,
\end{aligned}$$

also nach dem Multiplicationsgesetze der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1' & x_1'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

oder:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1' & x_1'' \\ y_1 & y_1' & y_1'' \end{vmatrix} = \varDelta \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix},$$

wenn $a_1 b_2 - a_2 b_1$ wie früher mit $\varDelta$ bezeichnet wird. Die Function

$$J \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{vmatrix}$$

der Coordinaten der drei ursprünglichen Punkte geht also vermöge der Transformation mit der Determinante $\varDelta$ in die entsprechende Function der Coordinaten der neuen Punkte, die wir J_1 nennen, über, aber noch multipliciert mit $\varDelta$:

$$J_1 = \varDelta \cdot J.$$

Deuten wir dies geometrisch. J ist bekanntlich der doppelte Inhalt des von den drei ursprünglichen Punkten gebildeten Dreiecks, J_1 entsprechend der doppelte Inhalt des von den transformierten Punkten gebildeten Dreiecks oder kurz des transformierten Dreiecks (indem die Seiten des ersten Dreiecks genau in die des neuen Dreiecks übergehen). Also ändert die lineare Transformation (10) den Inhalt aller Dreiecke nach constantem, durch $\varDelta$ gemessenem Verhältnisse. Ist insbesondere $\varDelta = 1$, so ist $J_1 = J$.

Da jedes Flächenstück aus Dreiecken zusammengesetzt werden kann, so hat sich ergeben:

Transformation der Flächeninhalte.

Satz 10: *Eine lineare Transformation mit der Determinante Δ ändert alle Flächeninhalte in dem constanten Verhältnis $\Delta : 1$. Eine specielle lineare Transformation lässt alle Flächeninhalte ungeändert.*

Man kann sich fragen, welche projectiven Transformationen überhaupt die Flächeninhalte nach constantem Verhältnis ändern. Ohne auf die analytische Ableitung einzugehen, begnügen wir uns mit einer geometrischen Überlegung: Eine projective Transformation, die eine im Endlichen gelegene Gerade in die unendlich ferne überführt, verwandelt gewisse Dreiecke offenbar in unendlich grosse. Demnach muss die gesuchte Transformation die unendlich ferne Gerade in sich überführen, also linear sein. Daher:

Satz 11: *Die allgemeine lineare Gruppe besteht aus allen projectiven Transformationen, welche die Flächeninhalte nach irgend einem constanten Verhältnis ändern, die specielle lineare Gruppe insbesondere aus allen, welche diese Inhalte ungeändert lassen*).*

Der doppelte Flächeninhalt J ist eine Function der Coordinaten dreier Punkte. Er bleibt bei *jeder* Transformation der speciellen linearen Gruppe invariant, und wir sagen daher, die Function J ist eine *Invariante der speciellen linearen Gruppe.*

Invariante.

Fragen wir nach allen Functionen $\varphi(x, y, x', y', x'', y'')$ der sechs Coordinaten, welche bei allen Transformationen der speciellen linearen Gruppe invariant bleiben, d. h. für welche vermöge jeder speciellen linearen Transformation

$$\varphi(x_1, y_1, x_1', y_1', x_1'', y_1'') = \varphi(x, y, x', y', x'', y'')$$

ist. Eine solche Function müsste zunächst bei der allgemeinen infinitesimalen Transformation

$$Uf \equiv ap + bq + cxq + d(xp - yq) + eyp$$

der speciellen linearen Gruppe ungeändert bleiben. Diese aber erteilt x, y die Incremente:

$$\delta x \equiv (a + dx + ey)\delta t, \quad \delta y \equiv (b + cx - dy)\delta t$$

und analog x', y' die Incremente:

$$\delta x' \equiv (a + dx' + ey')\delta t, \quad \delta y' \equiv (b + cx' - dy')\delta t$$

und endlich x'', y'' diese:

$$\delta x'' \equiv (a + dx'' + ey'')\delta t, \quad \delta y'' \equiv (b + cx'' - dy'')\delta t,$$

also auch φ den Zuwachs, wenn wir ihn durch δt dividieren:

---

*) Vgl. hierzu „Diffgln. m. inf. Trf.“ Kap. 4, § 4.

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{\delta\varphi}{\delta t} \equiv (a + dx + ey)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (b + cx - dy)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \\ \quad + (a + dx' + ey')\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + (b + cx' - dy')\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + \\ \quad + (a + dx'' + ey'')\frac{\partial\varphi}{\partial x''} + (b + cx'' - dy'')\frac{\partial\varphi}{\partial y''}. \end{cases}$$

Dieser soll Null sein, wie auch a, b, c, d, e gewählt sein mögen. Es soll also einzeln sein:

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \frac{\partial\varphi}{\partial x''} = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} + \frac{\partial\varphi}{\partial y''} = 0, \\ x\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} + x''\frac{\partial\varphi}{\partial y''} = 0, \\ x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + x''\frac{\partial\varphi}{\partial x''} - y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - y''\frac{\partial\varphi}{\partial y''} = 0, \\ y\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + y''\frac{\partial\varphi}{\partial x''} = 0. \end{cases}$$

Offenbar sind die linken Seiten nichts anderes als die durch δt dividierten Incremente, welche φ bei den fünf einzelnen infinitesimalen Transformationen p, q, xq, $xp - yq$, yp erfährt, aus denen sich bekanntlich Uf linear ableiten lässt.

Aus einem allgemeinen Satz über vollständige Systeme von linearen homogenen Differentialgleichungen, auf den wir hier nicht eingehen wollen, folgt ohne weiteres, dass es eine Function φ giebt, welche die Forderungen (12) erfüllt, und dass jede andere Function φ, welche (12) genügt, eine Function dieser einen allein ist. Nun aber wissen wir, dass J eine Function ist, die sicher die Gleichungen (12) erfüllt. Daher ist jede Function der Coordinaten dreier Punkte, welche bei allen infinitesimalen Transformationen der speciellen linearen Gruppe invariant bleibt, eine Function des Flächeninhaltes des Dreieckes der drei Punkte. Offenbar ist jede solche Function auch bei jeder endlichen speciellen linearen Transformation invariant.

Übrigens bemerken wir, dass das System (12) ohne Mühe integriert werden kann. Nach den beiden ersten Gleichungen enthält φ nur $x - x'$, $x - x''$, $y - y'$, $y - y''$. Führt man diese Differenzen als Veränderliche ein, so nehmen die drei letzten Gleichungen sehr einfache Formen an. Die zweite derselben ergiebt, dass φ eine Function von $(x - x')(y - y')$, $(x - x'')(y - y'')$ und $(x - x')(y - y'') - (x - x'')(y - y')$ allein ist, während darauf die beiden noch übrigen zeigen, dass φ nur die letzte dieser drei Grössen, die nichts anderes als J ist, enthält. Der Leser möge die genaue Ausrechnung selbst durchführen.

§ 3. Die Gruppe der Bewegungen.

Die in § 1 und § 2 betrachteten Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene waren dadurch charakterisiert, dass sie alle Flächeninhalte proportional änderten bez. ungeändert liessen. Wir wollen nunmehr alle projectiven Transformationen ins Auge fassen, welche die Entfernungen je zweier Punkte invariant lassen, also zwei Punkte stets in gleichweit von einander entfernte neue Punkte überführen. Offenbar kann eine solche projective Transformation keine im Endlichen gelegenen Punkte ins Unendlichferne transformieren, denn sonst würden gewisse Strecken unendlich gross. Sie muss also *linear* sein. Die lineare Transformation

Projective Transform., welche die Entfernungen invariant lassen.

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2$$

führt nun den Punkt (x, y) in den Punkt (x_1, y_1) über und ferner der Punkt (x', y') etwa in den Punkt (x_1', y_1'). Alsdann ist:

$$x_1' = a_1 x' + b_1 y' + c_1, \quad y_1' = a_2 x' + b_2 y' + c_2.$$

Das Quadrat des Abstandes der beiden transformierten Punkte von einander ist also:

$$(x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 = [a_1(x - x') + b_1(y - y')]^2 + \\ + [a_2(x - x') + b_2(y - y')]^2.$$

Es soll gleich dem Quadrat der Entfernung der ursprünglichen Punkte von einander, d. h. gleich

$$(x - x')^2 + (y - y')^2$$

sein und zwar für alle Werte der Coordinaten x, y, x', y'. Es muss daher notwendig:

$$a_1^2 + a_2^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

sein. Die beiden ersten Gleichungen werden in allgemeinster Weise dadurch befriedigt, dass wir setzen:

$$a_1 = \cos\alpha, \quad a_2 = \sin\alpha, \quad b_1 = \cos\beta, \quad b_2 = \sin\beta.$$

Alsdann giebt die dritte:

$$\cos(\alpha - \beta) = 0,$$

d. h.

$$\beta = \alpha + (2\varkappa + 1)\frac{\pi}{2}.$$

Hierin bedeutet $\varkappa$ eine positive oder negative ganze Zahl. Mithin ist nun:

$$b_1 = (-1)^{\varkappa+1}\sin\alpha, \quad b_2 = (-1)^{\varkappa}\cos\alpha.$$

Also haben wir entweder zu setzen:

$$a_1 = \cos\alpha, \qquad a_2 = \sin\alpha,$$
$$b_1 = -\sin\alpha, \quad b_2 = \cos\alpha$$

oder

$$a_1 = \cos\alpha, \qquad a_2 = \sin\alpha,$$
$$b_1 = \sin\alpha, \qquad b_2 = -\cos\alpha.$$

Bezeichnen wir noch c_1 und c_2 mit a und b, so lautet unsere gesuchte Transformation im ersten Falle:

$$(13) \quad x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b$$

und im zweiten:

$$(13') \quad x_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha + a, \quad y_1 = x\sin\alpha - y\cos\alpha + b.$$

Zwei Scharen derselben.

Es giebt also zwei Scharen von projectiven Transformationen, welche alle Entfernungen ungeändert lassen, nämlich die Schar (13) und die Schar (13′). Offenbar bilden alle derartigen Transformationen eine *Gruppe*, denn führt man nach einander zwei solche Transformationen aus, so werden die Entfernungen nicht geändert, die der Aufeinanderfolge äquivalente projective Transformation lässt demnach auch die Entfernungen invariant und gehört der Gesamtheit jener Transformationen an. Auch enthält diese Gruppe zu jeder ihrer Transformationen die inverse, denn die durch Auflösung von (13) oder (13′) entstehende Transformation hat wieder die Form (13) bez. (13′).

Nicht-continuierliche Gruppe.

Wir nennen jedoch diese Gruppe *nicht-continuierlich*, weil sie aus zwei getrennten continuierlichen Scharen von Transformationen besteht. Denn die beiden Schaaren (13) und (13′) haben einen verschiedenen analytischen Ausdruck.

Unmittelbarer tritt dies hervor, wenn man die Gleichungen (13) und (13′) geometrisch deutet. Man kann die durch (13) vermittelte Transformation offenbar dadurch herstellen, dass man die ganze starr gedachte Ebene um den Winkel α um den Punkt (a, b) in positivem Sinne dreht. Die Transformation (13) kann also durch eine Rotation der Ebene in sich hergestellt werden. Nicht so (13′). Hier werden wir zunächst die ganze Ebene etwa um die x-Axe umgeklappt denken, wodurch y in $-y$, also (13′) in:

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b$$

übergeht. Alsdann wird eine Rotation um den Punkt (a, b) mit dem Drehwinkel α die Überführung in die neuen Punkte (x_1, y_1) beenden. Jede Transformation (13′) kann somit als eine Umklappung und darauf folgende Rotation aufgefasst werden. Eine Transformation (13) verwandelt alle Figuren in der Ebene in *congruente*, eine Transformation (13′) in *symmetrische*.

Wir wollen nun nur diejenigen unserer Transformationen betrachten, welche keine Umklappung der Ebene bewirken, also nur die Transformationen (13). Auch diese bilden für sich eine Gruppe, denn aus den beiden Transformationen

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a,\quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b$$

und

$$x_2 = x_1\cos\alpha_1 - y_1\sin\alpha_1 + a_1,\quad y_2 = x_1\sin\alpha_1 + y_1\cos\alpha_1 + b_1$$

folgt durch Elimination von x_1 und y_1:

$$x_2 = x\cos(\alpha+\alpha_1) - y\sin(\alpha+\alpha_1) + a + a_1,$$
$$y_2 = x\sin(\alpha+\alpha_1) + y\cos(\alpha+\alpha_1) + b + b_1,$$

also wieder eine solche Transformation. Ferner ist die zur Transformation (13) inverse wieder von der Form (13). Es stellt also (13) *eine continuierliche Gruppe mit paarweis inversen Transformationen* dar.

Continuierl. Gruppe.

Jede Transformation, welche alle Strecken in gleich grosse Strecken verwandelt, führt natürlich eine beliebige Figur in eine ihr congruente oder zu ihr symmetrische über. Im ersteren Falle können wir die Transformation dadurch herstellen, dass wir eine Strecke nach ihrer neuen Lage führen und uns die ganze Ebene starr mit dieser Strecke verbunden denken. Jede solche Transformation heisst eine *Bewegung der Ebene in sich.* Der Begriff „Bewegung" ist also in seiner scharfen Bedeutung dem Begriff „Transformation" untergeordnet. Entsprechend nennen wir die Gruppe (13) die *Gruppe der Bewegungen der Ebene in sich.*

Bewegung.

Gruppe der Bewegungen.

Zwei Transformationen (13) stimmen nur dann überein, wenn in beiden α, a, b dieselben Werte haben. Alle *drei* Parameter α, a, b sind deshalb *wesentlich:* Es giebt ∞^3 Bewegungen der Ebene in sich, die Gruppe ist *dreigliedrig.* Da die Gruppe zu jeder ihrer Transformationen die inverse enthält und die Aufeinanderfolge beider einerseits der Gruppe angehören muss, andererseits die identische Transformation ist, so folgt, dass es Werte der Constanten α, a, b geben muss, für welche sich die Gleichungen (13) auf $x_1 = x$, $y_1 = y$ reducieren. In der That sind dies die Werte $\alpha = 2\varkappa\pi$, $a = b = 0$. $\varkappa$ bedeutet hier irgend eine positive oder negative ganze Zahl.

In allgemeinster Weise erhalten wir demnach eine infinitesimale Transformation der Gruppe, wenn wir

$$\alpha = 2\varkappa\pi + \lambda\delta t,\quad a = \mu\delta t,\quad b = \nu\delta t$$

setzen. Dann kommt, da

$$\sin(2\varkappa\pi + \lambda\delta t) = \sin\lambda\delta t = \frac{\lambda\delta t}{1} - \frac{\lambda^3\delta t^3}{1\cdot2\cdot3} + \cdots,$$

$$\cos(2\varkappa\pi + \lambda\delta t) = \cos\lambda\delta t = 1 - \frac{\lambda^2\delta t^2}{1\cdot2} + \cdots$$

ist:

$$\delta x \equiv x_1 - x = x\left(-\frac{\lambda^2\delta t^2}{1\cdot 2} + \cdots\right) - y\left(\frac{\lambda\delta t}{1} - \cdots\right) + \mu\delta t,$$

$$\delta y \equiv y_1 - y = x\left(\frac{\lambda\delta t}{1} - \cdots\right) + y\left(-\frac{\lambda^2\delta t^2}{1\cdot 2} + \cdots\right) + \nu\delta t.$$

Setzt man hierin die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung gleich Null, d. h. $\lambda = \mu = \nu = 0$, so verschwinden alle Glieder rechts. Es kommen also in beiden Entwickelungen, sobald sie nicht ganz verschwinden, nicht verschwindende Glieder *erster* Ordnung vor. Diesen gegenüber sind die von höherer Ordnung zu vernachlässigen. Es kommt also:

$$\delta x = (-\lambda y + \mu)\delta t, \quad \delta y = (\lambda x + \nu)\delta t.$$

Daher lautet die allgemeinste infinitesimale Bewegung:

Infinitesim. Bewegung.

$$(-\lambda y + \mu)p + (\lambda x + \nu)q$$

oder

$$Uf \equiv \lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q.$$

Sie ist linear ableitbar aus den drei von einander unabhängigen infinitesimalen Bewegungen

$$p, \quad q, \quad xq - yp.$$

Bezeichnet man diese mit U_1f, U_2f, U_3f, so ist

$$(U_1 U_2) \equiv 0, \quad (U_1 U_3) \equiv U_2 f, \quad (U_2 U_3) \equiv - U_1 f.$$

Die Klammerausdrücke sind also wieder infinitesimale Bewegungen, was wir hier anmerken, um später darauf zurückzukommen.

Jede der ∞^3 infinitesimalen Bewegungen

$$Uf \equiv \lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q$$

erzeugt nun eine eingliedrige Gruppe von ∞^1 endlichen projectiven Transformationen. Dass auch diese Bewegungen sind, ist leicht einzusehen. Denn man braucht nur zu zeigen, dass die Integralgleichungen des simultanen Systems

Infinitesim. Bewegung als Erzeuger endl. Bewegungen.

$$\frac{dx_1}{-\lambda y_1 + \mu} = \frac{dy_1}{\lambda x_1 + \nu} = dt,$$

welche die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Uf sind, die Form

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b$$

besitzen, in der α, a, b gewisse Functionen von t bedeuten. Offenbar sind α, a, b als solche Functionen von t zu wählen, welche den Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{dt} = (-x\sin\alpha - y\cos\alpha)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{da}{dt} = -\lambda(x\sin\alpha + y\cos\alpha + b) + \mu$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (\ \ x\cos\alpha - y\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{db}{dt} = \ \ \lambda(x\cos\alpha - y\sin\alpha + a) + \nu$$

oder also den drei Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \lambda, \quad \frac{da}{dt} = -\lambda b + \mu, \quad \frac{db}{dt} = \lambda a + \nu$$

genügen und sich für $t = 0$ bez. auf $2\varkappa\pi$, 0, 0 reducieren. Die erste dieser drei Gleichungen aber giebt integriert:

$$\alpha = 2\varkappa\pi + \lambda t,$$

während aus der zweiten und dritten folgt:

$$\frac{d(\lambda a + \nu)}{dt} = -\lambda(\lambda b - \mu), \quad \frac{d(\lambda b - \mu)}{dt} = \lambda(\lambda a + \nu).$$

Diese Gleichungen aber geben integriert, da sich $\lambda a + \nu$ für $t = 0$ auf ν, $\lambda b - \mu$ auf $-\mu$ reducieren soll:

$$\lambda a + \nu = \nu \cos \lambda t + \mu \sin \lambda t,$$
$$\lambda b - \mu = \nu \sin \lambda t - \mu \cos \lambda t,$$

sodass wir erhalten:

$$\alpha = 2\varkappa\pi + \lambda t,$$
$$a = -\frac{\nu}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(\nu \cos \lambda t + \mu \sin \lambda t),$$
$$b = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(\nu \sin \lambda t - \mu \cos \lambda t).$$

Die von

$$(14) \qquad Uf \equiv \lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q$$

oder, wenn $\frac{\mu}{\lambda}$ und $\frac{\nu}{\lambda}$ mit m und n bezeichnet werden, die von

$$(14') \qquad Uf \equiv xq - yp + mp + nq$$

erzeugte endliche Gruppe von Bewegungen lautet mithin:

$$(15) \qquad \begin{cases} x_1 = \left(x + \frac{\nu}{\lambda}\right) \cos \lambda t - \left(y - \frac{\mu}{\lambda}\right) \sin \lambda t - \frac{\nu}{\lambda}, \\ y_1 = \left(x + \frac{\nu}{\lambda}\right) \sin \lambda t + \left(y - \frac{\mu}{\lambda}\right) \cos \lambda t + \frac{\mu}{\lambda}. \end{cases}$$

Rotation.

Es sind dies die Rotationen um den Punkt mit den Coordinaten $-\frac{\nu}{\lambda}$, $+\frac{\mu}{\lambda}$, was noch deutlicher hervortritt, wenn wir die Gleichungen (15), indem wir λt als Parameter t benutzen, so schreiben:

$$(15') \qquad \begin{cases} x_1 + n = (x + n) \cos t - (y - m) \sin t, \\ y_1 - m = (x + n) \sin t + (y - m) \cos t. \end{cases}$$

Hierbei wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass $\lambda \neq 0$ sei. Ist $\lambda = 0$, so ist Uf die Translation

$$(16) \qquad Uf \equiv \mu p + \nu q,$$

Translation.

welche die eingliedrige Gruppe von *Translationen:*

(17) $$x_1 = x + \mu t, \quad y_1 = y + \nu t$$

erzeugt, die auch Bewegungen sind.

Endliche Bewegung erzeugt von inf. Beweg.

Satz 12: *Jede infinitesimale Bewegung erzeugt eine eingliedrige Gruppe von Bewegungen. Diese besteht entweder aus allen Rotationen um einen festen Punkt oder aus allen Translationen längs einer festen Richtung.*

Es liegt nahe, die Translationen als Rotationen um einen unendlich fernen Punkt aufzufassen.

Liegt nun umgekehrt irgend eine Bewegung (13) vor, so gehört sie sicher einer dieser eingliedrigen Gruppen an. Dies erhellt daraus, dass sie in der Form (15′) oder (17) geschrieben werden kann. Ist $\alpha \neq 2\varkappa\pi$, so hat man zu dem Zwecke nur m und n zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$n \cos \alpha + m \sin \alpha - n = a,$$
$$n \sin \alpha - m \cos \alpha + m = b,$$

was immer möglich ist. Wenn $\alpha = 2\varkappa\pi$ ist, so hat (13) unmittelbar die Form (17).

Satz 13: *Jede endliche Bewegung wird entweder von einer infinitesimalen Rotation oder von einer infinitesimalen Translation erzeugt.*

Es ist klar, dass jede Bewegung der Ebene als Rotation oder Translation aufgefasst werden kann. Wegen der Gruppeneigenschaft fliesst hieraus das Ergebnis:

Satz 14: *Die Aufeinanderfolge zweier Rotationen oder Translationen ist einer einzigen Rotation oder Translation äquivalent.*

Dies lässt sich übrigens auch geometrisch ohne Mühe einsehen.

Die Bahncurven einer eingliedrigen Gruppe von Bewegungen sind concentrische Kreise oder parallele Geraden.

Innerhalb der Gruppe der Bewegungen gleichber. eingl. Untergruppen.

Gleichberechtigt innerhalb der Gruppe aller Bewegungen werden wir zwei eingliedrige Gruppen von Bewegungen dann nennen, wenn sie durch eine Bewegung in einander übergeführt werden können. Nach Satz 9 in § 2 des 3. Kap. wird jede Rotation, jede Bewegung also, die einen Punkt in Ruhe lässt, durch eine Bewegung wieder in eine Rotation übergeführt. Mithin ergiebt sich, da es stets Bewegungen giebt, welche einen bestimmten Punkt in einen anderen bestimmten Punkt verwandeln, dass alle eingliedrigen Gruppen von Rotationen mit einander, also auch etwa mit der der Rotationen um den Anfangspunkt

$$\boxed{xq - yp}$$

gleichberechtigt sind, und dass die eingliedrigen Gruppen von Trans-

lationen für sich eine Schar gleichberechtigter eingliedriger Gruppen bilden, als deren Typus gewählt werden kann:

$$\boxed{q}.$$

Theorem 10: *Die Gruppe aller Bewegungen der Ebene zerfällt in ∞^2 eingliedrige Untergruppen, und jede endliche Bewegung gehört einer derselben an. Jede der ∞^2 eingliedrigen Untergruppen ist vermöge einer Bewegung überführbar in einen der Typen:*

$$xq - yp, \quad q.$$

Invariante. Invariante zweier Punkte

Wir wollen schliesslich hier, wie in § 2 bei der speciellen linearen Gruppe, gewisse bei allen Bewegungen *invariante Functionen* aufsuchen: Es seien (x, y) und (x', y') zwei beliebige Punkte. Durch irgend eine Bewegung der Ebene werden sie etwa in die Punkte (x_1, y_1) und (x_1', y_1') übergeführt. Fragen wir uns, welche Functionen φ von x, y, x', y' bei *allen* Bewegungen ungeändert bleiben, also die Bedingung erfüllen:

$$\varphi(x_1, y_1, x_1', y_1') = \varphi(x, y, x', y').$$

Eine solche Function muss insbesondere bei der allgemeinen infinitesimalen Bewegung

$$Uf \equiv \lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q$$

ungeändert bleiben. Diese erteilt x, y die Incremente

$$\delta x = (-\lambda y + \mu)\delta t, \quad \delta y = (\lambda x + \nu)\delta t$$

und analog x', y' diese:

$$\delta x' = (-\lambda y' + \mu)\delta t, \quad \delta y' = (\lambda x' + \nu)\delta t.$$

φ erfährt also den durch δt dividierten Zuwachs:

$$U\varphi \equiv \frac{\delta\varphi}{\delta t} = (-\lambda y + \mu)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\lambda x + \nu)\frac{\partial\varphi}{\partial y} +$$
$$+ (-\lambda y' + \mu)\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + (\lambda x' + \nu)\frac{\partial\varphi}{\partial y'}.$$

Er soll Null sein für alle Uf, d. h. für alle Werte der Constanten λ, μ, ν. Demnach soll einzeln sein:

$$-y\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y'\frac{\partial\varphi}{\partial x'} + x'\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x'} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0.$$

Offenbar sind die linken Seiten nichts anderes als die durch δt divi-

dierten Incremente, welche φ bei den drei von einander unabhängigen infinitesimalen Bewegungen $xq - yp$, p, q erfährt, aus denen Uf linear ableitbar ist. Das Verschwinden dieser drei Incremente zieht das Verschwinden des allgemeinen Incrementes $U\varphi\delta t$ nach sich.

Wir haben hier drei Gleichungen für φ mit vier Veränderlichen. Sie bilden ein sogenanntes vollständiges System, und aus der Theorie der vollständigen Systeme ist unmittelbar zu entnehmen, dass alle Functionen φ, welche diese drei Gleichungen erfüllen, dargestellt werden können als Functionen einer einzigen derselben. Nun aber wissen wir, dass der Abstand zweier Punkte eine Invariante ist. Mithin ist jede Lösung φ dieser Gleichungen eine Function von

$$(x - x')^2 + (y - y')^2$$

allein. Der Leser möge dies durch directe Integration der drei Gleichungen verificieren: Nach den beiden letzten Gleichungen enthält φ nur $x - x'$ und $y - y'$. Führt man diese als Veränderliche ein, so wird die erste Gleichung sehr einfach.

Wir sagen daher:

Satz 15: *Zwei Punkte besitzen bei der Gruppe aller Bewegungen der Ebene nur eine Invariante, nämlich ihren gegenseitigen Abstand.*

Invariante dreier Punkte.

Ähnlich kann man fragen, welche Functionen φ der Coordinaten dreier Punkte (x, y), (x', y'), (x'', y'') bei allen Bewegungen invariant bleiben. Indem man wieder fordert, dass φ bei der allgemeinen infinitesimalen Bewegung Uf ungeändert bleibe, gelangt man zu drei Differentialgleichungen in den sechs Veränderlichen. Man kann aus allgemeinen Sätzen der Theorie der vollständigen Systeme schliessen, dass sie nur $6 - 3 = 3$ von einander unabhängige Lösungen besitzen, indem jede andere Lösung eine Function dieser drei ist. Es sind uns aber drei von einander unabhängige Lösungen bekannt, nämlich die drei Abstände der drei Punkte von einander.

Wenn wir allgemein n Punkte mit ihren $2n$ Coordinaten ins Auge fassen, so ergeben sich drei Differentialgleichungen in $2n$ Veränderlichen. Dieselben bilden ein vollständiges System mit $2n - 3$ von einander unabhängigen Lösungen. Es haben aber n Punkte $\frac{n(n-1)}{2}$ Abstände von einander. Da dieselben Invarianten sind, so könnten wir hieraus folgern, dass von diesen $\frac{n(n-1)}{2}$ Abständen alle durch nur $2n - 3$ derselben ausdrückbar sind. Dies aber ist ein Satz, der geometrisch leicht zu beweisen ist, denn kennt man die $2(n-2)$ Abstände aller Punkte von zwei bestimmten, und den Abstand dieser

beiden von einander, also insgesamt $2n - 3$ Abstände, so sind dadurch offenbar alle Entfernungen festgelegt.

Auf die hier mehrfach und auch schon in § 2 erwähnten Sätze aus der Theorie der vollständigen Systeme werden wir an einer späteren Stelle kurz zurückkommen. Hier genüge für den Leser, der die Theorie derselben nicht kennt, die Bemerkung, dass die obigen und die weiter unten vorkommenden Systeme von Differentialgleichungen sogenannte vollständige Systeme sind, und dass ein aus r Gleichungen bestehendes (r-gliedriges) vollständiges System mit n unabhängigen Veränderlichen $n - r$ von einander unabhängige Lösungen besitzt, sodass jede andere Lösung derselben eine Function von diesen $n - r$ Lösungen ist.

Wir wollen nunmehr ein anderes Invariantenproblem kurz besprechen: Wie überhaupt bei jeder Transformation (vgl. § 3 des 2. Kap.), so wird insbesondere bei jeder Bewegung der Differentialquotient oder die Richtungscoordinate $y' = \frac{dy}{dx}$ transformiert. Bei der infinitesimalen Translation p ist $\delta x = \delta t$, $\delta y = 0$. Da nun allgemein

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy dx - dy \delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y dx - dy d\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - y' \frac{d\delta x}{dx}$$

ist, wo die Differentiation nach x immer als totale aufzufassen, also $\frac{dy}{dx} = y'$ zu setzen ist, so ergiebt sich hier für y' das Increment

$$\delta y' = 0.$$

Ebenso ergiebt sich bei q

$$\delta y' = 0.$$

Bei der infinitesimalen Rotation $xq - yp$ ist ferner $\delta x = -y\delta t$, $\delta y = x\delta t$, daher

$$\delta y' = (1 + y'^2)\delta t.$$

Bei der allgemeinsten infinitesimalen Bewegung

$$Uf \equiv \lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q$$

erhalten wir ähnlich:

$$\delta y' = \lambda(1 + y'^2)\delta t.$$

Wir nennen diese Mitberücksichtigung der Transformation des Differentialquotienten die *Erweiterung* der ursprünglichen Transformation. Eine Function $f(x, y, y')$ erfährt bei Uf das durch δt dividierte Increment:

Erweiterung einer inf. Bewegung.

$$\lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q + \lambda(1 + y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'},$$

wenn, wie immer, unter p und q die Grössen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ verstanden

werden. Bezeichnen wir $\frac{\partial f}{\partial y'}$ abkürzend mit q', so lautet also das Symbol der erweiterten infinitesimalen Bewegung Uf:

$$\lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q + \lambda(1 + y'^2)q'.$$

Invariante Diffgl. 1. O.

Eine Differentialgleichung

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

bleibt bei allen infinitesimalen Bewegungen invariant, wenn bei denselben φ stets einen Zuwachs erhält, der vermöge $\varphi(x, y, y') = 0$ verschwindet. Wir dürfen annehmen, diese Differentialgleichung $\varphi = 0$ liege in aufgelöster Form $y' - \omega(x, y) = 0$ vor, sodass $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial y'}$ alle drei frei von y' sind. Wir verlangen nun, dass für alle Werte von λ, μ, ν:

$$\lambda\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nu\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda(1 + y'^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$$

verschwinde vermöge $\varphi = 0$. Es müssen also einzeln

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1 + y'^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$$

verschwinden, wenn darin für y' der aus $\varphi = 0$ folgende Wert eingesetzt wird. Die beiden ersten Ausdrücke enthalten aber y' gar nicht. Es muss also überhaupt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} \equiv 0$$

sein, d. h. φ enthält nur y'. Der dritte Ausdruck reduciert sich, da $\frac{\partial \varphi}{\partial y'} \equiv 1$ angenommen werden durfte, einfach auf $1 + y'^2$. Er soll verschwinden, d. h. y' ist gleich $\pm i$. Demnach ergeben sich als die beiden einzigen bei allen infinitesimalen Bewegungen invarianten Differentialgleichungen erster Ordnung diese beiden:

$$y' = i, \quad y' = -i.$$

Sie bleiben aber auch bei jeder endlichen Bewegung:

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b$$

invariant, denn hier ist der neue Differentialquotient (vgl. § 3 des 2. Kap.):

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dx \cdot \sin\alpha + dy \cdot \cos\alpha}{dx \cdot \cos\alpha - dy \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin\alpha + y'\cos\alpha}{\cos\alpha - y'\sin\alpha}.$$

Ist aber $y' = \pm i$, so wird hiernach auch $y_1' = \pm i$.

Die erhaltenen Gleichungen

$$y' = \pm i$$

sind die Differentialgleichungen zweier Parallelenscharen, die freilich imaginär sind:

$$x + iy = \text{Const.}, \quad x - iy = \text{Const.}$$

Jede besitzt einen unendlich fernen Punkt. Unser Ergebnis ist also dies: Bei allen Bewegungen bleiben zwei unendlich ferne imaginäre Punkte in Ruhe. Dies sind eben jene Punkte, in denen *alle* Kreise der Ebene die unendlich ferne Gerade treffen, die sogenannten *Kreispunkte*, von denen schon gelegentlich die Rede war. Dass kein Punkt im Endlichen bei allen Bewegungen in Ruhe bleibt, ist leicht einzusehen.

Kreispunkte.

Man kann umgekehrt alle projectiven Transformationen aufsuchen, welche die Kreispunkte in Ruhe lassen. Offenbar muss eine solche die unendlich ferne Gerade invariant lassen, also zunächst die Form haben:

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2.$$

Sie soll $x \pm iy = \text{Const.}$ wieder in $x_1 \pm iy_1 = \text{Const.}$ überführen. Daraus folgt, dass sie die Form hat:

$$x_1 = \varrho(x \cos\alpha - y \sin\alpha + a), \quad y_1 = \varrho(x \sin\alpha - y \cos\alpha + b).$$

Ist insbesondere $\varrho = 1$, so ist sie eine Bewegung. Bei beliebigem Werte der Constanten ϱ dagegen stellt sie eine sogenannte Ähnlichkeitstransformation dar, die alle Figuren in ähnliche verwandelt.

Wir heben noch hervor, dass die Gruppe der Bewegungen auch als die Gruppe aller Transformationen des Cartesischen Coordinatensystems bezeichnet werden kann, bei denen keine Umklappung des Axenkreuzes eintritt.

Bei der allgemeinen infinitesimalen Bewegung

$$Uf \equiv \lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q$$

erfährt auch der *zweite* Differentialquotient y'' einen Zuwachs. Es kommt:

$$\delta y'' = \delta \frac{dy'}{dx} = \frac{d\delta y' dx - dy' d\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta y'}{dx} - y'' \frac{d\delta x}{dx},$$

also, da

$$\delta y' = \lambda(1 + y'^2)\delta t, \quad \delta x = (-\lambda y + \mu)\delta t$$

ist:

$$\delta y'' = 3\lambda y' y'' \delta t,$$

sodass eine Function $f(x, y, y', y'')$ den durch δt dividierten Zuwachs

$$\lambda(xq - yp) + \mu p + \nu q + \lambda(1 + q'^2)q' + 3\lambda y' y'' q''$$

erfährt, wenn $q'' \equiv \frac{\partial f}{\partial y''}$ ist. Wir sind so zum Begriff der zweimal erweiterten infinitesimalen Transformation Uf geführt.

Zweite Erweiterung einer inf. Bewegung.

Invariante Diffgl. 2. O.

Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi(x, y, y', y'') = 0$$

bleibt demnach bei jeder infinitesimalen Bewegung invariant, wenn für alle Werte von λ, μ, ν

$$\lambda\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\lambda(1+y'^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y'}+3\lambda y'y''\frac{\partial\varphi}{\partial y''}$$

vermöge $\varphi=0$ verschwindet, also auch insbesondere

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(1+y'^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y'}+3y'y''\frac{\partial\varphi}{\partial y''}=0$$

ist, sobald darin für y'' der aus $\varphi=0$ folgende Wert gesetzt wird. Indem wir $\varphi=0$ in der aufgelösten Form

$$y''-\omega(x,\,y,\,y')=0$$

voraussetzen dürfen, finden wir, dass die beiden ersten Forderungen überhaupt y'' nicht enthalten und mithin an sich erfüllt sein müssen. Sie sagen aus, dass φ frei von x und y ist. Die letzte reduciert sich danach wegen $\varphi\equiv y''-\omega(y')$ auf:

$$(1+y'^2)\frac{d\omega}{dy'}+3y'\omega=0.$$

Sie giebt integriert

$$\omega=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\text{Const.}$$

Die allgemeinste bei jeder infinitesimalen Bewegung invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet demnach, nach der Constanten aufgelöst:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\text{Const.}$$

Ihre geometrische Deutung lehrt, dass jede dieser ∞^1 Differentialgleichungen auch bei jeder endlichen Bewegung invariant ist. Denn die linke Seite ist das bekannte *Krümmungsmass* und die Integralcurven sind also alle Curven von constantem Krümmungsmass a, d. h. alle ∞^2 Kreise mit dem Radius $\frac{1}{a}$. Natürlich führt jede endliche Bewegung jeden solchen Kreis in einen ebensolchen über. Die Grösse $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist somit bei jeder Bewegung invariant. Wir nennen sie daher eine *Differentialinvariante* und zwar eine von zweiter Ordnung.

Krümmungsmass.

Differentialinvariante.

Satz 16: *Die Gruppe der Bewegungen der Ebene besitzt als einzige Differentialinvariante zweiter Ordnung das Krümmungsmass*

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Invariante Diffgl. 3. O.

Wir stellen es dem Leser anheim, in ähnlicher Weise die invarianten Differentialgleichungen *dritter* Ordnung aufzusuchen. Man hat zu dem Zweck auch $\delta y'''$ zu berechnen. Dann findet man durch allerdings nicht ebenso einfache Rechnung wie bisher, dass jede invariante Differentialgleichung dritter Ordnung die Form hat:

$$\Omega\left(\frac{1}{r}, \frac{dr}{ds}\right) = 0.$$

Hier bedeutet $\frac{1}{r}$ als reciproker Wert des Krümmungsradius r das invariante Krümmungsmass, ds das Bogenelement $\sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Geometrisch gedeutet stellt diese Gleichung ∞^3 Curven dar, längs deren die Bogenlänge s ein und dieselbe Function des Krümmungsradius allein ist. Offenbar wird jede solche Curve auch durch jede endliche Bewegung wieder in eine derartige Curve verwandelt.

§ 4. Einige Bemerkungen über Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe.

Die allgemeine achtgliedrige projective Gruppe der Ebene besitzt ausser den in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen Gruppen noch eine sehr grosse Anzahl von Untergruppen, wie wir schon bemerkten. Ein allgemeines Princip, vermöge dessen man viele derselben finden kann, kann schon aus dem Bisherigen abgeleitet werden:

Definitionen der betrachteten Untergruppen.

Die allgemeine lineare Gruppe kann definiert werden als der Inbegriff aller projectiven Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade in sich überführen, d. h. als der Inbegriff aller Transformationen überhaupt, welche die Differentialgleichung zweiter Ordnung (vgl. Satz 12 in § 3 des 2. Kap.)

$$y'' = 0$$

invariant lassen und überdies jede Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$y' = \text{Const.},$$

die ja eine Parallelenschar vorstellt, wieder in eine solche (nur mit anderem Werte der Constanten) verwandeln. Oder auch: Sie kann definiert werden als der Inbegriff aller Transformationen, welche die Differentialgleichung aller Parabeln

$$5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$$

invariant lassen, wie wir oben in einer Anmerkung ausführten. (Vgl. Satz 3 in § 1 dieses Kapitels.)

Die specielle lineare Gruppe ferner kann definiert werden als der Inbegriff aller projectiven Transformationen, welche die Flächeninhalte in gleich grosse überführen (nach Satz 10 des § 2).

Die Gruppe der Bewegungen endlich besteht aus allen projectiven Transformationen, welche die Entfernung zweier beliebiger Punkte, also eine gewisse Function, ungeändert lassen.

In allen drei Fällen also sind die Gruppen definiert dadurch, dass sie gewisse Gebilde in sich überführen.

Betrachten wir entsprechend alle projectiven Transformationen S_a, $S_b \cdots$, die irgend ein gewisses Gebilde F invariant lassen. Unter F mag ein Punkt oder eine Gerade oder überhaupt eine Figur oder auch eine oder mehrere Differentialgleichungen oder endlich auch eine Function der Coordinaten mehrerer gleichzeitig transformierter Punkte verstanden werden. Alsdann ist in symbolischer Bezeichnung:

$$(F)S_a = (F), \quad (F)S_b = (F), \cdots.$$

Daher ist auch

$$(F)S_a S_b = (F),$$

in Worten: Die Aufeinanderfolge zweier Transformationen dieser Schar lässt ebenfalls F in Ruhe und gehört mithin der Schar an. Die Schar hat also die Gruppeneigenschaft. Ist S_a^{-1} die zu S_a inverse projective Transformation, so folgt aus

$$(F)S_a = (F)$$

unmittelbar

$$(F) = (F)S_a^{-1}$$

d. h. auch S_a^{-1} gehört zur betrachteten Schar. Die Gruppe enthält folglich zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse. So werden wir zu dem wichtigen Principe geführt:

Ein allgemeines Princip zur Bildung von Untergruppen.

Theorem 11: *Die Schar aller projectiven Transformationen der Ebene, welche ein gewisses Gebilde in Ruhe lassen, besitzt die Gruppeneigenschaft. Die Transformationen der Schar ordnen sich paarweis als invers zusammen.*

Beispiele hierzu.

Z. B. wollen wir alle projectiven Transformationen aufstellen, welche den Anfangspunkt in Ruhe lassen. Offenbar haben sie die Form:

$$x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Die Zähler sind *homogene* lineare Functionen von x und y. Alle diese Transformationen bilden eine Gruppe. Wenn man zwei derselben nach einander ausführt, etwa die vorstehende und diese:

$$x_2 = \frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1}{\alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3}, \quad y_2 = \frac{\alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1}{\alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3},$$

so findet man in der That, dass sich x_2 und y_2 auch als linear gebrochene Functionen von x und y mit homogenen Zählern darstellen.

Diese Gruppe enthält sieben Parameter, auf deren Verhältnisse es aber nur ankommt, sodass nur sechs und — wovon man sich leicht überzeugt — auch gerade sechs wesentlich sind. Die Gruppe ist also eine *sechsgliedrige Untergruppe* der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene.

In schon öfters durchgeführter Weise könnten wir ihre infinitesimalen Transformationen bestimmen. Aus der allgemeinen infinitesimalen projectiven Transformation:

$$Uf = (a + cx + dy + hx^2 + kxy)p + (b + ex + gy + hxy + ky^2)q$$

sind sie jedoch schneller abzuleiten. Diese nämlich lässt den Anfangspunkt in Ruhe, wenn die Incremente von x und y für $x = y = 0$ verschwinden, d. h. wenn $a = b = 0$ ist. Die verbleibende infinitesimale Transformation ist daher linear ableitbar aus den sechs von einander unabhängigen:

$$xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q.$$

Man bemerke, dass die Klammerausdrücke zwischen diesen sich auch linear mit constanten Coefficienten aus ihnen zusammensetzen lassen.

Ferner bilden alle projectiven Transformationen, welche zwei Punkte, etwa die unendlich fernen Punkte der Axen, in Ruhe lassen, eine Gruppe. Dieselbe muss die Geradenschar $x =$ Const. ebenso wie die Schar $y =$ Const. jede in sich überführen, d. h. sie hat die Form:

$$x_1 = a_1x + c_1, \quad y_1 = b_2y + c_2$$

und ist demnach *viergliedrig*. Ihre allgemeine infinitesimale Transformation ist linear aus den vier von einander unabhängigen

$$p, \quad q, \quad xp, \quad yq$$

ableitbar. Man bemerke, dass auch hier alle Klammerausdrücke linear mit constanten Coefficienten durch p, q, xp, yq ausdrückbar sind.

Alle projectiven Transformationen, welche drei Punkte, etwa den Anfangspunkt und die unendlich fernen Punkte der Axen in Ruhe lassen, bilden die *zweigliedrige Untergruppe:*

$$x_1 = ax, \quad y_1 = by$$

mit den infinitesimalen Transformationen

$$xp, \quad yq.$$

Hier ist $(xp, yq) \equiv 0$.

Ebenso bilden alle projectiven Transformationen, welche zwei Geraden, z. B. die beiden Axen, invariant lassen, eine leicht aufzustellende *viergliedrige Gruppe*, deren allgemeine infinitesimale Transformation sich linear aus

$$xp, \quad yq, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q$$

zusammengesetzt. Auch hier gilt die die Klammerausdrücke betreffende Bemerkung wie in allen bisherigen Beispielen.

Alle projectiven Transformationen, die einen Kegelschnitt, z. B. die Parabel

$$y - \tfrac{1}{2}x^2 = 0$$

in sich überführen, bilden eine *dreigliedrige Gruppe*, deren allgemeinste infinitesimale Transformation sich nach § 4 des 3. Kap. linear aus

$$p + xq, \quad xp + 2yq, \quad (x^2 - y)p + xyq$$

ableiten lassen. Man mache auch hier die Probe mit den Klammerausdrücken.

Man könnte so viele Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe aufstellen. Eine vollständige Bestimmung aller Untergruppen derselben werden wir in der zweiten Abteilung durchführen.

Kapitel 5.

Die allgemeine projective Gruppe der geraden Linie und die lineare homogene Gruppe der Ebene.

Schon in § 2 des 1. Kap. haben wir von den projectiven Transformationen der Geraden in sich gesprochen. Jetzt kommen wir darauf zurück: Wir werden in diesem wichtigen Kapitel *alle projectiven Gruppen der Geraden mit paarweis inversen Transformationen* aufstellen und genau untersuchen.

Das gegenwärtige Kapitel unterscheidet sich also von dem vorhergehenden wesentlich dadurch, dass es nicht wie jenes nur Übungsstoff darbietet, sondern vielmehr die unentbehrliche Grundlage für manche künftige Betrachtung bildet.

Zum Schluss betrachten wir die zur Gruppe der Geraden in enger Beziehung stehende *lineare homogene Gruppe in zwei Veränderlichen.*

§ 1. Die dreigliedrige projective Gruppe der Geraden und ihre eingliedrigen Untergruppen.

Projective Transf. der Geraden.

Nach § 2 des 1. Kap. stellt die Gleichung

$$(1) \qquad x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}$$

eine allgemeine projective Transformation der geraden Linie in sich dar. Hierbei sollen die Punkte der Geraden durch ihre — positiven oder negativen — Abstände x, x_1 von einem Nullpunkte auf der Geraden bestimmt sein. Wenn man eine allgemeine projective Transformation der Ebene betrachtet, welche die x-Axe in Ruhe lässt, so sieht man ohne Mühe, dass die Punkte dieser Axe durch eine Trans-

formation von der Form (1) in einander übergeführt werden. Die Gleichung (1) stellt übrigens nur dann eine wirkliche Transformation dar, wenn sie auch umgekehrt nach x auflösbar ist, wenn also x rechts wirklich vorkommt, d. h. wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Dies setzen wir daher immer voraus.

Gruppe derselben.

Alle projectiven Transformationen der Geraden bilden eine Gruppe, denn wenn nach (1) die Transformation

$$x_2 = \frac{a_1 x_1 + b_1}{c_1 x_1 + d_1}$$

ausgeführt wird, so ergiebt sich als die Transformation, welche der Aufeinanderfolge beider äquivalent ist, durch Elimination des Zwischenwertes x_1 folgende:

$$x_2 = \frac{(a_1 a + b_1 c)x + (a_1 b + b_1 d)}{(c_1 a + d_1 c)x + (c_1 b + d_1 d)}.$$

Sie hat aber wieder die Form (1), wie zu beweisen war. Auch ist die Auflösung von (1) nach x eine projective Transformation, die zu (1) *inverse:*

$$x = \frac{-dx_1 + b}{cx_1 - a}.$$

Ferner stimmen zwei Transformationen von der Form (1) nur dann überein, wenn die Verhältnisse der Constanten a, b, c, d bei der einen gleich den entsprechenden Verhältnissen dieser bei der andern sind. Von den vier Parametern a, b, c, d sind also gerade *drei wesentlich.*

Theorem 12: *Alle projectiven Transformationen der geraden Linie in sich bilden eine continuierliche Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Wir bemerken noch wie in § 2 des 1. Kap., dass die Beziehung (1) zwischen x und x_1 auch in Form einer bilinearen Relation

$$(1') \qquad cxx_1 + dx_1 - ax - b = 0$$

geschrieben werden kann.

Projective Transf., die drei Punkte in drei andere überführt.

Nehmen wir irgend welche drei Punkte (x'), (x''), (x''') an und untersuchen wir, ob es eine projective Transformation giebt, die sie in drei beliebig, aber bestimmt gewählte Punkte (x_1'), (x_1''), (x_1''') der Geraden überführt. Es fragt sich also, ob man a, b, c, d so bestimmen kann, dass gleichzeitig nach (1'):

$$(2)\qquad \begin{cases} x'a + b - x'x_1'c - x_1'd = 0, \\ x''a + b - x''x_1''c - x_1''d = 0, \\ x'''a + b - x'''x_1'''c - x_1'''d = 0 \end{cases}$$

wird. Dividiert man durch c, so erhält man drei lineare Gleichungen für $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{c}$ mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x' & 1 & -x_1' \\ x'' & 1 & -x_1'' \\ x''' & 1 & -x_1''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x''-x' & x_1''-x_1' \\ x'''-x' & x_1'''-x_1' \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichungen lassen sich stets befriedigen, es sei denn die Determinante Null. Tritt letzteres ein, so nehmen wir in (2) $c=0$ an und erhalten drei homogene Gleichungen in a, b, d mit verschwindender Determinante, deren zweireihige Unterdeterminanten nicht sämtlich verschwinden, sobald keine zwei der Coordinaten x', x'', x''' und auch keine zwei der Coordinaten x_1', x_1'', x_1''' einander gleich sind. Die Verhältnisse von a, b, c, d lassen sich also auch dann eindeutig bestimmen.

Satz 1: *Es giebt stets eine und nur eine projective Transformation, die drei getrennte Punkte der Geraden in irgend drei getrennte Punkte auf ihr überführt.*

Dass hier die Determinante $ad - bc$ wirklich verschieden von Null wird, liegt darin, dass die Transformation, wenn $ad - bc = 0$ wäre, alle Punkte in denselben Punkt überführen würde.

Setzt man insbesondere $x_1' = x'$, $x_1'' = x''$, $x_1''' = x'''$, so reducieren sich die Gleichungen (2) auf diese:

$$\begin{aligned} x'(a-d) + b - x'^2c &= 0, \\ x''(a-d) + b - x''^2c &= 0, \\ x'''(a-d) + b - x'''^2c &= 0, \end{aligned}$$

deren Determinante

$$\begin{vmatrix} x' & 1 & -x'^2 \\ x'' & 1 & -x''^2 \\ x''' & 1 & -x'''^2 \end{vmatrix} = (x'-x'')(x''-x''')(x'''-x')$$

nicht verschwindet, solange keine zwei der Punkte (x'), (x''), (x''') zusammenfallen. Es folgt also $a=d$, $b=0$, $c=0$; (1) reduciert sich mithin auf die identische Transformation $x'=x$.

Satz 2: *Die einzige projective Transformation, die drei getrennte Punkte der Geraden in Ruhe lässt, ist die identische.*

Invariante Punkte.

Man kann fragen, ob bei einer Transformation (1) überhaupt Punkte in Ruhe bleiben. Dass es nicht mehr als zwei invariante

Punkte geben kann, ist sicher. Der Punkt (x) bleibt nur dann bei (1) oder (1') in Ruhe, wenn

$$cx^2 + (d - a)x - b = 0$$

ist. Dies ist für x eine quadratische Gleichung.

Ist $c \neq 0$, so hat sie zwei endliche Wurzeln x, die aber zusammenfallen können. Es giebt also dann zwei (reelle oder imaginäre) getrennte oder zusammenfallende invariante Punkte. Ist $c = 0$ und $a \neq d$, so haben wir einen invarianten Punkt $x = \frac{b}{d - a}$; ist gleichzeitig $a = d$, so giebt es, da dann $b \neq 0$ sein muss, weil (1) sonst die Identität wäre, keinen invarianten Punkt.

Diese Ausdrucksweise ist nicht ganz correct. Es giebt nämlich unter Umständen einen unendlich fernen invarianten Punkt, denn der Bruch (1) wird für $x = \infty$ ebenfalls unendlich gross, sobald $c = 0$ ist. Dann also wird der unendlich ferne Punkt der Geraden in sich übergeführt, er ist invariant. Wir können dies auch so einsehen: Benutzen wir den reciproken Wert der Abscissen x, x_1 als Coordinaten ξ, ξ_1, führen wir also die projective Transformation aus:

$$\xi = \frac{1}{x}, \quad \xi_1 = \frac{1}{x_1},$$

so kommt statt (1):

$$\xi_1 = \frac{c + d\xi}{a + b\xi}.$$

Ist $c \neq 0$, so folgt für $\xi = 0$ ein von Null verschiedenes ξ_1. Dagegen wenn $c = 0$ ist, so wird mit $\xi = 0$ auch $\xi_1 = 0$. Dabei ist $\xi = 0$ Doppelwurzel der Gleichung

$$\xi = \frac{d\xi}{a + b\xi},$$

sobald $a = d$ ist. $\xi = 0$ und $\xi_1 = 0$ stellen aber den unendlich fernen Punkt $x = \infty$ oder $x_1 = \infty$ der Geraden dar. Im Falle $c = 0$ und $a = d$ hat man ihn also als einen doppelten invarianten Punkt aufzufassen.

Satz 3: *Eine projective Transformation der Geraden lässt, sobald sie nicht nur die Identität ist, gerade zwei Punkte invariant, die unter Umständen zusammenfallen können.*

Inf. project. Transf. der Geraden.

Die Gruppe aller Transformationen (1) besitzt, wie wir wissen, die *identische* Transformation, die sich ergiebt, wenn in (1) $a = d$ und $b = c = 0$ gesetzt wird. Wählen wir

$$a = a_0 + \mathfrak{a}\delta t, \quad b = \mathfrak{b}\delta t, \quad c = \mathfrak{c}\delta t, \quad d = a_0 + \mathfrak{d}\delta t, \quad (a_0 \neq 0),$$

so erhalten wir also *die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe:*

(3) $$x_1 = \frac{(a_0 + \mathfrak{a}\delta t)x + \mathfrak{b}\delta t}{\mathfrak{c}\delta t x + a_0 + \mathfrak{d}\delta t}.$$

Offenbar kann ohne Schaden $a_0 = 1$ gesetzt werden. Da ferner

$$\frac{1}{\mathfrak{c}\delta t x + 1 + \mathfrak{d}\delta t} = 1 - (\mathfrak{c}x + \mathfrak{d})\delta t + \cdots$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= (x + (\mathfrak{a}x + \mathfrak{b})\delta t)(1 - (\mathfrak{c}x + \mathfrak{d})\delta t + \cdots) \\ &= x + (\mathfrak{a}x + \mathfrak{b} - \mathfrak{c}x^2 - \mathfrak{d}x)\delta t + \cdots, \end{aligned}$$

sodass x den Zuwachs erhält:

$$\delta x = (\mathfrak{b} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{d})x - \mathfrak{c}x^2)\delta t + \cdots.$$

Das Glied erster Ordnung verschwindet hier nur dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$ ist. Dann aber reduciert sich die infinitesimale Transformation (3) auf die Identität. Also kann in einer wirklichen infinitesimalen Transformation das unendlich kleine Glied erster Ordnung nicht Null sein; es ist daher stets gestattet, die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung diesem gegenüber zu vernachlässigen. Wir setzen also:

$$\delta x = (\mathfrak{b} + (\mathfrak{a} - \mathfrak{d})x - \mathfrak{c}x^2)\delta t$$

oder, bei anderer Bezeichnung der Constanten:

$$\delta x = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\delta t.$$

Das Symbol dieser infinitesimalen Transformation ist

$$Uf \equiv (\alpha + \beta x + \gamma x^2)p.$$

Also folgt:

Satz 4: *Die allgemeine infinitesimale projective Transformation der Geraden ist linear ableitbar aus den dreien:*

$$p, \quad xp, \quad x^2p.$$

Demnach giebt es, da es nur auf die Verhältnisse der Constanten α, β, γ ankommt, gerade ∞^2 infinitesimale projective Transformationen der Geraden.

Die Aufsuchung der invarianten Punkte bei vorgelegter *infinitesimaler* projectiver Transformation

$$Uf = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)p$$

wollen wir hier besonders erwähnen: Die Function $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ ist quadratisch, wenn $\gamma \neq 0$ ist, und zerfällt dann in zwei lineare Factoren. Sind diese verschieden, so hat Uf die Form

$$\gamma(x - m)(x - n)p \quad (m \neq n).$$

Offenbar lässt dann Uf die Punkte $x = m$ und $x = n$ in Ruhe. Sind die Factoren gleich, so hat Uf die Form

$$\gamma(x - m)^2 p$$

und lässt im Endlichen sicher nur den Punkt $x = m$ in Ruhe. Um auch das Unendlichferne zu untersuchen, führen wir $\xi = \frac{1}{x}$ als Variabele ein und erhalten als Symbol:

$$-\gamma(1 - \xi m)^2 \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Für $\xi = 0$ oder $x = \infty$ ist dies nicht Null, also ist der unendlich ferne Punkt nicht invariant. $x = m$ ist vielmehr doppelt zählender invarianter Punkt im Endlichen.

Wenn nun $\gamma = 0$ ist und $\beta \neq 0$, so hat Uf die Form:

$$\beta(x - m)p$$

und lässt den Punkt $x = m$ invariant. Für $\xi = \frac{1}{x}$ kommt das Symbol

$$-\beta\xi(1 - m\xi)\frac{\partial f}{\partial \xi},$$

das für $\xi = 0$ oder $x = \infty$ verschwindet. Daher ist auch der unendlich ferne Punkt invariant.

Wenn endlich $\gamma = \beta = 0$ ist, so bleibt

$$\alpha p$$

und diese infinitesimale Translation lässt keinen im Endlichen gelegenen Punkt in Ruhe, wohl aber den doppelt zu zählenden unendlich fernen.

Eingl. proj. Gruppe, erzeugt von inf. project. Transform.

Jede dieser infinitesimalen projectiven Transformationen erzeugt nun, wie wir beweisen werden, eine eingliedrige Gruppe von projectiven Transformationen. Wir werden die verschiedenen Möglichkeiten einzeln behandeln.

Erster Fall.

Es seien *zunächst* jene beiden Factoren von einander verschieden, also — da es auf einen Zahlenfactor nicht ankommt:

$$Uf \equiv (x - m)(x - n)p,$$

wo $m \neq n$ ist. Uf lässt die Punkte $x = m$ und $x = n$ und sonst keinen Punkt in Ruhe. Es ist sehr leicht, alle endlichen projectiven Transformationen aufzustellen, welche eben diese beiden Punkte in Ruhe lassen. Ist nämlich

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}$$

eine solche und eliminiert man x aus dem Bruche

$$\frac{x - m}{x - n},$$

indem man x_1 einführt, so erhält man eine lineare gebrochene Function von x_1. Setzt man $x = m$, so ist der Bruch Null. Da für $x = m$

auch $x_1 = m$ sein soll, so muss also der neue Bruch ebenfalls für $x_1 = m$ verschwinden, d. h. sein Zähler muss ein Vielfaches von $x_1 - m$ sein. Entsprechend ist sein Nenner ein Vielfaches von $x_1 - n$. Wir sehen also, dass bei jeder projectiven Transformation, welche die getrennten Punkte (m) und (n) invariant lässt, eine Gleichung besteht von der Form:

$$\frac{x_1 - m}{x_1 - n} = \varrho \frac{x - m}{x - n}, \tag{4}$$

aus der sich also die Transformation in der gewöhnlichen Form durch Auflösen nach x_1 ergiebt.

Hierin tritt nur eine willkürliche Constante ϱ auf. Es ergeben sich also gerade ∞^1 Transformationen der gesuchten Art. Dieselben bilden für sich eine Gruppe, denn die Aufeinanderfolge zweier dieser Transformationen lässt auch die Punkte (m) und (n) in Ruhe und gehört daher ebenfalls zu diesen ∞^1 Transformationen. Auch enthält diese Gruppe zu jeder ihrer Transformationen die inverse, die man dadurch findet, dass man statt ϱ den Wert $\frac{1}{\varrho}$ setzt. Wir haben somit die allgemeinste projective Gruppe construiert, welche zwei getrennte Punkte (m) und (n) in Ruhe lässt.

Es lässt sich umgekehrt leicht bestätigen, dass unsere eingliedrige Gruppe von der infinitesimalen Transformation

$$Uf \equiv (x - m)(x - n)p$$

erzeugt wird. Die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Uf findet man ja durch Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{(x_1 - m)(x_1 - n)} = dt \tag{5}$$

unter der Bedingung, dass sich x_1 für $t = 0$ auf x reduciere. Die Differentialgleichung (5) aber lässt sich so schreiben:

$$\frac{dx_1}{x_1 - m} - \frac{dx_1}{x_1 - n} = (m - n)dt$$

und besitzt daher die Integralgleichung:

$$\log \frac{x_1 - m}{x_1 - n} = (m - n)t + \text{Const.}$$

oder, da die linke Seite sich für $t = 0$ auf $\log \frac{x - m}{x - n}$ reducieren soll:

$$\log \frac{x_1 - m}{x_1 - n} = (m - n)t + \log \frac{x - m}{x - n},$$

d. h.:

$$\frac{x_1 - m}{x_1 - n} = e^{(m-n)t} \frac{x - m}{x - n}.$$

Diese Gleichung hat in der That die Form (4). Nur ist statt des Parameters ϱ der Parameter t gebraucht, indem $(m - n)t = \log \varrho$ ist.

Es hat sich also ergeben, dass die infinitesimale projective Transformation

$$Uf \equiv (x - m)(x - n)p$$

eine eingliedrige *projective* Gruppe erzeugt, deren endliche Gleichung man durch Auflösen der letzten Gleichung nach t erhält. Diese Auflösung giebt:

$$x_1 = \frac{(me^{nt} - ne^{mt})x + mn(e^{mt} - e^{nt})}{(e^{nt} - e^{mt})x + me^{mt} - ne^{nt}}.$$

Implicite haben wir hiermit auch bewiesen, dass, wenn eine infinitesimale projective Transformation Uf zwei getrennte Punkte $x = m$ und $x = n$ invariant lässt, diese Punkte auch bei jeder von Uf erzeugten endlichen Transformation in Ruhe bleiben. Dies hätte auch aus einem allgemeinen Satze gefolgert werden können, den wir an anderer Stelle bewiesen haben*).

Zweiter Fall.

Es mögen *zweitens* die linearen Factoren des in Uf vorkommenden quadratischen Ausdruckes übereinstimmen:

$$Uf \equiv (x - m)^2 p.$$

Hier ist die directe Integration der Differentialgleichung, welche die von Uf erzeugte eingliedrige Gruppe bestimmt, nämlich der Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{dx_1}{(x_1 - m)^2} = dt,$$

sehr einfach. Es kommt:

$$-\frac{1}{x_1 - m} = t + \text{Const.}$$

oder, da sich x_1 für $t = 0$ auf x reducieren soll:

$$\frac{1}{x_1 - m} = \frac{1}{x - m} - t$$

oder endlich:

$$x_1 = \frac{(1 - mt)x + m^2 t}{-tx + 1 + mt}.$$

In der That sind diese ∞^1 Transformationen projectiv.

Wir hätten auch so vorgehen können: Uf lässt nur den Punkt $x = m$ in Ruhe. Fragen wir vorerst nach allen endlichen projectiven Transformationen

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d},$$

welche auch nur den Punkt $x = m$ in Ruhe lassen. Der Bruch $\frac{1}{x - m}$

*) „Diffgln. m. inf. Trf.", S. 70.

wird vermöge einer solchen Transformation in eine linear gebrochene Function von x_1 verwandelt. Da $\frac{1}{x-m}$ für $x = m$ unendlich gross wird, und da dem Wert $x = m$ der Wert $x_1 = m$ zugehört, muss der Nenner des neuen Bruches ein Vielfaches von $x_1 - m$ sein. Sei also:

$$\frac{1}{x-m} = \frac{\sigma x_1 + \varrho}{x_1 - m}.$$

Diese Gleichung, welche die obige Gleichung der Transformation ersetzt, soll nun für $x = x_1$ die Doppelwurzel m haben. Dies aber tritt dann und nur dann ein, wenn

$$1 = \sigma m + \varrho,$$

d. h.

$$\sigma = \frac{1-\varrho}{m}$$

ist, sodass kommt:

$$\frac{1}{x-m} = \frac{(1-\varrho)x_1 + \varrho m}{m(x_1 - m)}$$

oder, wenn $\frac{1-\varrho}{m}$ mit ϱ bezeichnet wird:

$$\frac{1}{x_1 - m} = \frac{1}{x-m} + \varrho. \tag{7}$$

In dieser Form sind also alle endlichen projectiven Transformationen enthalten, die nur den einen Punkt $x = m$ invariant lassen.

Alle diese ∞^1 projectiven Transformationen bilden eine Gruppe, denn zwei solche Transformationen lassen nach einander ausgeführt ebenfalls nur den Punkt (m) in Ruhe. Die zur obigen inverse Transformation ergiebt sich, wenn ϱ durch $-\varrho$ ersetzt wird. Soll nun, was wir zu beweisen wünschen, diese Gruppe die von

$$Uf \equiv (x-m)^2 p$$

erzeugte sein, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass ϱ diejenige Function von t ist, für welche die Gleichung (7) die Integralgleichung von (6) wird. Aus (7) aber folgt durch Differentiation nach t:

$$-\frac{dx_1}{(x_1 - m)^2} = d\varrho,$$

also wegen (6):

$$d\varrho = -dt,$$

$$\varrho = -t + \text{Const.}$$

oder, da sich (7) für $t = 0$ auf die Identität reducieren soll:

$$\varrho = -t.$$

Wir kommen also in der That zu der schon vorher abgeleiteten endlichen Gleichung:

$$\frac{1}{x_1 - m} = \frac{1}{x-m} - t.$$

Dritter Fall. Sei *drittens* der in Uf auftretende Ausdruck nicht quadratisch, sondern nur linear, also:

$$Uf \equiv (x - m)p.$$

Hier liefert die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{x_1 - m} = dt \tag{8}$$

sofort:

$$x_1 - m = e^t \cdot \text{Const.}$$

oder, da $x_1 = x$ für $t = 0$ sein soll:

$$x_1 - m = e^t(x - m)$$

oder auch

$$x_1 = (x - m)e^t + m.$$

Dies sind wieder *projective* Transformationen. Um auch den anderen Weg einzuschlagen, fragen wir nach allen endlichen projectiven Transformationen, welche wie Uf den Punkt (m) und den unendlich fernen Punkt in Ruhe lassen. Eine solche, die den unendlich fernen Punkt in Ruhe lässt, hat nach dem Früheren allgemein die Form:

$$x_1 = \varrho x + \sigma.$$

Für $x = m$ soll $x_1 = m$ werden. Es ist daher $\sigma = (1 - \varrho)m$ und es kommt:

$$x_1 - m = \varrho(x - m). \tag{9}$$

Diese Gleichung stellt ∞^1 endliche paarweis inverse projective Transformationen dar, die eine Gruppe bilden. Um zu beweisen, dass diese Gruppe von $Uf \equiv (x - m)p$ erzeugt wird, ist nur noch zu zeigen, dass sich ϱ so als Function von t wählen lässt, dass (9) die Integralgleichung von (8) wird. Dies aber leistet die Annahme $\varrho = e^t$, wodurch wir zu der vorher gefundenen endlichen Gleichung gelangen.

Vierter Fall. *Viertens* endlich sei

$$Uf \equiv p.$$

Hier erhalten wir die eingliedrige projective Gruppe

$$x_1 = x + t$$

aller Translationen.

Wir bemerken nun noch, dass jede endliche projective Transformation, wie in Satz 3 gesagt wurde, zwei Punkte invariant lässt. Sie gehört daher sicher irgend einer und nur einer unserer eingliedrigen Gruppen an.

Demnach können wir das Theorem aussprechen:

Gesamtergebnis. **Theorem 13:** *Die von einer infinitesimalen projectiven Transformation der Geraden erzeugte eingliedrige Gruppe besteht aus lauter projectiven Transformationen. Die Gruppe aller pro-*

jectiven Transformationen der Geraden zerfällt demnach in ∞^2 eingliedrige Untergruppen mit paarweis inversen Transformationen. Jede endliche projective Transformation der Geraden gehört einer und nur einer derselben an.

Insbesondere hat sich ergeben:

Satz 5: *Jede eingliedrige projective Gruppe der Geraden mit paarweis inversen Transformationen besteht aus allen projectiven Transformationen, welche gerade zwei gewisse Punkte invariant lassen, die auch zusammenfallen können.*

Dadurch, dass wir auf die infinitesimale Transformation Uf eine passende projective Transformation ausüben, können wir immer erreichen, dass der eine bei Uf invariante Punkt ins Unendlichferne rückt. Der Punkt $x = m$ z. B. wird durch

$$x' = \frac{1}{x - m}$$

ins Unendlichferne transformiert. Lässt Uf zwei getrennte Punkte in Ruhe, deren einer dann also unendlich fern liegt, so hat Uf die Form $(x - n)p$ und kann durch die projective Transformation $x' = x - n$ auf die Form xp gebracht werden. Lässt Uf den doppelt zählenden unendlich fernen Punkt invariant, so hat sie die Form p.

Gleichberechtigte Untergruppen.

Bezeichnen wir nun noch diejenigen Untergruppen der dreigliedrigen projectiven Gruppe der Geraden als *mit einander innerhalb dieser Gruppe gleichberechtigt*, welche durch Ausführung irgend einer projectiven Transformation der Geraden in einander übergeführt werden können, so können wir also sagen:

Typen der eingliedrig. Untergruppen.

Theorem 14: *Jede eingliedrige Untergruppe der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden mit paarweis inversen Transformationen ist innerhalb dieser Gruppe gleichberechtigt mit einer der beiden Untergruppen:*

$$\boxed{xp} \qquad \boxed{p}\,.$$

Dass diese beiden nicht in einander überführbar sind, liegt auf der Hand.

§ 2. Die zweigliedrigen Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden.

Zweigliedr. Untergruppen.

Wir fragen nunmehr nach allen *zweigliedrigen* Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden mit paarweis inversen Transformationen, also nach allen continuierlichen Scharen von ∞^2 projectiven Transformationen der Geraden, welche die Gruppeneigen-

schaft haben und zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse enthalten.

Wir stellen zu ihrer Bestimmung diese Betrachtung an: Irgend ein bestimmt gewählter, aber sonst beliebiger Punkt p der Geraden wird von den gesuchten ∞^2 Transformationen in die verschiedenen Punkte der Geraden übergeführt. Weil aber diese nur ∞^1 Punkte enthält, so folgt, dass es sicher in der gesuchten Untergruppe ∞^1 projective Transformationen giebt, die jenen Punkt p in einen bestimmten anderen Punkt überführen, also auch sicher ∞^1 Transformationen, welche den Punkt p in sich verwandeln, ihn in Ruhe lassen. Diese ∞^1 Transformationen bilden natürlich für sich eine Gruppe, denn wenn

$$(p)S = (p), \quad (p)T = (p)$$

ist, so ist auch

$$(p)ST = (p)T = (p).$$

Da ferner mit

$$(p)S = (p)$$

auch

$$(p) = (p)S^{-1}$$

ist, so folgt, dass diese von ∞^1 projectiven Transformationen gebildete Untergruppe zu jeder ihrer Transformationen die inverse enthält. Die gesuchte zweigliedrige Gruppe enthält also ∞^1 eingliedrige Untergruppen mit paarweis inversen Transformationen.

Jede dieser eingliedrigen Untergruppen wird von einer infinitesimalen projectiven Transformation erzeugt*). Mithin enthält die gesuchte zweigliedrige Gruppe auch ∞^1 infinitesimale Transformationen.

Wenn Uf und Vf zwei derselben sind, von denen wir natürlich voraussetzen, dass sie sich nicht nur um einen constanten Factor unterscheiden, so können wir einsehen, dass auch $aUf + bVf$ eine infinitesimale Transformation derselben ist, wie auch die Constanten a, b gewählt sein mögen. Denn die von

$$Uf \equiv \xi p$$

erzeugten endlichen Transformationen haben die Form

$$x_1 = x + \xi t + \cdots,$$

die von

$$Vf \equiv \bar{\xi} p$$

*) Dieser Schluss ist nicht einwandfrei. Es ist ja keineswegs ausgeschlossen, dass die eingliedrige Untergruppe aus *mehreren* continuierlichen Scharen von Transformationen besteht, also keine continuierliche Gruppe ist. Wir halten es aber für angebracht, hier über dies Bedenken schnell hinwegzugehen. Der Hauptsatz im Kap. 9 des zweiten Abschnittes wird eine lückenlose und kurze Bestimmung aller im Texte gesuchten Gruppen liefern. (Siehe Schluss des § 4 des 9. Kap.)

erzeugten die Form

$$x_1 = x + \bar{\xi} t + \cdots.$$

Hier sind die Reihenentwickelungen als Potenzreihen nach t zu denken, die für hinreichend kleine Werte von t convergieren. Alle diese Transformationen gehören der zweigliedrigen Gruppe an, insbesondere also auch diejenigen, die wir erhalten, wenn wir t durch a oder b ersetzen, dabei unter a und b hinreichend kleine Zahlen verstehend. Führen wir die beiden Transformationen

$$x_1 = x + \xi(x) a + \cdots$$

und

$$x_2 = x_1 + \bar{\xi}(x_1) b + \cdots$$

nach einander aus, so müssen wir also wieder eine Transformation der zweigliedrigen Gruppe erhalten. Wir bekommen aber:

$$x_2 = x + \xi a + \cdots + \bar{\xi}(x + \xi a + \cdots) b + \cdots,$$

also, da $\bar{\xi}$ bei hinreichend kleinem a nach Potenzen von a entwickelbar ist:

$$x_2 = x + \xi(x) a + \bar{\xi}(x) b + \cdots.$$

Hier schreiten die Reihen nach Potenzen von a und b fort, und die Glieder höherer als erster Ordnung in a und b sind nicht mitgeschrieben. Wählen wir a und b infinitesimal, indem wir sie durch $a\delta t$ und $b\delta t$ ersetzen, so erhalten wir die folgende infinitesimale Transformation, die ebenfalls der zweigliedrigen Gruppe angehört:

$$x_2 = x + (a\xi + b\bar{\xi})\delta t + \cdots,$$

deren Symbol lautet

$$a\,Uf + b\,Vf.$$

Hiermit ist die obige Behauptung bewiesen.

Sicher lassen die ∞^1 infinitesimalen Transformationen unserer zweigliedrigen Gruppe nicht sämtlich je nur einen (doppeltzählenden) Punkt invariant. Denn wenn Uf den Punkt $x = m$, Vf den Punkt $x = n$ in Ruhe lässt, so kann gesetzt werden:

$$Uf \equiv (x - m)^2 p, \quad Vf \equiv (x - n)^2 p,$$

sodass kommt:

$$a\,Uf + b\,Vf \equiv [a(x - m)^2 + b(x - n)^2] p.$$

Diese Transformation aber lässt bei geeigneter Wahl von a und b zwei verschiedene Punkte in Ruhe.

Andererseits giebt es in der zweigliedrigen Gruppe sicher infinitesimale Transformationen mit nur je einem invarianten Punkte, denn wenn

$$Uf \equiv (x - m)(x - n) p, \quad Vf \equiv (x - r)(x - s) p$$

ist, so ist

$$aUf + bVf \equiv [(a+b)x^2 - (a(m+n) + b(r+s))x + amn + brs]p$$

und hier lassen sich a und b so wählen, dass der quadratische Ausdruck ein vollständiges Quadrat wird, d. h. $aUf + bVf$ nur einen Punkt in Ruhe lässt.

Mithin folgt: Die gesuchte zweigliedrige Gruppe enthält eine discrete Anzahl von infinitesimalen Transformationen, die nur je einen Punkt in Ruhe lassen, und zwar mindestens eine solche Transformation. Führen wir nun auf eine infinitesimale Transformation S unserer gesuchten Gruppe irgend eine Transformation T dieser Gruppe aus, so geht S über in die infinitesimale Transformation $T^{-1}ST$, die ebenfalls der Gruppe angehört. (Siehe Satz 6, § 2 des 3. Kap.) Nach dem Satz 9 des § 2, 3. Kap., folgt ferner, dass, wenn S nur einen Punkt p in Ruhe lässt, dasselbe von $T^{-1}ST$ gilt, indem diese Transformation den Punkt in Ruhe lässt, in den p vermöge T übergeht. Wählen wir nun T auf alle mögliche Weisen aus der gesuchten Gruppe aus, so erhält der neue Punkt, wenn er nicht bei allen diesen Transformationen invariant bleibt, unendlich viele Lagen $(p)T$. Dementsprechend müsste die Gruppe unendlich viele infinitesimale Transformationen enthalten, die nur je einen Punkt in Ruhe liessen. Dies aber ist ausgeschlossen. Mithin ist p invariant.

Existenz eines invar. Punktes.

Alle Transformationen der gesuchten zweigliedrigen Gruppe lassen also einen bestimmten Punkt, etwa den Punkt $x = m$, in Ruhe. Es giebt aber auch gerade nur ∞^2 projective Transformationen der Geraden, welche den Punkt $x = m$ in Ruhe lassen, nämlich die ∞^1 infinitesimalen

$$(x - m)(ax + b)p$$

und die von ihnen erzeugten endlichen. Alle diese bilden eine Gruppe, da die Aufeinanderfolge zweier dieser Transformationen wieder eine projective Transformation ist, die den Punkt $x = m$ in Ruhe lässt. Auch lässt die zu jeder dieser Transformationen inverse eben den Punkt $x = m$ invariant.

Die gesuchte Gruppe enthält die ∞^1 infinitesimalen Transformationen, die linear aus

$$(x - m)p, \quad x(x - m)p$$

oder auch aus

$$(x - m)p, \quad (x - m)^2 p$$

ableitbar sind.

Wenn der invariante Punkt unendlich fern ist, so modificieren sich diese etwas. Alsdann lautet die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe:

$$(ax + b)p$$

und ist also linear aus p und xp ableitbar. Auf diese Form lässt sich die Gruppe, die $x = m$ in Ruhe lässt, dadurch bringen, dass man vermöge der projectiven Transformation

$$x' = \frac{1}{x - m}$$

eine neue Variabele einführt. Unter Benutzung einer im vorigen Paragraphen erklärten Redeweise können wir mithin sagen:

Typus der zweigliedr. Untergruppen.

Satz 6: *Jede in der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden enthaltene zweigliedrige Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen ist innerhalb dieser Gruppe gleichberechtigt mit der Gruppe*

$$\boxed{p, \quad xp}.$$

Die Ergebnisse dieses und des vorigen Paragraphen zusammenfassend, wollen wir noch sagen:

Typen aller proj. Gruppen der Geraden.

Theorem 15: *Jede in der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden enthaltene zweigliedrige Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen lässt sich definieren als der Inbegriff aller projectiven Transformationen, die einen gewissen Punkt der Geraden in Ruhe lassen. Eine eingliedrige Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen besteht aus allen projectiven Transformationen der Geraden, die zwei gewisse, eventuell zusammenfallende, Punkte invariant lassen, während keine derselben noch einen anderen Punkt ungeändert lässt. Jede projective Gruppe der Geraden mit paarweis inversen Transformationen ist vermöge einer geeigneten projectiven Transformation auf einen der Typen zurückführbar:*

$$p, \; xp, \; x^2p;$$

$$p, \; xp;$$

$$p; \qquad xp.$$

Klammerausdruck.

Wir bemerken noch, dass der Klammerausdruck der infinitesimalen Transformationen der zweigliedrigen Gruppe

$$p, \; xp$$

einfach liefert:

$$(p, \; xp) \equiv p.$$

Wir werden später (zunächst im zweiten Abschnitte für projective Gruppen, vgl. Kap. 9) darthun, dass die infinitesimalen Transformationen $U_1 f \cdots U_r f$ einer etwa r-gliedrigen Gruppe stets in der eigentümlichen Beziehung stehen, dass jedes

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} U_s f$$

ist, wo die c_{iks} gewisse Constanten vorstellen. Wenn wir diesen Satz für den Augenblick einmal als schon bewiesen annehmen, so können wir das Problem der Aufsuchung der zweigliedrigen Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene auch so stellen: Ist

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv xp, \quad U_3 f \equiv x^2 p,$$

so soll man aus ihnen zwei sich nicht nur um einen constanten Factor von einander unterscheidende infinitesimale Transformationen mit Hülfe constanter Factoren a, b zusammenstellen, etwa

$$V_1 f \equiv a_1 U_1 f + a_2 U_2 f + a_3 U_3 f,$$
$$V_2 f \equiv b_1 U_1 f + b_2 U_2 f + b_3 U_3 f,$$

sodass $(V_1 V_2)$ sich in der Form ausdrückt:

$$(V_1 V_2) = \alpha V_1 f + \beta V_2 f,$$

in der α, β Constanten bedeuten. Da offenbar

$$(U_1 U_2) \equiv U_1 f, \quad (U_1 U_3) \equiv 2 U_2 f, \quad (U_2 U_3) \equiv U_3 f$$

ist, so kommt also die Forderung:

$$(V_1 V_2) \equiv (a_1 b_2 - a_2 b_1) U_1 f + 2(a_1 b_3 - a_3 b_1) U_2 f + (a_2 b_3 - a_3 b_2) U_3 f$$
$$= (\alpha a_1 + \beta b_1) U_1 f + (\alpha a_2 + \beta b_2) U_2 f + (\alpha a_3 + \beta b_3) U_3 f.$$

Sie zerfällt in drei einzelne zur Bestimmung von a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 und α, β. Man kann zeigen, dass sich diese Forderungen in allgemeinster Weise dadurch erfüllen lassen, dass man $V_1 f$ und $V_2 f$ als lineare Combinationen der beiden infinitesimalen Transformationen $(x-m)p$ und $(x-m)^2 p$ oder von p und xp wählt, sodass man wieder zu den gefundenen Gruppen geführt wird.

Dies hier nur skizzierte Verfahren dient dazu, die Untergruppen an der Hand einer allgemeinen *Methode* ohne Kunstgriffe zu bestimmen, einer Methode, von der wir später ausführlich sprechen werden.

§ 3. Invarianten der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden und ihrer Untergruppen.

Invariante mehrerer Punkte.

Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, ob es bei der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden *Invarianten mehrerer Punkte* giebt, präciser gesagt: Wir greifen mehrere beliebige Punkte (x), (x'), $(x'') \cdots$ heraus, führen sie durch irgend welche projective Transformation in neue Lagen (x_1), (x_1'), $(x_1'') \cdots$ über und untersuchen, ob es Functionen $\Omega(x, x', x'' \cdots)$ giebt, die sich bei allen Transfor-

mationen der dreigliedrigen Gruppe nicht ändern, also stets die Bedingung erfüllen:

$$\Omega(x_1, x_1', x_1'' \cdots) = \Omega(x, x', x'' \cdots).$$

Zunächst müsste eine derartige Function bei der allgemeinen infinitesimalen projectiven Transformation der Geraden

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2)p$$

ungeändert bleiben, also insbesondere auch bei den drei einzelnen

$$p, \quad xp, \quad x^2p.$$

Bei der ersten wächst x um δt, x' entsprechend auch u. s. w., also Ω um

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \cdots\right)\delta t.$$

Bei der zweiten nimmt Ω zu um

$$\left(x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \cdots\right)\delta t$$

und bei der dritten um

$$\left(x^2\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x'^2\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \cdots\right)\delta t.$$

Wir haben also zu verlangen, dass diese drei Incremente Null werden. Dies liefert drei von einander unabhängige partielle Differentialgleichungen für Ω, die ein sogenanntes vollständiges System bilden. Nach der allgemeinen Theorie der vollständigen Systeme (vgl. S. 108) haben sie nur dann eine gemeinsame Lösung Ω, wenn die Zahl der Veränderlichen $x, x' \cdots$ grösser als drei ist.

Invariante von vier Punkten.

Nehmen wir daher zunächst Ω als Function der Abscissen x, x', x'', x''' von vier Punkten an. Dann kommt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{\partial \Omega}{\partial x''} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'''} = 0,$$

$$x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + x''\frac{\partial \Omega}{\partial x''} + x'''\frac{\partial \Omega}{\partial x'''} = 0,$$

$$x^2\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x'^2\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + x''^2\frac{\partial \Omega}{\partial x''} + x'''^2\frac{\partial \Omega}{\partial x'''} = 0.$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass Ω nur von den Differenzen

$$u' \equiv x' - x, \quad u'' \equiv x'' - x, \quad u''' \equiv x''' - x$$

abhängt, sodass sich die zweite Gleichung auch so schreiben lässt:

$$u'\frac{\partial \Omega}{\partial u'} + u''\frac{\partial \Omega}{\partial u''} + u'''\frac{\partial \Omega}{\partial u'''} = 0.$$

Sie ist äquivalent dem simultanen System

$$\frac{du'}{u'} = \frac{du''}{u''} = \frac{du'''}{u'''}$$

und sagt daher aus, dass Ω nur von den Quotienten

$$v \equiv \frac{u''}{u'} \equiv \frac{x''-x}{x'-x}, \quad w \equiv \frac{u'''}{u'} \equiv \frac{x'''-x}{x'-x}$$

abhängt, sodass noch als letzte Differentialgleichung bleibt:

$$(v-1)\,v\,\frac{\partial \Omega}{\partial v} + (w-1)w\,\frac{\partial \Omega}{\partial w} = 0.$$

Äquivalent ist ihr die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dv}{(v-1)v} = \frac{dw}{(w-1)w}$$

oder

$$\frac{dv}{v-1} - \frac{dv}{v} = \frac{dw}{w-1} - \frac{dw}{w},$$

die das Integral hat:

$$\varDelta \equiv \frac{v-1}{v} : \frac{w-1}{w}$$

oder

$$\varDelta \equiv \frac{u''-u'}{u''} : \frac{u'''-u'}{u'''}$$

oder endlich

$$\varDelta \equiv \frac{x''-x'}{x''-x} : \frac{x'''-x'}{x'''-x}.$$

Doppelverhältnis. Dies aber ist eines der *Doppelverhältnisse* der vier Punkte (x), (x'), (x''), (x'''). Bekanntlich haben vier Punkte im ganzen sechs Doppelverhältnisse, deren Werte unter einander zusammenhängen. (Vgl. eine Anmerkung in § 1 des 1. Kap.) Die fünf anderen Doppelverhältnisse sind also von diesem einen abhängig.

Ω ist also notwendig eine Function dieses Doppelverhältnisses. Man kann aber auch zeigen, dass dies Doppelverhältnis $\varDelta$ bei jeder endlichen projectiven Transformation der Geraden invariant bleibt, wie wir in § 2 des 1. Kap. schon gesehen haben. Demnach sagen wir:

Satz 7: *Die einzige Invariante von vier Punkten der Geraden gegenüber der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden ist ihr Doppelverhältnis.*

Invarianten von fünf und mehr Punkten. Fragen wir nach den Invarianten von *fünf* Punkten, so handelt es sich zunächst um die Integration des dreigliedrigen vollständigen Systems:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} + \frac{\partial \Omega}{\partial x''} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'''} + \frac{\partial \Omega}{\partial x^{\mathrm{IV}}} = 0,$$

$$x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x'\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + x''\frac{\partial \Omega}{\partial x''} + x'''\frac{\partial \Omega}{\partial x'''} + x^{\mathrm{IV}}\frac{\partial \Omega}{\partial x^{\mathrm{IV}}} = 0,$$

$$x^2\frac{\partial \Omega}{\partial x} + x'^2\frac{\partial \Omega}{\partial x'} + x''^2\frac{\partial \Omega}{\partial x''} + x'''^2\frac{\partial \Omega}{\partial x'''} + x^{\mathrm{IV}2}\frac{\partial \Omega}{\partial x^{\mathrm{IV}}} = 0$$

in fünf Veränderlichen. Dasselbe besitzt $5 - 3 = 2$ von einander unabhängige Lösungen. Offenbar können wir als diese Lösungen die

Doppelverhältnisse $(xx'x''x''')$ und $(xx'x''x^{IV})$ benutzen, die ja Invarianten und von einander unabhängig sind. Es ergiebt sich also nichts interessantes Neues. Dasselbe gilt von den Invarianten von 6, 7 · · Punkten.

Satz 8: *Die Invarianten von beliebig vielen Punkten der Geraden gegenüber der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden sind beliebige Functionen der Doppelverhältnisse dieser Punkte.*

Invarianten der zweigliedrigen Untergruppen.

Eine jede zweigliedrige Untergruppe

$$(x - m)p, \quad (x - m)^2 p$$

der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden dagegen liefert noch besondere Invarianten. Hier haben schon drei Punkte (x), (x'), (x'') eine Invariante, nämlich das Doppelverhältnis, das sie mit dem invarianten Punkt (m) bilden. Verlegt man den invarianten Punkt ins Unendliche, sodass die Gruppe

$$p, \quad xp$$

kommt, so erhält man die Invariante $\frac{x' - x}{x'' - x}$, auf die sich alsdann das Doppelverhältnis reduciert. Diese zweigliedrige Gruppe lässt demnach das Verhältnis der gegenseitigen Entfernungen von drei Punkten ungeändert. Jede Invariante von vier Punkten ist hier eine Function der beiden Verhältnisse der gegenseitigen Entfernungen derselben u. s. w., was man leicht von vornherein einsieht, aber auch rechnerisch ableiten kann.

Allgemeine proj. Gruppe eines Strahlenbüschels.

Zum Schluss noch eine Bemerkung: Man kann in der Gleichung

$$x_1 = \frac{ax + b}{cx + d}$$

die Veränderliche x anstatt als Coordinate eines Punktes der Geraden als *Coordinate eines Strahles* durch einen festen Punkt deuten. Doch wollen wir zum Unterschied alsdann u statt x schreiben:

$$u_1 = \frac{au + b}{cu + d}.$$

Wenn wir unter u die Tangente des Winkels verstehen, die ein Strahl durch einen festen Punkt mit einem Anfangsstrahl durch diesen Punkt bildet, so ordnet die Transformation jedem Strahle (u) durch diesen festen Punkt einen anderen Strahl (u_1) durch denselben zu, kurz sie giebt eine Transformation der Strahlen eines Büschels. Da nach einer Bemerkung zu Anfang des § 3 des 2. Kap. das Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels gleich dem der Tangenten ihrer Winkel mit einem bestimmten Strahl ist, so folgt auch, dass unsere Trans-

formation stets vier Strahlen in vier Strahlen mit demselben Doppelverhältnis überführt. Man kann auch leicht einsehen, dass die obige Gleichung die allgemeinste derartige Transformation der Strahlen eines Büschels vorstellt, denn nach § 2 des 1. Kap. ist die obige Gleichung die allgemeinste, welche vier Werten u, u', u'', u''' vier solche Werte u_1, u_1', u_1'', u_1''' zuordnet, dass

$$(u_1 u_1' u_1'' u_1''') = (u u' u'' u''')$$

ist. Alle bisherigen Betrachtungen dieses Kapitels lassen sich also ohne Mühe übertragen auf *die allgemeine projective Gruppe der Strahlen eines Strahlenbüschels.*

Diese Übertragung werden wir im nächsten Paragraphen verwerten.

§ 4. Die lineare homogene Gruppe der Ebene.

Als letztes Beispiel einer projectiven Gruppe betrachten wir jetzt die *lineare homogene Gruppe der Ebene*, deren allgemeine Gleichungen lauten:

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy. \tag{10}$$

Nach § 1 des 4. Kapitels stellen diese Gleichungen, sobald sie auch nach x, y auflösbar sind, sobald also die Determinante $ad - bc$, die wir kurz die Determinante der Transformation nennen, von Null verschieden ist, alle diejenigen projectiven Transformationen der (xy)-Ebene dar, welche die unendlich ferne Gerade und überdies den Anfangspunkt in Ruhe lassen. Dass ihr Inbegriff eine Gruppe bildet, folgt aus dem Theorem 11, § 4 des 4. Kap., unmittelbar. Zwei solche Transformationen sind nur dann identisch, wenn a, b, c, d in der einen dieselben Werte haben wie in der anderen. Die Gruppe enthält folglich *vier wesentliche Parameter* und ist *viergliedrig.* Auch enthält sie augenscheinlich zu jeder ihrer Transformationen die *inverse.*

Vier wesentliche Parameter.

Infinitesimale Transmationen.

Für $a = d = 1$, $b = c = 0$ ergiebt sich die *identische* Transformation, also für unendlich wenig davon abweichende Werte der Parameter eine infinitesimale. Danach besitzt die Gruppe die ∞^3 *infinitesimalen Transformationen*

$$Uf \equiv (\alpha x + \beta y)p + (\gamma x + \delta y)q,$$

die linear aus xp, yp, xq, yq ableitbar sind. Jede dieser ∞^3 infinitesimalen Transformationen erzeugt eine eingliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen, und zwar sind diese Transformationen ebenfalls linear und homogen. Es folgt dies unmittelbar aus den Formeln (2), (3), (4) des § 1 des 4. Kap., in denen α_1, β_1, α_2, β_2 durch α, β, γ, δ und a_1, b_1, a_2, b_2 durch a, b, c, d zu ersetzen sind, während

daselbst $\gamma_1 = \gamma_2 = c_1 = c_2 = 0$ angenommen werden muss. Ganz analog den damaligen Folgerungen können wir jetzt den Schluss ziehen:

Zerfallen der Gruppe in eingliedr. Untergruppen.

Satz 9: *Die viergliedrige lineare homogene Gruppe der Ebene zerfällt in ∞^3 eingliedrige Untergruppen mit paarweis inversen Transformationen, deren jede von einer infinitesimalen Transformation der viergliedrigen Gruppe erzeugt wird. Diese infinitesimalen Transformationen sind linear ableitbar aus:*

$$xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq.$$

Jede endliche Transformation der viergliedrigen Gruppe gehört einer oder einer discreten Anzahl der erwähnten eingliedrigen Untergruppen an.

Gleichberechtigte Untergruppen.

Mit einander *innerhalb der linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt* nennen wir wieder solche Untergruppen derselben, die durch lineare homogene Transformation in einander übergeführt werden können. —

Zusammenhang mit der project. Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit.

Die in Rede stehende Gruppe hängt eng zusammen mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden oder eines Strahlenbüschels oder, allgemein gesagt, der einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Wenn wir nämlich

$$\frac{y}{x} = u, \quad \frac{y_1}{x_1} = u_1$$

setzen, so kommt nach (10):

$$u_1 = \frac{c + du}{a + bu}, \tag{11}$$

d. h. die Verhältnisse u werden bei der linearen homogenen Gruppe unter einander transformiert vermöge der allgemeinen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit u. Dass u_1 sich durch u allein ausdrückt, hat seinen geometrischen Grund darin, dass die Gruppe (10) den Anfangspunkt invariant lässt und demnach die Strahlen

$$\frac{y}{x} = \text{Const.}$$

durch den Anfangspunkt unter einander vertauscht. Wir können kurz sagen: Die Strahlen des Büschels durch den Anfangspunkt werden bei der linearen homogenen Gruppe so transformiert, wie die Punkte der Geraden bei der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden. (Vgl. die Schlussbemerkung des § 3.)

Jeder Transformation (10) der linearen homogenen Gruppe der *Punkte* (x, y) gehört dementsprechend eine ganz bestimmte Transformation (1) der allgemeinen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit der *Strahlen* u zu. Sind also T_a, T_b zwei beliebige Transformationen der Gruppe (10), deren Aufeinanderfolge der Trans-

formation $T_{(ab)}$ eben dieser Gruppe äquivalent ist, bezeichnen ferner S_a, S_b die zu T_a, T_b gehörigen Transformationen (11) der Strahlen u und ist schliesslich die Aufeinanderfolge $S_a S_b$ äquivalent der Transformation $S_{(ab)}$ der Gruppe (11), so liegt es in der Natur des geometrischen Zusammenhanges der T und S, dass $T_{(ab)}$ die Strahlen des Büschels $u =$ Const. vermöge $S_{(ab)}$ transformiert.

Danach leuchtet auch ein, *dass jeder Untergruppe der linearen homogenen Gruppe mit paarweis inversen Transformationen auch eine bestimmte Untergruppe der Gruppe* (11) *des Strahlenbüschels oder der einfachen Mannigfaltigkeit u entspricht* (die allerdings wenigergliedrig sein kann) und dass auch die letztere paarweis inverse Transformationen hat.

Nun wissen wir aus Theorem 15 des § 2, dass eine in der Gruppe (11) enthaltene Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen entweder aus allen den Transformationen (11) besteht, die sämtlich ein und denselben Strahl, und zwar jede nur diesen einen, invariant lassen, oder aus allen denen, die zwei bestimmte Strahlen, oder endlich aus allen denen besteht, die einen bestimmten Strahl in Ruhe lassen, während jede der Transformationen ausser diesem einen noch irgend einen anderen Strahl ungeändert lassen kann.

Bestimmung der Untergruppen.

Diese Bemerkungen verwerten wir, um alle in der linearen homogenen Gruppe enthaltenen Untergruppen mit paarweis inversen Transformationen zu bestimmen. Wollten wir direct zwischen den Coefficienten a, b, c, d der linearen homogenen Transformation

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy$$

solche Relationen $\Omega(a, b, c, d) = 0$ festzusetzen suchen, durch welche aus den ∞^4 Transformationen solche ∞^3 oder ∞^2 oder ∞^1 herausgegriffen würden, die eine Gruppe für sich bilden, so würden wir zu gewissen Functionalgleichungen für die Functionen Ω geführt werden, deren Auswertung besondere Schwierigkeiten macht. Durch Verwertung jedoch der gleichzeitigen Transformationen der Strahlen durch den Anfangspunkt lässt sich das Problem ohne grosse Mühe bewältigen, wie wir jetzt zeigen werden. Wir schicken dabei voraus, dass wir von allen mit einander gleichberechtigten Untergruppen nur eine, ihren Typus, zu bestimmen brauchen, um ohne weiteres alle zu kennen.

Durch eine lineare homogene Transformation aber lassen sich zwei beliebige Strahlen des Büschels $u =$ Const. in zwei bestimmte Strahlen desselben überführen. Demnach sagen wir: Wir suchen diejenigen Untergruppen der linearen Gruppe, bei denen

A) entweder alle Strahlen $u = \text{Const.}$
B) oder nur ein (doppeltzählender) Strahl $u = 0$
C) oder zwei Strahlen $u = 0$ und $u = \infty$
D) oder ein Strahl $u = \infty$
E) oder kein Strahl

invariant bleiben. In diesen fünf Fällen erfährt u *alle* Transformationen von der Form:

$$A)\ u_1 = u$$
$$B)\ u_1 = u + m$$
$$C)\ u_1 = mu$$
$$D)\ u_1 = mu + n$$
$$E)\ u_1 = \frac{au + b}{cu + d},$$

in denen also m, n, a, b, c, d willkürliche Parameter bezeichnen. Die Fälle B, C, D, E entsprechen den in Theorem 15 des § 2 angegebenen typischen Formen p; xp; p, xp; p, xp, x^2p der allgemeinen projectiven Gruppe, geschrieben in x statt u.

Wir erledigen die fünf Fälle nach einander.

A) Hier ist

Erster Fall.

$$u_1 = u$$

oder

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x},$$

d. h., da x_1 und y_1 sich linear und homogen durch x, y ausdrücken sollen:

$$y_1 = \varrho y, \quad x_1 = \varrho x.$$

Es ist dies die eingliedrige Gruppe:

$$\boxed{xp + yq}.$$

B) Hier ist

Zweiter Fall.

$$u_1 = u + m,$$

also

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y + mx}{x},$$

daher:

$$x_1 = \varrho x, \quad y_1 = \varrho(y + mx).$$

m ist willkürlich. Ist ϱ keine Function von m, sondern auch willkürlich, so ist dies eine zweigliedrige Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen und kann auch so geschrieben werden:

$$x_1 = \varrho x, \quad y_1 = \varrho y + \sigma x.$$

Ihre allgemeine infinitesimale Transformation erhält man, indem man $\varrho = 1 + \mathfrak{a}\delta t$, $\sigma = \mathfrak{b}\delta t$ setzt, in der Form

$$\mathfrak{a}(xp + yq) + \mathfrak{b}xq.$$

Sie ist offenbar linear ableitbar aus:

$$\boxed{xq \quad xp + yq}.$$

Wenn aber zwischen ϱ und m eine Relation besteht, wenn also die gesuchte Gruppe nur eingliedrig ist, so muss diese sicher ϱ enthalten, denn sonst wäre $m =$ Const., was ja ausgeschlossen ist. Sei also:

$$\varrho = \varphi(m)$$

die Relation. Führen wir nun zwei der Transformationen, etwa:

$$x_1 = \varphi(m)x, \quad y_1 = \varphi(m)(y + mx),$$
$$x_2 = \varphi(m_1)x_1, \quad y_2 = \varphi(m_1)(y_1 + m_1x_1)$$

nach einander aus, so kommt:

$$x_2 = \varphi(m)\varphi(m_1)x, \quad y_2 = \varphi(m)\varphi(m_1)(y + (m + m_1)x).$$

Dies aber soll wieder eine Transformation der Untergruppe sein. Sie muss daher die Gestalt haben:

$$x_2 = \varphi(M)x, \quad y_2 = \varphi(M)(y + Mx).$$

Es ist aber $M = m + m_1$, und φ muss die Functionalgleichung erfüllen:

$$\varphi(m + m_1) = \varphi(m)\varphi(m_1). \tag{12}$$

Durch Differentiation nach m resp. m_1 folgt hieraus:

$$\frac{\partial \varphi(m + m_1)}{\partial m} = \varphi'(m)\varphi(m_1),$$
$$\frac{\partial \varphi(m + m_1)}{\partial m_1} = \varphi(m)\varphi'(m_1).$$

Die linken Seiten sind beide gleich $\varphi'(m + m_1)$ und also ist auch

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)} = \frac{\varphi'(m_1)}{\varphi(m_1)}.$$

Demnach ist dieser Bruch eine bestimmte Zahl c und also:

$$\log \varphi(m) \equiv cm + \text{Const.},$$
$$\varphi(m) \equiv \gamma e^{cm}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Functionalgleichung (12) ein, so kommt:

$$\gamma e^{c(m+m_1)} = \gamma^2 e^{c(m+m_1)},$$

also $\gamma = \gamma^2$. Da $\varphi(m)$ sicher verschieden von Null sein muss, so ist $\gamma = 1$, und die Gleichungen der Gruppe lauten:

$$x_1 = e^{cm}x, \quad y_1 = e^{cm}y + me^{cm}x.$$

Sie stellen in der That eine eingliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen dar. Ihre infinitesimale Transformation ergiebt sich, wenn $m = \delta t$ gesetzt wird, in der Form

$$cxp + (cy + x)q$$

oder:

$$\boxed{xq + c(xp + yq)}.$$

C) Wir setzen jetzt: **Dritter Fall.**

$$u_1 = mu$$

oder

$$\frac{y_1}{x_1} = m\,\frac{y}{x},$$

d. h.

$$x_1 = \varrho x, \quad y_1 = \varrho m y.$$

Besteht zwischen ϱ und m keine Relation, so ist dies offenbar eine zweigliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen. Ihre allgemeine infinitesimale Transformation liefert die Annahme $\varrho = 1 + \mathfrak{a}\delta t$, $m = 1 + \mathfrak{b}\delta t$ in der Form:

$$\mathfrak{a}(xp + yq) + \mathfrak{b}yq.$$

Sie ist also linear aus $xp + yq$ und yq oder also aus

$$\boxed{xp \quad yq}$$

ableitbar.

Wenn aber ϱ eine Function des Parameters m ist, so ist die gesuchte Gruppe bloss eingliedrig. Sei also etwa:

$$\varrho = \psi(m),$$

so liefert die Aufeinanderfolge von:

$$x_1 = \psi(m)x, \quad y_1 = m\psi(m)y;$$

$$x_2 = \psi(m_1)x_1, \quad y_2 = m_1\psi(m_1)y_1$$

die Transformation

$$x_2 = \psi(m)\psi(m_1)x, \quad y_2 = mm_1\psi(m)\psi(m_1)y.$$

Sie soll auch der Gruppe angehören, d. h. die Form haben:

$$x_2 = \psi(M)x, \quad y_2 = M\psi(M)y.$$

Es muss daher $M = mm_1$ und ψ Lösung der Functionalgleichung

$$\psi(mm_1) = \psi(m)\cdot\psi(m_1) \tag{13}$$

sein. Setzen wir

$$\log m = \mu, \quad \log m_1 = \mu_1$$

und

$$\psi(m) = \psi(e^{\mu}) = \varphi(\mu), \quad \psi(m_1) = \psi(e^{\mu_1}) = \varphi(\mu_1),$$

so kommt:

$$\varphi(\mu + \mu_1) = \varphi(\mu) \cdot \varphi(\mu_1),$$

d. h. wie oben ist

$$\varphi(\mu) = e^{c\mu}$$

und daher

$$\psi(m) = m^c.$$

Hierdurch wird die Functionalgleichung (13) erfüllt, und unsere Gruppe hat die Gleichungen:

$$x_1 = m^c x, \quad y_1 = m^{c+1} y,$$

in denen c eine bestimmte Zahl bedeutet. Ihre infinitesimale Transformation liefert die Annahme $m = 1 + \delta t$ in der Form

$$\boxed{cxp + (c+1)yq}\,.$$

Vierter Fall. D) Jetzt nehmen wir an, u werde in dieser Weise transformiert:

$$u_1 = mu + n.$$

Hier ist

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{my + nx}{x}$$

und demnach

$$x_1 = \varrho x, \quad y_1 = \varrho(my + nx)$$

zu setzen. Ist ϱ wie m und n völlig willkürlich, so stellen diese Gleichungen offenbar wirklich eine dreigliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen dar. Für $\varrho = 1 + \mathfrak{a}\delta t$, $m = 1 + \mathfrak{b}\delta t$, $n = \mathfrak{c}\delta t$ ergiebt sich ihre allgemeinste infinitesimale Transformation:

$$\mathfrak{a}(xp + yq) + \mathfrak{b}yq + \mathfrak{c}xq,$$

die linear ableitbar ist aus:

$$\boxed{xp \quad yq \quad xq}\,.$$

Es ist aber auch denkbar, dass ϱ eine Function von m und n bedeutet:

$$\varrho = F(m, n),$$

dass also die gesuchte Gruppe nur zweigliedrig ist. In diesem Falle betrachten wir alle diejenigen unserer Transformationen:

$$x_1 = F(m,n)x, \quad y_1 = F(m,n)(my + nx), \tag{14}$$

die ausser dem Strahl $u = \infty$ (der y-Axe) auch den Strahl $u = 0$ invariant lassen. Da im allgemeinen

$$u_1 = mu + n$$

ist und die Gleichung

$$u = mu + n$$

noch durch

$$u = \frac{n}{1 - m}$$

erfüllt wird, so lassen alle diejenigen Transformationen unserer Gruppe noch den Strahl $u = 0$ invariant, für die $n = 0$ ist. Alle diese ∞^1 Transformationen:

$$x_1 = F(m, 0)x, \quad y_1 = F(m, 0)my$$

bilden natürlich eine eingliedrige Untergruppe der gesuchten Gruppe mit paarweis inversen Transformationen, bei der

$$u_1 = mu$$

ist, die wir also schon unter C bestimmt haben. Sie hat danach die Form:

$$(15) \qquad x_1 = m^c x, \quad y_1 = m^{c+1} y.$$

Unsere Gruppe (14) enthält also unter anderen diese ∞^1 Transformationen (15), in denen c eine bestimmte Zahl bedeutet. Andererseits betrachten wir alle diejenigen ∞^1 Transformationen unserer Gruppe, welche *nur* den Strahl $u = \infty$ invariant lassen, für die also

$$u_1 = u + n$$

oder $m = 1$ ist. Dieselben bilden eine eingliedrige Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen, die wir unter B bestimmt haben:

$$(16) \qquad x_1 = e^{an} x, \quad y_1 = e^{an}(y + nx)$$

(wo jetzt n statt des dortigen m, a statt c gesetzt ist). Hierin bedeutet a eine bestimmte Zahl.

Nun muss die gesuchte Gruppe auch jede Transformation enthalten, die durch Aufeinanderfolge der Transformation (16) und einer Transformation von der Form (15), etwa dieser:

$$x_2 = m^c x_1, \quad y_2 = m^{c+1} y_1,$$

hervorgeht. Es kommt:

$$(17) \qquad x_2 = m^c e^{an} x, \quad y_2 = m^{c+1} e^{an}(y + nx),$$

m und n sind hierin willkürlich. Diese Gleichungen stellen immer, ob nun a und c Null sind oder nicht, ∞^2 und nicht nur ∞^1 Transformationen dar, denn sie umfassen ja sicher die ∞^1 Transformationen (15), wie auch die ∞^1 davon verschiedenen Transformationen (16). Daher müssen die Gleichungen (17) alle ∞^2 Transformationen der gesuchten Gruppe darstellen. Führen wir nun zwei Transformationen von der Form (17) nach einander aus:

$$x_1 = m^c e^{an} x, \qquad y_1 = m^{c+1} e^{an}(y + nx);$$
$$x_2 = m_1^c e^{an_1} x_1, \quad y_2 = m_1^{c+1} e^{an_1}(y_1 + n_1 x_1),$$

so ergiebt sich die Transformation:

$$x_2 = (mm_1)^c e^{a(n+n_1)} x,$$
$$y_2 = (mm_1)^c e^{a(n+n_1)} (mm_1 y + (mm_1 n + m_1 n_1) x).$$

Dieselbe muss ebenfalls der Gruppe angehören, also die Form haben:

$$x_2 = M^c e^{aN} x, \quad y_2 = M^{c+1} e^{aN} (y + Nx).$$

Es muss folglich möglich sein, M und N so zu bestimmen, dass:

$$M^c e^{aN} = (mm_1)^c e^{a(n+n_1)},$$
$$M^{wc+1} e^{aN} = (mm_1)^{c+1} e^{a(n+n_1)},$$
$$M^{c+1} e^{aN} N = (mm_1)^c e^{a(n+n_1)} (mm_1 n + m_1 n)$$

ist. Division der zweiten Gleichung durch die erste giebt:

$$M = mm_1,$$

sodass sich die Gleichungen reducieren auf:

$$e^{aN} = e^{a(n+n_1)},$$
$$e^{aN} N = e^{a(n+n_1)} \left(n + \frac{n_1}{m}\right).$$

Aus diesen aber folgt:

$$N = n + \frac{n_1}{m}$$

und

$$e^{a\left(n+\frac{n_1}{m}\right)} = e^{a(n+n_1)}.$$

Da n, n_1 und m völlig willkürlich sind, so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn $a = 0$ ist. Folglich lauten die Gleichungen der gesuchten Gruppe, die wir oben in der Form (17) geschrieben hatten, nunmehr so:

$$x_1 = m^c x, \quad y_1 = m^{c+1}(y + nx).$$

Auch enthält diese Gruppe zu jeder ihrer Transformationen die inverse. Indem man $m = 1 + \mathfrak{a}\delta t$, $n = \mathfrak{b}\delta t$ setzt, findet man die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe:

$$\mathfrak{a}(cxp + (c+1)yq) + \mathfrak{b}xq,$$

die linear ableitbar ist aus

$$\boxed{cxp + (c+1)yq \quad xq}.$$

Wir fügen hinzu: Diese Gruppe enthält die ∞^1 Transformationen (16), welche *nur* den Strahl $u = \infty$ in Ruhe lassen und, da $a = 0$ ist, die Form haben:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + nx.$$

Die Determinante dieser Transformationen ist gleich 1.

Dasselbe gilt natürlich für jede mit dieser Gruppe gleichberechtigte:

Jede zweigliedrige Gruppe, welche einen Strahl invariant lässt, enthält ∞^1 Transformationen mit der Determinante 1, welche *nur* diesen einen Strahl in Ruhe lassen.

Fünfter Fall.

E) Wir kommen jetzt zur letzten Annahme:

$$u_1 = \frac{au + b}{cu + d}$$

oder

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{ay + bx}{cy + dx},$$

welche liefert:

$$x_1 = \varrho(cy + dx), \quad y_1 = \varrho(ay + bx).$$

Im Gegensatz zu den obigen Fällen bedeuten hier a, b, c, d willkürliche Parameter, von denen übrigens, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, etwa $d = 1$ angenommen werden kann:

$$x_1 = \varrho(cy + x), \quad y_1 = \varrho(ay + bx).$$

Entweder ist nun auch ϱ völlig willkürlich. Diese Annahme liefert die allgemeine lineare homogene Gruppe:

$$\boxed{xp \quad yp \quad xq \quad yq}.$$

Oder aber ϱ ist eine Function von a, b, c:

$$\varrho = F(a, b, c).$$

Alsdann ist die gesuchte Gruppe nur dreigliedrig. Betrachten wir unter ihren ∞^3 Transformationen diejenigen ∞^2, bei denen ein beliebig aber bestimmt ausgewählter Strahl u invariant bleibt. Dieselben müssen offenbar eine zweigliedrige Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen bilden, und, da bei ihnen ein Strahl invariant bleibt, eine zweigliedrige Gruppe, die gleichberechtigt ist mit der unter *D* bestimmten zweigliedrigen Gruppe. Aus der Schlussbemerkung zu *D* folgt demnach: Die jetzt gesuchte Gruppe enthält ∞^1 Transformationen mit der Determinante 1, welche einen beliebig gewählten bestimmten Strahl u und nur diesen invariant lassen. Also umfasst sie, da es ∞^1 solche Strahlen giebt, ∞^2 Transformationen mit der Determinante 1, deren jede nur einen (doppeltzählenden) Strahl in sich überführt. Diese ∞^2 Transformationen sind zu einander paarweis invers, bilden aber doch keine zweigliedrige Gruppe, denn weder unter *D* noch unter *C* haben wir eine zweigliedrige Gruppe gefunden, deren sämtliche Transformationen je *nur einen* Strahl in sich überführen. Es giebt also factisch keine solche zweigliedrige Gruppe. Mit anderen Worten: Führt man nach einer jener ∞^2 Transformationen eine andere derselben aus, so kann man nicht stets wieder eine jener

∞^2 Transformationen erhalten. Es müssen sich so vielmehr mindestens ∞^3 Transformationen ergeben. Jene ∞^2 Transformationen aber haben die Determinante 1. Nach Satz 2, § 1 des 4. Kap., aber ist ihre Aufeinanderfolge äquivalent mit einer Transformation, die ebenfalls die Determinante 1 besitzt. Somit folgt: Die gesuchte Gruppe enthält ∞^3 Transformationen mit der Determinante 1. Andererseits giebt es unter den ∞^4 Transformationen:

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy$$

gerade ∞^3, deren Determinante

$$ad - bc = 1$$

ist und dieselben bilden nach jenem citierten Satz für sich eine Gruppe mit offenbar paarweis inversen Transformationen. Also ist unser Ergebnis: Die gesuchte Untergruppe ist identisch mit der *dreigliedrigen Gruppe aller linearen homogenen Transformationen mit der Determinante Eins.* Nach § 2 des 4. Kap. folgt auch noch unmittelbar, dass die allgemeinste infinitesimale Transformation derselben linear aus

Untergruppe mit der Determinante Eins.

$$\boxed{xq \quad xp - yq \quad yp}$$

ableitbar ist. —

Hiermit ist die Bestimmung der Untergruppen der linearen homogenen Gruppe zu Ende. Bei der unter B bestimmten eingliedrigen Gruppe

$$x_1 = e^{cm}x, \quad y_1 = e^{cm}y + me^{cm}x$$

ist noch zu bemerken, dass c durch Ausführung einer passenden linearen homogenen Transformation — welche diese Gruppe in eine gleichberechtigte überführt — gleich 1 gemacht werden kann, sobald es nicht gleich 0 ist. Denn führt man vermöge

$$x' = \frac{x}{c}, \quad y' = y$$

neue Variabeln ein, indem man analog

$$x_1' = \frac{x_1}{c}, \quad y_1' = y_1$$

setzt, so kommt:

$$x_1' = e^{cm}x', \quad y_1' = e^{cm}y' + cme^{cm}x',$$

oder, wenn man cm mit m bezeichnet und die nun unnötigen Accente streicht:

$$x_1 = e^m x, \quad y_1 = e^m y + me^m x.$$

Es ist dies die obige Gruppe, in der aber $c = 1$ gesetzt ist. Ihre infinitesimale Transformation ist:

$$\boxed{xq + xp + yq}.$$

Die für $c = 0$ hervorgehende Gruppe

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + mx$$

hat die infinitesimale Transformation:

$$\boxed{xq}.$$

Diese beiden Gruppen lassen sich nicht durch lineare homogene Transformation in einander überführen. Die letzte nämlich enthält im Gegensatz zur ersten nur Transformationen S mit der Determinante 1, die immer wieder in Transformationen mit der Determinante 1 übergehen, wenn man vermöge einer linearen homogenen Transformation T neue Variabeln überführt. Denn dann kommt $T^{-1}ST$ (nach Satz 6, § 2 des Kap. 3), und diese hat, wenn T die Determinante Δ besitzt, nach Satz 2, § 1 des Kap. 4, die Determinante:

$$\frac{1}{\Delta} \cdot 1 \cdot \Delta = 1.$$

Es liegt ferner in der Natur der Sache, dass überhaupt keine zwei der obenbestimmten Gruppentypen in einander durch lineare homogene Transformation übergeführt werden können, da stets zwei gleichviel-gliedrige ein verschiedenes Verhalten hinsichtlich der Transformation des Büschels $u =$ Const. zeigen, das nicht durch lineare Transformation auszugleichen ist.

Zusammenstellung aller lin. homogenen Gruppen.

Theorem 16: *Jede continuierliche lineare homogene Gruppe in zwei Veränderlichen x, y mit paarweis inversen Transformationen ist durch Ausführung einer geeigneten linearen homogenen Transformation auf einen der folgenden Typen zurückführbar, in denen $t, t_1, t_2 \cdots$ die willkürlichen Parameter bezeichnen:*

4-gliedrig: 1) $x_1 = t_1 x + t_2 y, \quad y_1 = t_3 x + t_4 y,$

3-gliedrig: 2) $x_1 = t_1 x + t_2 y, \quad y_1 = t_3 x + t_4 y,$ wo $t_1 t_4 - t_2 t_3 = 1$ ist.

3) $x_1 = t_1 x, \quad y_1 = t_2 y + t_3 x,$

2-gliedrig: 4) $x_1 = t_1 x, \quad y_1 = t_1 y + t_2 x,$

5) $x_1 = t_1 x, \quad y_1 = t_2 y,$

6) $x_1 = t_1^c x, \quad y_1 = t_1^{c+1}(y + t_2 x),$

1-gliedrig: 7) $x_1 = tx, \quad y_1 = ty,$

8) $x_1 = e^t x, \quad y_1 = e^t y + te^t x,$

9) $x_1 = x, \quad y_1 = y + tx,$

10) $x_1 = t^c x, \quad y_1 = t^{c+1} y.$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation der betreffenden Gruppe ist jedesmal linear ableitbar aus den folgenden:

$$1) \quad \boxed{xp \quad yp \quad xq \quad yq}$$

$$2) \quad \boxed{xq \quad xp - yq \quad yp} \qquad 3) \quad \boxed{xp \quad yq \quad xq}$$

$$4) \quad \boxed{xq \quad xp + yq} \qquad 5) \quad \boxed{xp \quad yq} \qquad 6) \quad \boxed{cxp + (c+1)yq \quad xq}$$

$$7) \quad \boxed{xp + yq} \quad 8) \quad \boxed{xq + xp + yq} \quad 9) \quad \boxed{xq} \quad 10) \quad \boxed{cxp + (c+1)yq}\,.$$

Die in 6) und 10) auftretenden Constanten c lassen sich, wie eine nähere Untersuchung zeigt, nicht weiter specialisieren.

Wir bemerken noch, dass wir später diese Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppen an der Hand einer *allgemeinen Methode* auf kürzerem Wege bestimmen werden.

Die dreigliedrige Untergruppe:

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy,$$
$$ad - bc = 1,$$

Specielle lin. hom. Gruppe.

führt den Namen der *speciellen linearen homogenen Gruppe.* Wir können uns die Aufgabe stellen, die Typen von Untergruppen derselben zu bestimmen. Dabei werden wir zwei solche Untergruppen derselben als *gleichberechtigt innerhalb der speciellen linearen homogenen Gruppe* bezeichnen, welche durch eine lineare homogene Transformation *mit der Determinante* 1 in einander überführbar sind, und für jede Schar gleichberechtigter einen Typus aufsuchen.

Gleichberechtigte Untergruppen derselben.

Dabei ist Folgendes zu beachten: Ist T irgend eine Transformation der linearen homogenen Gruppe mit der Determinante Δ, und bezeichnet man die Transformation

$$x_1 = \sqrt{\Delta}\, x, \quad y_1 = \sqrt{\Delta}\, y,$$

welche die Determinante Δ hat, mit T_0, so ist offenbar $T T_0^{-1}$ eine Transformation mit der Determinante 1, die T heissen möge. Auch ist T_0 wie T_0^{-1} mit jeder linearen homogenen Transformation vertauschbar. Wenn nun die Transformationen einer Untergruppe der *speciellen* Gruppe mit S bezeichnet werden, und wenn diese Untergruppe innerhalb der *allgemeinen* Gruppe gleichberechtigt ist mit der Untergruppe Σ, etwa dadurch, dass die Ausführung der linearen homogenen Transformation T mit Determinante Δ auf die S die Σ liefert:

$$T^{-1} S T = \Sigma,$$

so ist wegen:

$$T T_0^{-1} = \mathsf{T} \text{ oder } T = \mathsf{T} T_0$$

auch

$$(\mathsf{T} T_0)^{-1} S \mathsf{T} T_0 = \Sigma.$$

Aus $T = \mathsf{T} T_0$ folgt aber $1 = \mathsf{T} T_0 T^{-1}$, daher $T_0^{-1} \mathsf{T}^{-1} = T_0^{-1} = (\mathsf{T} T_0)^{-1}$, sodass sich ergiebt:

$$T_0^{-1} \mathsf{T}^{-1} S \mathsf{T} T_0 = \Sigma.$$

Hierin kann T_0 mit allen vorkommenden Transformationen in der Reihenfolge vertauscht, also an die zweite Stelle gesetzt werden. Da aber $T_0^{-1} T_0 = 1$ ist, so bleibt dann nur übrig:

$$\mathsf{T}^{-1} S \mathsf{T} = \Sigma,$$

in Worten: Auch T führt die Gruppe der S in die der Σ über. T aber ist eine Transformation der *speciellen* Gruppe.

Mithin:

Satz 10: *Sind zwei Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe der Ebene mit einander gleichberechtigt innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, so sind sie auch mit einander gleichberechtigt innerhalb der speciellen Gruppe.*

Demnach ergeben sich alle Typen von Untergruppen der speciellen Gruppe, indem man die Typen von Untergruppen der allgemeinen auswählt, die zugleich der speciellen Gruppe ganz angehören. Hierher gehören die Typen 2), 6) für $c = -\frac{1}{2}$, 9), 10) für $c = -\frac{1}{2}$ des Theorems 16. Wir sagen daher:

Typen der Untergruppen der speciellen lin. hom. Gruppe.

Theorem 17: *Jede continuierliche lineare homogene Gruppe in zwei Veränderlichen x, y mit paarweis inversen Transformationen, deren sämtliche Transformationen die Determinante Eins haben, lässt sich durch Ausführung einer geeigneten linearen homogenen Transformation, die ebenfalls die Determinante Eins hat, auf einen der folgenden Typen zurückführen:*

xq	$xp - yq$	yp

$xp - yq$	xq

xq

$xp - yq$

.

Sie besteht also entweder aus allen Transformationen mit der Determinante Eins oder aus denen, welche sämtlich ein und denselben Strahl durch den Anfangspunkt, oder aus denen, deren jede nur diesen einen Strahl, oder endlich aus denen, welche sämtlich dieselben zwei Strahlen durch den Anfangspunkt in sich transformieren.

Beziehung zur proj. Gruppe der einf. Mannigfaltigkeit.

Zwischen der speciellen linearen homogenen Gruppe der (xy)-Ebene und der allgemeinen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit $u = \frac{y}{x}$ besteht ein enger *Zusammenhang:*

Zu jeder Transformation

$$x_1 = ax + by, \quad y_1 = cx + dy, \quad ad - bc = 1$$

der ersteren ist eine Transformation der Strahlen u

$$u_1 = \frac{c + du}{a + bu}$$

zugeordnet. Bezeichnen wir die Transformationen der einen Gruppe mit S_α, $S_\beta \ldots$, die entsprechenden der anderen mit T_α, $T_\beta \ldots$, so folgt aus der geometrischen Beziehung, dass mit

$$S_\alpha S_\beta = S_{(\alpha\beta)}$$

auch

$$T_\alpha T_\beta = T_{(\alpha\beta)},$$

d. h. der der Aufeinanderfolge von S_α und S_β äquivalenten Transformation $S_{(\alpha\beta)}$ ist eben die Transformation $T_{(\alpha\beta)}$ der Strahlen des Büschels zugeordnet, die der Aufeinanderfolge von T_α und T_β äquivalent ist. Eine ähnliche Beziehung haben wir schon oben bei der *allgemeinen* linearen homogenen Gruppe angedeutet. Während dort aber umgekehrt zu einer vorgelegten Transformation der Strahlen:

$$u_1 = \frac{c + du}{a + bu}$$

∞^1 Transformationen der allgemeinen linearen Gruppe construiert werden können, welche die Strahlen in der vorgeschriebenen Weise vertauschen, nämlich diese:

$$x_1 = \varrho(ax + by), \quad y_1 = \varrho(cx + dy),$$

so ist doch unter diesen nur eine *discrete* Anzahl von Transformationen vorhanden, die der *speciellen* Gruppe angehören. Es sind dies die beiden, in denen ϱ gemäss der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} \varrho a & \varrho b \\ \varrho c & \varrho d \end{vmatrix} = 1$$

oder also in der Form

$$\varrho = \frac{\pm 1}{\sqrt{ad - bc}}$$

anzunehmen ist. Jeder projectiven Transformation der einfachen Mannigfaltigkeit u entsprechen also in der *speciellen* linearen homogenen Gruppe nur zwei — nicht unendlich viele — Transformationen. Man nennt diese enge Beziehung zwischen beiden Gruppen den *holoedrischen Isomorphismus*, während man die Beziehung zwischen der Gruppe in u und der *allgemeinen* linearen Gruppe, bei der jeder Transformation der ersteren ∞^1 Transformationen der letzteren zugehören, als *meroedrischen Isomorphismus* bezeichnet. Doch wollen wir hiermit den in der Gruppentheorie sehr wichtigen Begriff des Isomorphismus nur flüchtig angedeutet haben.

Isomorphismus.

Wir bemerken nur noch, dass die zu

$$Vf \equiv (ax + by)p + (cx - ay)q,$$

der allgemeinen infinitesimalen Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe, gehörige infinitesimale Transformation Uf der Grösse $u = \frac{y}{x}$ leicht berechnet werden kann. Es ist ja:

$$\delta u \equiv \frac{x\delta y - y\delta x}{x^2}$$

und daher erfährt u das Increment:

$$\delta u \equiv \left(\frac{cx - ay}{x} - u\,\frac{ax + by}{x}\right)\delta t$$
$$\equiv (c - 2au - bu^2)\,\delta t,$$

sodass

$$Uf \equiv (c - 2au - bu^2)\frac{df}{du}$$

ist.

Abteilung II.

Theorie der projectiven Gruppen in der Ebene.

Wir beginnen in dieser Abteilung mit der eigentlichen Gruppentheorie, indem wir zunächst den *Begriff einer endlichen continuierlichen Transformationsgruppe* in der Ebene feststellen und darauf einige allgemeine Sätze über beliebige derartige Gruppen entwickeln. Unter anderem werden wir finden, dass sich die Transformationen einer Gruppe in Scharen anordnen lassen, deren jede eine von einer infinitesimalen Transformation erzeugte *eingliedrige Gruppe* darstellt. Darauf wenden wir uns insbesondere zur Betrachtung der *projectiven Gruppen der Ebene*, die hiernach in lauter eingliedrige projective Gruppen zerfallen. Wir werden *einen sehr wichtigen Satz über die Klammerausdrücke der infinitesimalen Transformationen der betreffenden eingliedrigen Gruppen* beweisen und schliesslich durch verhältnismässig einfache Rechnungen das wichtige Problem der *Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene* erledigen.

Hierbei bemerken wir vorweg, dass wir uns die vorkommenden allgemeinen Functionen immer als *analytische Functionen* denken, als Functionen also, die sich in der Umgebung der in Betracht kommenden Wertsysteme nach dem Taylor'schen Satze in Potenzreihen entwickeln lassen.

Kapitel 6.

Endliche continuierliche Transformationsgruppen in der Ebene.

Indem wir uns vornehmen, in diesem Kapitel den Begriff einer endlichen continuierlichen Transformationsgruppe der Ebene allgemein zu entwickeln, bemerken wir vorweg, dass die in der ersten Abteilung betrachteten Gruppen von besonderer Beschaffenheit viele Beispiele für die folgenden Theorien liefern. Dennoch werden wir noch öfters neue Beispiele da angeben, wo dies besonders erwünscht erscheinen muss.

§ 1. Schar von Transformationen.

Trans-formation.

Zwei Gleichungen von der Form

(1) $$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \cdots a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \cdots a_r),$$

von denen vorausgesetzt wird, dass sie auch nach x, y auflösbar seien, stellen, wenn in ihnen den Grössen $a_1 \cdots a_r$ bestimmte Zahlenwerte gegeben werden, eine bestimmte *Transformation* dar, die alle Punkte (x, y) der Ebene in neue Punkte (x_1, y_1) überführt. Geben wir den Grössen $a_1 \cdots a_r$ alle möglichen bestimmten Zahlenwerte, so erhalten wir eine *Schar von Transformationen* mit den *Parametern* $a_1 \cdots a_r$.

Schar von Transformationen. Parameter.

Erteilen wir den Parametern $a_1 \cdots a_r$ auf zwei verschiedene Arten bestimmte Zahlenwerte, so sind zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder sind dann die beiden zugehörigen Transformationen von einander verschieden, oder aber sie stimmen überein, d. h. sie ordnen beide einem beliebigen Punkte (x, y) allgemeiner Lage denselben Punkt (x_1, y_1) zu.

Wir wollen einmal den Parametern $a_1 \cdots a_r$ gewisse bestimmte, aber allgemein gewählte Werte $a_1^0 \cdots a_r^0$ beilegen, sodass wir die Transformation erhalten:

(2) $$x_1 = \varphi(x, y, a_1^0 \cdots a_r^0), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1^0 \cdots a_r^0).$$

Wenn wir uns dann fragen, ob es noch andere Wertsysteme der $a_1 \cdots a_r$ giebt, für welche die Transformation (1) mit dieser übereinstimmt, so werden wir für $a_1 \cdots a_r$ solche Zahlen zu bestimmen suchen, dass

$$\varphi(x, y, a_1 \cdots a_r) = \varphi(x, y, a_1^0 \cdots a_r^0),$$
$$\psi(x, y, a_1 \cdots a_r) = \psi(x, y, a_1^0 \cdots a_r^0)$$

wird und zwar für alle Werte x, y. Ist dies nicht zu erreichen, so liegt die erste der angegebenen Möglichkeiten vor. Lassen sich aber derartige Werte angeben, so sind wieder zwei Fälle denkbar: Entweder giebt es nur eine discrete (endliche oder unendlich grosse) Anzahl solcher Wertsysteme, oder aber es sind unendlich viele continuierlich auf einander folgende vorhanden.

Beispiele.

Z. B. wenn die Transformationen vorliegen:

(3) $$x_1 = x + a_1, \quad y_1 = y + a_2,$$

so geben verschiedene Wertsysteme der a_1, a_2 auch stets verschiedene Transformationen. Dagegen in der Schar der Transformationen:

(4) $$x_1 = x + a_1^2, \quad y_1 = y + a_2$$

stimmt die Transformation (a_1, a_2) mit der Transformation $(-a_1, a_2)$ überein. In der Schar

(5) $$x_1 = x + \operatorname{tg} a_1, \quad y_1 = y + a_2$$

stimmt mit der Transformation (a_1, a_2) jede Transformation (5) überein, in der für a_1 ein Wert $a_1 + 2k\pi$ gesetzt wird, wo k eine ganze Zahl bedeuten soll. Wenn endlich die Schar vorliegt:

(6) $$x_1 = x + a_1 + a_3, \quad y_1 = y + a_2,$$

so stimmt die Transformation (a_1, a_2, a_3) mit jeder Transformation (6) überein, in der statt a_1 und a_3 die Grössen $a_1 + \lambda$, $a_3 - \lambda$ stehen, wie auch die Zahl λ gewählt sein mag. In diesem Beispiele können wir, ohne aus der Schar der Transformationen (6) eine, mehrere oder gar unendlich viele auszuschliessen, von vornherein die Constante $a_3 = 0$ annehmen, da sie offenbar zur Allgemeinheit der Schar nichts beiträgt, oder auch wir können $a_1 + a_3$ anstatt a_1 als den einen Parameter betrachten, wobei sich dann zeigt, dass die Schar (6) sich eigentlich — wie auch die Schar (4) und (5) — vollkommen mit der Schar (3) deckt. In dem Beispiel (6) ist also einer der drei Parameter a_1, a_2, a_3 überflüssig. Nicht so in den Scharen (4) und (5). Hier würde eine specielle Annahme von a_1 oder a_2 die Anzahl der in den Gleichungen (4) oder (5) enthaltenen Transformationen wesentlich beschränken. Wir sagen daher, dass in den Fällen (3), (4), (5) die beiden Parameter a_1, a_2 *wesentlich* sind, dass dagegen im Fall (6) ein *unwesentlicher* Parameter auftritt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung können wir bei jeder Schar von Transformationen (1) anstellen. Denken wir uns, es wäre möglich, ihre Parameter $a_1 \cdot\cdot a_r$ durch weniger, also durch nur $r - 1$ Parameter $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}$ zu ersetzen, wodurch die Gleichungen (1) in neue übergingen:

$$x_1 = \overline{\varphi}(x, y, \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}), \quad y_1 = \overline{\psi}(x, y, \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}),$$

so müssten sich diese mit den Gleichungen (1) decken; es müsste also möglich sein, für alle Wertsysteme x, y und bei beliebiger bestimmter Wahl von $a_1 \cdot\cdot a_r$ solche Constanten $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}$ anzugeben, dass

$$\varphi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r) = \overline{\varphi}(x, y, \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}),$$
$$\psi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r) = \overline{\psi}(x, y, \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1})$$

würde. Zunächst dürften dann diese Gleichungen x und y nur scheinbar enthalten: Sie müssten sich auf Gleichungen zwischen $a_1 \cdot\cdot a_r$ und $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}$ allein reducieren. Da sich ferner zu beliebigem Wertsystem $a_1 \cdot\cdot a_r$ immer ein Wertsystem $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}$ angeben lassen müsste, so müssten sie sich dadurch befriedigen lassen, dass man $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-1}$ gleich gewissen Functionen von $a_1 \cdot\cdot a_r$ setzte:

$$\alpha_1 = \omega_1(a_1 \cdots a_r), \quad \cdots \alpha_{r-1} = \omega_{r-1}(a_1 \cdots a_r).$$

Dann aber ist es klar, dass, wenn $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ in irgend einer Weise bestimmt angenommen werden, damit unmöglich auch die r Constanten $a_1 \cdots a_r$ sämtlich durch diese Gleichungen bestimmt sind, denn es sind dies ja nur $r-1$ Gleichungen. Vielmehr existieren dann unendlich viele eine continuierliche Reihe bildende Wertsysteme $a_1 \cdots a_r$ zu einem bestimmten Wertsystem $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$. Mit anderen Worten: Unendlich viele eine continuierliche Reihe bildende Wertsysteme $a_1 \cdots a_r$ geben dieselbe Transformation (1).

Wenn umgekehrt je unendlich viele eine continuierliche Schar bildende Wertsysteme $a_1 \cdots a_r$ dieselbe Transformation (1) ergeben, so werden diese Scharen von Wertsystemen durch gewisse Gleichungen zwischen $a_1 \cdots a_r$ definiert sein und zwar durch höchstens $r-1$ von einander unabhängige:

$$\omega_1(a_1 \cdots a_r) = \alpha_1, \quad \cdots \omega_{r-1}(a_1 \cdots a_{r-1}) = \alpha_{r-1},$$

welche eine Anzahl Constanten $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ enthalten, so zwar, dass sie bei bestimmter Wahl derselben eine Schar von Wertsystemen $a_1 \cdots a_r$ definieren, die sämtlich *dieselbe* Transformation (1) liefern. Diese Gleichungen werden aber höchstens $r-1$ der Constanten $a_1 \cdots a_r$ bebestimmen, etwa $a_1 \cdots a_{r-1}$, während eine, a_r, ganz beliebig bleibt. Das Einsetzen dieser Werte wird die Gleichungen (1) auf eine solche Form

$$x_1 = \Phi(x, y, \alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}, a_r), \quad y_1 = \Psi(x, y, \alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}, a_r)$$

bringen, dass, wie auch a_r gewählt sein mag, stets diese Gleichungen dieselbe Transformation darstellen, sie also in Wirklichkeit a_r gar nicht enthalten. Damit wird dann erreicht, dass die Schar (1) durch diese neuen Gleichungen mit höchstens $r-1$ Parametern $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ dargestellt werden kann. Den Parameter a_r bezeichnen wir hier als *unwesentlich*, da es für die Allgemeinheit der Schar (1), für ihren Umfang, gleichgültig ist, ob er etwa einer bestimmten Zahl gleich gesetzt wird oder willkürlich bleibt.

Unwesentlicher Parameter.

Die Zahl der Parameter $a_1 \cdots a_r$ der Schar (1) lässt sich somit dann und nur dann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit erniedrigen, wenn sich alle möglichen Wertsysteme $a_1 \cdots a_r$ in Scharen von je unendlich vielen continuierlich aufeinanderfolgenden derart anordnen lassen, dass zwei Wertsysteme derselben Schar von Systemen stets die gleiche Transformation (1) ergeben. Ist dies nicht der Fall, so sagen wir, *dass alle r Parameter $a_1 \cdots a_r$ wesentlich sind.* Wenn $a_1 \cdots a_r$ wesentlich sind, so giebt es nicht unendlich viele continuierlich auf-

einanderfolgende derartige Wertsysteme. Da es nun ∞^r verschiedene Wertsysteme $a_1 \cdot\cdot a_r$ giebt, so sind dann auch in der Form (1) ∞^r verschiedene Transformationen vorhanden.

Ableitung eines Criteriums für die wesentlichen Parameter.

Wir wollen nun ein *analytisches Criterium* entwickeln, mit dessen Hülfe wir in jedem gegebenen Falle entscheiden können, ob die r Parameter wesentlich sind oder nicht.

Nehmen wir zunächst an, die r Parameter $a_1 \cdot\cdot a_r$ seien nicht sämtlich wesentlich. Dann existieren gewisse Functionen $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-m}$ von $a_1 \cdot\cdot a_r$ derart, dass die Gleichungen (1) durch gewisse andere:

$$x_1 = \overline{\varphi}(x, y, \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-m}), \quad y_1 = \overline{\psi}(x, y, \alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-m})$$

ersetzbar sind, sodass φ mit $\overline{\varphi}$ und ψ mit $\overline{\psi}$ identisch ist. Dabei ist die Zahl $r-m$ der Functionen $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-m}$ höchstens gleich $r-1$, also $r \geqq 1$. Nun existiert bekanntlich stets eine lineare partielle Differentialgleichung:

$$Af \equiv \chi_1(a_1 \cdot\cdot a_r)\frac{\partial f}{\partial a_1} + \chi_2(a_1 \cdot\cdot a_r)\frac{\partial f}{\partial a_2} + \cdot\cdot + \chi_r(a_1 \cdot\cdot a_r)\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0$$

— und, wenn $m > 1$ ist, sogar unendlich viele —, der irgend welche angenommene Functionen $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-m}$ von r Grössen $a_1 \cdot\cdot a_r$ genügen. Diese Gleichung wird alsdann auch von jeder Function der Lösungen $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_{r-m}$ erfüllt, insbondere also auch von $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ oder endlich von φ und ψ.

Wenn umgekehrt φ und ψ Lösungen einer solchen partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ sind, so sind sie Functionen gewisser $r-1$ von einander unabhängiger Lösungen $\beta_1(a_1 \cdot\cdot a_r) \cdots \beta_{r-1}(a_1 \cdot\cdot a_r)$ derselben. Sie können also dann auf die Form

$$\varphi \equiv \varphi_1(x, y, \beta_1 \cdot\cdot \beta_{r-1}), \quad \psi \equiv \psi_1(x, y, \beta_1 \cdot\cdot \beta_{r-1})$$

gebracht werden, d. h. in (1) können die r Parameter $a_1 \cdot\cdot a_r$ durch nur $r-1$, nämlich $\beta_1 \cdot\cdot \beta_{r-1}$, ersetzt werden: Es sind dann nicht alle Parameter wesentlich.

Wir haben damit bewiesen:

Criterium.

Satz 1: *Die nach x, y auflösbaren Gleichungen*

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)$$

stellen dann und nur dann ∞^r verschiedene Transformationen dar, d. h. ihre r Parameter $a_1 \cdot\cdot a_r$ sind dann und nur dann sämtlich wesentlich, wenn es unmöglich ist, r nicht sämtlich verschwindende von x, y freie Functionen $\chi_1 \cdot\cdot \chi_r$ von $a_1 \cdot\cdot a_r$ so zu bestimmen, dass identisch

$$\chi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \cdots + \chi_r \frac{\partial \varphi}{\partial a_r} = 0,$$
$$\chi_1 \frac{\partial \psi}{\partial a_1} + \cdots + \chi_r \frac{\partial \psi}{\partial a_r} = 0$$

wird.

Andere Ableitung derselben.

Zu diesem Criterium können wir auch durch folgende Überlegung gelangen: Wenn die r Parameter $a_1 \cdot . a_r$ nicht sämtlich wesentlich sind, so giebt es zu jedem Parametersystem $a_1 \cdot\cdot a_r$ unendlich viele andere, welche dieselbe Transformation (1) liefern. Da diese Parametersysteme eine continuierliche Schar bilden, so muss folglich wenigstens ein dem System $a_1 \cdot\cdot a_r$ beliebig nahe benachbartes Wertsystem $a_1 + \varepsilon_1, \;\cdot\cdot a_r + \varepsilon_r$ existieren, welches dieselbe Transformation (1) liefert, sodass also:

$$\varphi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r) = \varphi(x, y, a_1 + \varepsilon_1, \;\cdot\cdot a_r + \varepsilon_r),$$
$$\psi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r) = \psi(x, y, a_1 + \varepsilon_1, \;\cdot\cdot a_r + \varepsilon_r)$$

wird. Hier können wir rechts die Taylor'sche Entwickelung nach $\varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_r$ ausführen, die bei hinreichend wenig von Null verschiedenen Werten der ε convergieren, sodass sich ergiebt:

$$0 = \sum_1^r {}_i \frac{\partial \varphi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)}{\partial a_i} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_1^r {}_i \sum {}_k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a_i \, \partial a_k} \varepsilon_i \, \varepsilon_k + \cdots,$$

$$0 = \sum_1^r {}_i \frac{\partial \psi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)}{\partial a_i} \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_1^r {}_i \sum {}_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial a_i \, \partial a_k} \varepsilon_i \, \varepsilon_k + \cdots.$$

Wir dividieren beide Entwickelungen durch eines der ε, etwa ε_1. Lassen wir dann das Wertsystem $(a + \varepsilon)$ in einer gewissen Weise gegen das Wertsystem (a) convergieren, so convergieren die Quotienten $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_1}$ gegen gewisse Functionen von $a_1 \cdot\cdot a_r$ und die Glieder der Reihe von den Doppelsummen an gegen Null, sodass sich also ergiebt:

$$0 = \sum_1^r {}_i \frac{\partial \varphi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)}{\partial a_i} \chi_i(a_1 \cdot\cdot a_r),$$

$$0 = \sum_1^r {}_i \frac{\partial \psi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)}{\partial a_i} \chi_i(a_1 \cdot\cdot a_r),$$

d. h. φ und ψ erfüllen eine gewisse lineare partielle Differentialgleichung

$$Af \equiv \sum_1^r {}_i \chi_i(a_1 \cdot\cdot a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i} = 0.$$

Wenn umgekehrt die Functionen φ und ψ eine solche Differentialgleichung erfüllen, so schliessen wir rückwärts, dass das Wertsystem

$$a_1 + \chi_1(a_1 \cdots a_r)\delta t, \quad \cdots a_r + \chi_r(a_1 \cdots a_r)\delta t$$

dieselbe Transformation wie das Wertsystem $a_1 \cdots a_r$ liefert, dabei unter δt eine gegen Null convergierende Grösse verstanden. Zu jedem Wertsystem (a) existiert also dann ein unendlich benachbartes, das dieselbe Transformation liefert. Zu diesem ist wieder ein gewisses Wertsystem mit derselben Transformation unendlich benachbart u. s. w., sodass sich so aus jedem Wertsystem $a_1 \cdots a_r$ eine continuierliche Schar von Wertsystemen ergiebt, denen dieselbe Transformation (1) zugehört.

Begrifflicher Sinn des Criteriums.

Dies ist also der begriffliche Sinn unseres Criteriums. Allerdings ist die soeben entwickelte Umkehrung nicht ganz streng formuliert, sie sollte aber auch nur diese begriffliche Deutung klarmachen.

Zur Anwendung des Criteriums.

Zur *Anwendung* des Criteriums unseres Satzes wird man bei einer vorgelegten Schar (1) so verfahren: Man bestimmt zunächst die Functionen $\chi_1 \cdots \chi_r$ in irgend einer Weise so, dass φ und ψ jene lineare partielle Differentialgleichung erfüllen. Alsdann berechnet man $r-1$ von einander unabhängige Lösungen $\omega_1 \cdots \omega_{r-1}$ dieser Gleichung und führt vermöge der Gleichungen

$$\omega_1(a_1 \cdots a_r) = \alpha_1, \quad \cdots \omega_{r-1}(a_1 \cdots a_r) = \alpha_{r-1}$$

an Stelle von $r-1$ der Parameter $a_1 \cdots a_r$ die Parameter $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ in (1) ein. Dadurch muss von selbst der noch übrige r^{te} der Parameter $a_1 \cdots a_r$ aus den Transformationsgleichungen herausfallen, sodass die neuen Gleichungen der Transformation nur die $r-1$ Parameter $\alpha_1 \cdots \alpha_{r-1}$ enthalten. Sind auch diese noch nicht sämtlich wesentlich, so kann man dasselbe Verfahren noch einmal anwenden u. s. w. Es ist auch nicht schwer, gleich auf einen Schlag mehr als einen unwesentlichen Parameter zu entfernen. Doch gehen wir darauf nicht näher ein, da sich in der Praxis meist auch ohne Benutzung der partiellen Differentialgleichung $Af = 0$ etwa vorhandene überzählige Parameter als solche sofort herausstellen. Es genügt für die Theorie, das obige Criterium aufgestellt zu haben.

Für den Fall, dass die Schar nur *zwei* Parameter enthält, ist die Entscheidung leicht: Die beiden Parameter sind offenbar dann und nur dann wesentlich, wenn sich die beiden Gleichungen nach ihnen auflösen lassen.

Beispiele.

1. Beispiel: Sei die Schar von Transformationen vorgelegt:

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + A + B, \quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + C + D.$$

Sie enthält zunächst die fünf Parameter α, A, B, C, D. Hier sieht man von vornherein, dass sich $A+B$ und $C+D$ durch je einen Parameter a, b ersetzen lassen:

$$x_1 = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \quad y_1 = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b.$$

Es ist hier ferner augenscheinlich, dass zwei solche Transformationen nur dann übereinstimmen, wenn a und b in beiden dieselben Werte haben, während α in beiden um ein Vielfaches von 2π variieren kann. Es sind also alle drei Parameter α, a, b wesentlich. Um aber auch das Criterium des Satzes 1 anzuwenden, haben wir zur Bestimmung der χ die Gleichungen aufzustellen:

$$\chi_1(-x\sin\alpha - y\cos\alpha) + \chi_2 = 0,$$
$$\chi_1(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + \chi_3 = 0.$$

Sie zerfallen, da die χ von x und y frei sein sollen, in vier einzelne Forderungen, denen nur von $\chi_1 \equiv \chi_2 \equiv \chi_3 \equiv 0$ genügt wird.

2. Beispiel: Es wird gefragt, ob in der Schar von Transformationen:

$$x_1 = xa^{\lg b} + b^{\lg a} + c, \quad y_1 = xya^{\lg b}$$

alle drei Parameter a, b, c wesentlich sind. Hier liefert Satz 1 die Gleichungen zur Bestimmung der χ:

$$\chi_1\left(xa^{\lg b-1}\lg b + b^{\lg a}\lg b\,\frac{1}{a}\right) + \chi_2\left(xa^{\lg b}\lg a\,\frac{1}{b} + b^{\lg a-1}\lg a\right) + \chi_3 = 0,$$

$$\chi_1\left(xy\,a^{\lg b-1}\lg b + \chi_2\,xya^{\lg b}\lg a\,\frac{1}{b}\right) = 0,$$

die aber, da sie für alle x, y bestehen sollen, in diese zerfallen:

$$\chi_1\,a^{\lg b-1}\lg b + \chi_2\,a^{\lg b}\lg a\,\frac{1}{b} = 0,$$

$$\chi_1\,b^{\lg a}\lg b\,\frac{1}{a} + \chi_2\,b^{\lg a-1}\lg a + \chi_3 = 0,$$

$$\chi_1\,a^{\lg b-1}\lg b + \chi_2\,a^{\lg b}\lg a\,\frac{1}{b} = 0.$$

Die erste giebt:

$$\chi_2 = -\frac{b}{a}\frac{\lg b}{\lg a}\chi_1.$$

Setzen wir diesen Wert in die zweite ein, so kommt

$$\chi_3 = 0,$$

während die dritte durch diese Substitution erfüllt wird. Somit können wir, da es nur auf die Verhältnisse der χ zu einander ankommt,

$$\chi_1 \equiv a\lg a, \quad \chi_2 \equiv -b\lg b, \quad \chi_3 \equiv 0$$

setzen. Dies liefert die lineare partielle Differentialgleichung in a, b, c:

$$a \lg a \frac{\partial f}{\partial a} - b \lg b \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

die $\lg a \cdot \lg b$ und c zu Lösungen hat. Also wird bei Einführung von

$$\alpha = \lg a \cdot \lg b$$

und Beibehaltung von c aus den Transformationsgleichungen a und b herausfallen. In der That, es ist

$$a = e^{\frac{\alpha}{\log b}}$$

d. h. $a^{\lg b} = e^\alpha$, $b^{\lg a} = e^\alpha$, und es kommt:

$$x_1 = xe^\alpha + e^\alpha + c; \quad y_1 = xye^\alpha.$$

Statt α können wir e^α, statt $e^\alpha + c$ direct c als Parameter benutzen und erhalten so die bequemere Form:

$$x_1 = \alpha x + c, \quad y_1 = \alpha xy.$$

Hier sind α, c wesentliche Parameter.

§ 2. Gruppe von Transformationen.

Es sei wiederum eine Schar von Transformationen vorgelegt:

$$(1) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a_1 \cdots a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \cdots a_r)$$

und vorausgesetzt, dass $a_1 \cdots a_r$ sämtlich wesentliche Parameter seien, d. h. dass die Gleichungen (1) wirklich ∞^r von einander verschiedene Transformationen darstellen.

Jetzt soll aber überdies angenommen werden, die Schar (1) besitze die *Gruppeneigenschaft: Es soll die Aufeinanderfolge irgend zweier Transformationen dieser Schar stets einer einzigen Transformation der Schar äquivalent sein.*

Gruppeneigenschaft.

Bezeichnen wir die zum Wertsystem $a_1 \cdots a_r$ gehörige Transformation der Schar (1) symbolisch mit T_a, so soll also vorausgesetzt werden, dass, wie auch $a_1 \cdots a_r$, $b_1 \cdots b_r$ gewählt sein mögen, stets ein Wertsystem $c_1 \cdots c_r$ existiere derart, dass

$$T_a T_b = T_c$$

ist. Analytisch drückt sich dies so aus:

Analytische Darstellung.

Führen wir zuerst die Transformation T_a aus, so kommt:

$$(7) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a_1 \cdots a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \cdots a_r).$$

T_b ferner führt die Punkte (x_1, y_1) in neue Punkte (x_2, y_2) über:

$$(8) \qquad x_2 = \varphi(x_1, y_1, b_1 \cdots b_r), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, b_1 \cdots b_r).$$

Die Aufeinanderfolge $T_a T_b$ ist nun derjenigen Transformation äquivalent, die durch Elimination der Zwischenwerte x_1, y_1 aus (7) und (8) hervorgeht:

$$(9) \qquad \begin{cases} x_2 = \varphi(\varphi(x,\, y,\, a),\quad \psi(x,\, y,\, a),\quad b_1 \cdot\cdot b_r), \\ y_2 = \psi(\varphi(x,\, y,\, a),\quad \psi(x,\, y,\, a),\quad b_1 \cdot\cdot b_r). \end{cases}$$

Hierin ist $\varphi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)$ kurz mit $\varphi(x, y, a)$, $\psi(x, y, a_1 \cdot\cdot a_r)$ kurz mit $\psi(x, y, a)$ bezeichnet. Dieser Transformation (9) soll nun eine Transformation der Schar (1) äquivalent sein, d. h. es sollen sich solche Werte $c_1 \cdot\cdot c_r$ angeben lassen, dass (9) identisch wird mit:

$$x_2 = \varphi(x,\, y,\, c_1 \cdot\cdot c_r), \quad y_2 = \psi(x,\, y,\, c_1 \cdot\cdot c_r),$$

dass also die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(x,\, y,\, a),\quad \psi(x,\, y,\, a),\quad b_1 \cdot\cdot b_r) &= \varphi(x,\, y,\, c_1 \cdot\cdot c_r), \\ \psi(\varphi(x,\, y,\, a),\quad \psi(x,\, y,\, a),\quad b_1 \cdot\cdot b_r) &= \psi(x,\, y,\, c_1 \cdot\cdot c_r) \end{aligned}$$

identisch bestehen für alle Werte von x und y. Dabei sind die Constanten $a_1 \cdot\cdot a_r$, $b_1 \cdot\cdot b_r$ willkürlich wählbar, also die Constanten $c_1 \cdot\cdot c_r$ notwendig gewisse Functionen $\lambda_1(a_1 \cdot\cdot a_r,\, b_1 \cdot\cdot b_r)$, $\cdot\cdot\, \lambda_r(a_1 \cdot\cdot a_r,\, b_1 \cdot\cdot b_r)$ der a und b *allein.*

Die Schar (1) stellt somit dann und nur dann eine Gruppe dar, wenn es gewisse Functionen $\lambda_1(a, b)$, $\cdot\cdot\, \lambda_r(a, b)$ giebt, die frei von x und y sind, derart, dass für alle Werte von x, y, $a_1 \cdot\cdot a_r$, $b_1 \cdot\cdot b_r$, die Identitäten bestehen:

$$(10) \begin{cases} \varphi(\varphi(x, y, a),\ \psi(x, y, a),\ b_1 \cdot\cdot b_r) \equiv \varphi(x, y, \lambda_1(a, b),\ \cdot\cdot\, \lambda_r(a, b)), \\ \psi(\varphi(x, y, a),\ \psi(x, y, a),\ b_1 \cdot\cdot b_r) \equiv \psi(x, y, \lambda_1(a, b),\ \cdot\cdot\, \lambda_r(a, b)). \end{cases}$$

Alsdann nennen wir die Schar (1), da sie überdies nach Voraussetzung aus ∞^r verschiedenen Transformationen besteht, eine *r-gliedrige Gruppe von Transformationen.*

r-gliedrige Gruppe von Transform.

Aber noch einige weitere Voraussetzungen wollen wir hier ein für allemal über die Schar (1) machen: Zunächst setzen wir voraus, dass φ und ψ solche Functionen von $a_1 \cdot\cdot a_r$ seien, dass eine unendlich kleine Änderung der Parameter $a_1 \cdot\cdot a_r$ die Transformationen (1) auch nur unendlich wenig ändert, dass also alle ∞^r Transformationen, die in (1) enthalten sind, eine *continuierliche* Schar bilden. Insofern nennen wir dann die Schar eine *continuierliche Transformationsgruppe.* Die erwähnte Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn φ und ψ *analytische Functionen ihrer Argumente* sind. Wir werden uns in diesem Werke stets auf diesen Fall beschränken, ohne es immer ausdrücklich

Sonstige Voraussetzungen.

Continuierl. Gruppe.

hervorzuheben. Dadurch werden fremdartige functionentheoretische Untersuchungen von vornherein abgeschnitten.

Inverse Transformationen.

Ferner werden wir voraussetzen, *die Schar* (1) *enthalte zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse.* Die zur Transformation (1) inverse Transformation, die man bekanntlich dadurch erhält, dass man (1) nach x, y auflöst und dann, um bei gewohnter Darstellungsweise zu bleiben, x, y mit x_1, y_1 und umgekehrt x_1, y_1 mit x, y bezeichnet, soll also auch dadurch aus (1) hergestellt werden können, dass man darin $a_1 \cdot\cdot a_r$ gewisse andere Werte $\bar{a}_1 \cdot\cdot \bar{a}_r$ erteilt. Da zu jeder Transformation eine inverse zugeordnet ist, so müssen $\bar{a}_1 \cdot\cdot \bar{a}_r$ gewisse Functionen der ursprünglichen Parameter $a_1 \cdot\cdot a_r$ sein.

Beispiele hierzu brauchen wir nicht zu geben, da Abteilung I genügend viele enthält.

Identische Transformation.

Aus der letzten Voraussetzung können wir einen wichtigen Schluss ziehen: Führen wir nach irgend einer Transformation der Gruppe die inverse aus, so ergiebt sich die *identische* Transformation:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y.$$

Da nun die inverse auch in der Gruppe enthalten und die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Gruppe wieder einer Transformation der Gruppe äquivalent ist, so folgt, dass die Gruppe auch die identische Transformation enthält, dass es also solche Werte $a_1^0 \cdot\cdot a_r^0$ der Parameter geben muss, für die sich (1) auf die identische Transformation reduciert, sodass für alle Werte von x und y

$$(11) \qquad \varphi(x, y, a_1^0 \cdot\cdot a_r^0) \equiv x, \quad \psi(x, y, a_1^0 \cdot\cdot a_r^0) \equiv y$$

ist.

Satz 2: *Jede r-gliedrige Transformationsgruppe mit paarweis inversen Transformationen enthält die identische Transformation.*

§ 3. Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe.

Wenn wir in den Transformationsgleichungen (1) der Gruppe den Parametern $a_1 \cdot\cdot a_r$ Werte geben, die unendlich wenig von denjenigen Werten $a_1^0 \cdot\cdot a_r^0$ abweichen, welche die identische Transformation liefern, so ergiebt sich — wegen der vorausgesetzten Continuität — eine von der identischen nur unendlich wenig verschiedene, also eine *infinitesimale Transformation der Gruppe.*

Infinitesimale Transformation. Erste Ableitung.

Wir werden also setzen:

$$a_1 = a_1^0 + \delta a_1, \quad \cdots a_r = a_r^0 + \delta a_r,$$

indem $\delta a_1 \cdots \delta a_r$ gegen Null convergierende Grössen bedeuten sollen. Alsdann giebt die erste Gleichung (1):

$$x_1 = \varphi(x,\ y,\ a_1^0 + \delta a_1,\ \cdots a_r^0 + \delta a_r)$$

oder, da die rechte Seite nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von $\delta a_1 \cdots \delta a_r$ entwickelt werden kann in eine unendliche Reihe, die bei hinreichend kleinen Werten von $\delta a_1 \cdots \delta a_r$ convergiert:

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1^0 \cdots a_r^0) + \frac{\partial \varphi(x,\ y,\ a_1^0 \cdots a_r^0)}{\partial a_1^0} \delta a_1 + \cdots$$
$$+ \frac{\partial \varphi(x,\ y,\ a_1^0 \cdots a_r^0)}{\partial a_r^0} \delta a_r + \cdots.$$

Die nicht geschriebenen Glieder sind von höherer Ordnung hinsichtlich $\delta a_1 \cdots \delta a_r$. Eigentlich ist die Schreibweise

$$\frac{\partial \varphi(x,\ y,\ a_1^0 \cdots a_r^0)}{\partial a_1^0}$$

sinnlos, da ja $a_1^0 \cdots a_r^0$ ganz bestimmte Zahlen bedeuten. Wir meinen aber damit natürlich den Ausdruck:

$$\frac{\partial \varphi(x,\ y,\ a_1 \cdots a_r)}{\partial a_r},$$

in dem nach ausgeführter Differentiation $a_1 = a_1^0,\ \cdots a_r = a_r^0$ gesetzt werden soll. Wegen (11) kann für das erste Glied rechts einfach x gesetzt werden, sodass kommt:

$$(12)\begin{cases} x_1 = x + \dfrac{\partial \varphi(x,\ y,\ a^0)}{\partial a_1^0} \delta a_1 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi(x,\ y,\ a^0)}{\partial a_r^0} \delta a_r + \cdots. \\ \text{Analog wird:} \\ y_1 = y + \dfrac{\partial \psi(x,\ y,\ a^0)}{\partial a_1^0} \delta a_1 + \cdots + \dfrac{\partial \psi(x,\ y,\ a^0)}{\partial a_r^0} \delta a_r + \cdots. \end{cases}$$

Hierin ist zur Abkürzung $\varphi(x, y, a_1^0 \cdots a_r^0)$ mit $\varphi(x, y, a^0)$ bezeichnet. Diese Gleichungen stellen eine infinitesimale Transformation unserer Gruppe dar, denn sie erteilen x, y die unendlich kleinen Zuwüchse:

$$(12')\begin{cases} \delta x \equiv x_1 - x = \dfrac{\partial \varphi(x, y, a^0)}{\partial a_1^0} \delta a_1 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi(x, y, a^0)}{\partial a_r^0} \delta a_r + \cdots, \\ \delta y \equiv y_1 - y = \dfrac{\partial \psi(x, y, a^0)}{\partial a_1^0} \delta a_1 + \cdots + \dfrac{\partial \psi(x, y, a^0)}{\partial a_r^0} \delta a_r + \cdots. \end{cases}$$

Die Incremente δx, δy stellen sich als unendliche Reihen nach ganzen Potenzen von $\delta a_1 \cdots \delta a_r$ dar. Ist nun keines der r Paare von Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi(x, y, a^0)}{\partial a_i^0},\quad \frac{\partial \psi(x, y, a^0)}{\partial a_i^0}\qquad (i = 1,\ 2 \cdots r)$$

für alle Werte von x, y identisch Null, so kommen wenigstens in einer

der Reihen (12′) stets unendlich kleine Glieder *erster* Ordnung in den δa vor, wie auch diese infinitesimalen Grössen δa gewählt sein mögen. Diesen gegenüber kommen dann die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung nicht in Betracht.

Nachteile der Methode.

Nun kann es aber unter Umständen vorkommen, dass unter den r Paaren von Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi(x, y, a^0)}{\partial a_i^0}, \quad \frac{\partial \psi(x, y, a^0)}{\partial a_i^0} \quad (i = 1, 2 \cdot \cdot r)$$

eines, einige oder auch alle identisch für alle Werte von x, y verschwinden. In diesem Falle dürfen die höheren Potenzen von δa_i etwa nicht vernachlässigt werden, da die erste gar nicht in (12′) auftritt Wir werden dann, wenn in (12′) die Zahl δa_i etwa erst in der k^{ten} Potenz wirklich auftritt, anstatt δa_i diese Potenz δa_i^k als infinitesimale Zahl benutzen. Dann aber ist es von vornherein noch keineswegs sicher, ob auch die Entwickelungen (12′) nur nach *ganzen* Potenzen derselben fortschreiten, denn es könnte ja z. B. auch δa_i^{k+1} mit nicht verschwindendem Coefficienten behaftet sein.

Zweite Ableitung der infinit. Transform.

Um diesen Übelstand zu vermeiden, sowie um die Frage zu entscheiden, wie viele infinitesimale Transformationen die Gruppe enthält, insbesondere wie sie mit einander zusammenhängen, schlagen wir ein neues Verfahren ein:

Irgend eine infinitesimale Transformation der Gruppe wird die Punkte $p(x, y)$ der Ebene in neue Punkte $p'(x', y')$ derselben überführen, die den Punkten p unendlich benachbart sind. Wir können den Übergang zu den p' auch so bewerkstelligen: Zunächst führen wir irgend eine Transformation der Gruppe aus, etwa die zu den Parametern $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$ gehörige T_ε. Dieselbe geleitet die Punkte p in neue Lagen $p_1(x_1, y_1)$. (Fig. 24.) Nun existiert eine Transformation S der Gruppe, welche die Punkte p_1 in die Lagen p' überführt, denn diese Transformation ist äquivalent der Aufeinanderfolge der zu T_ε inversen Transformation $T_{\bar\varepsilon}$, welche die p_1 in die p verwandelt, und der infinitesimalen, welche die p an die Stellen p' führt. Diese Transformation S ist also unendlich wenig verschieden von der zu T_ε inversen $T_{\bar\varepsilon}$, deren Parameter $\bar\varepsilon_1 \cdot \cdot \bar\varepsilon_r$ gewisse Functionen von $\varepsilon_1 \cdot \cdot \varepsilon_r$ sind. Ihre Parameter weichen daher unendlich wenig von $\bar\varepsilon_1 \cdot \cdot \bar\varepsilon_r$ ab, haben also etwa die Werte:

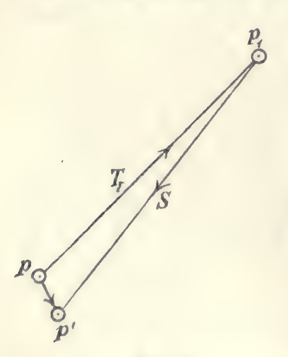


Fig. 24.

$$a_1 = \bar{\varepsilon}_1 + \delta\varepsilon_1, \quad \cdot\cdot\, a_r = \bar{\varepsilon}_r + \delta\varepsilon_r,$$

in denen $\delta\varepsilon_1 \cdot\cdot\, \delta\varepsilon_r$ infinitesimale Zahlen bedeuten. Wie wir auch $\delta\varepsilon_1 \cdot\cdot\, \delta\varepsilon_r$ wählen mögen, immer ergiebt sich als der Aufeinanderfolge $T_\varepsilon S$ äquivalent eine infinitesimale Transformation der Gruppe. Diese Aufeinanderfolge liefert mithin *alle* überhaupt in der Gruppe vorhandenen infinitesimalen Transformationen.

Analytische Darstellung derselben.

Wir wollen diese Überlegung ins Analytische umsetzen: Die Transformation T_ε hat die Gleichungen:

$$(13) \qquad x_1 = \varphi(x, y, \varepsilon_1 \cdot\cdot\, \varepsilon_r), \quad y_1 = \psi(x, y, \varepsilon_1 \cdot\cdot\, \varepsilon_r).$$

Die Transformation S, welche die Punkte (x_1, y_1) weiterhin in die Lagen (x', y') überführt, und die auch mit $T_{\bar{\varepsilon}+\delta\varepsilon}$ bezeichnet werden könnte, wird dargestellt durch:

$$(14) \qquad \begin{aligned} x' &= \varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 + \delta\varepsilon_1, \ \cdot\cdot\, \bar{\varepsilon}_r + \delta\varepsilon_r), \\ y' &= \psi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 + \delta\varepsilon_1, \ \cdot\cdot\, \bar{\varepsilon}_r + \delta\varepsilon_r). \end{aligned}$$

Die Aufeinanderfolge beider ist nun die gesuchte infinitesimale Transformation der (x, y) in die (x', y'). Sie wird berechnet durch Elimination der Zwischenwerte x_1, y_1 aus (13) und (14). Diese Elimination liefert:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \ \psi(x, y, \varepsilon), \ \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon), \\ y' &= \psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \ \psi(x, y, \varepsilon), \ \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon). \end{aligned}$$

Hierin sind zur Abkürzung die $\varepsilon_1 \cdot\cdot\, \varepsilon_r$ einfach durch ε, die $\bar{\varepsilon}_1 + \delta\varepsilon_1, \cdot\cdot\, \bar{\varepsilon}_r + \delta\varepsilon_r$ durch $\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon$ markiert. In dieser Form tritt nicht deutlich hervor, dass die Gleichungen eine infinitesimale Transformation darstellen. Dies wird aber durch Reihenentwickelung augenscheinlich. Da nämlich $\delta\varepsilon_1 \cdot\cdot\, \delta\varepsilon_r$ gegen Null convergieren sollen, so dürfen wir die Gleichungen nach Potenzen von $\delta\varepsilon_1 \cdot\cdot\, \delta\varepsilon_r$ entwickeln:

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \ \psi(x, y, \varepsilon), \ \bar{\varepsilon}) + \\ &\quad + \sum_1^r{}^i \delta\varepsilon_i \frac{\partial \varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \ \psi(x, y, \varepsilon), \ \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} + \cdots, \\ y' &= \psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \ \psi(x, y, \varepsilon), \ \bar{\varepsilon}) \\ &\quad + \sum_1^r{}^i \delta\varepsilon_i \frac{\partial \psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \ \psi(x, y, \varepsilon), \ \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} + \cdots. \end{aligned}$$

Da nun die Transformation $T_{\bar{\varepsilon}}$ zur Transformation T_ε invers ist, d. h. die Aufeinanderfolge von

$$x_1 = \varphi(x, y, \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r), \quad y_1 = \psi(x, y, \varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r)$$

und

$$x_2 = \varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r), \quad y_2 = \psi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r)$$

die identische $x_2 = x$, $y_2 = y$ liefern muss, so ist

$$\varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon}) \equiv x,$$
$$\psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon}) \equiv y,$$

sodass sich die gefundenen Reihenentwickelungen reducieren auf diese:

$$x' = x + \sum_1^r{}_i \delta\varepsilon_i \frac{\partial \varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} + \cdots,$$

$$y' = y + \sum_1^r{}_i \delta\varepsilon_i \frac{\partial \psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} + \cdots.$$

Jede infinitesimale Transformation der Gruppe lässt sich somit bei geeigneter Wahl der infinitesimalen Zahlen $\delta\varepsilon_1 \ldots \delta\varepsilon_r$ in dieser Weise schreiben. Sie erteilt x und y die Incremente:

$$(15) \begin{cases} \delta x \equiv x' - x = \sum_1^r{}_i \delta\varepsilon_i \dfrac{\partial \varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} + \cdots, \\ \delta y \equiv y' - y = \sum_1^r{}_i \delta\varepsilon_i \dfrac{\partial \psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} + \cdots. \end{cases}$$

Wohlbemerkt dürfen die $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ in irgend welcher Weise bestimmt gewählt werden. Die $\bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r$ sind als Functionen der $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ alsdann auch gegeben.

Nichtverschwinden der Glieder 1. Ordnung.

Die $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ können immer so angenommen werden, dass keines der r Paare von Differentialquotienten

$$(16) \qquad \frac{\partial \varphi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i}, \quad \frac{\partial \psi(\varphi(x, y, \varepsilon), \psi(x, y, \varepsilon), \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i}$$
$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

identisch verschwindet für alle Werte von x, y. Denn wir können diese Paare, da (x_1, y_1) die Punkte sind, in welche die Punkte (x, y) bei der Transformation T_ε übergehen, und also:

$$x_1 = \varphi(x, y, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r), \quad y_1 = \psi(x, y, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r)$$

ist, auch so schreiben:

$$\frac{\partial \varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i}, \quad \frac{\partial \psi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}_i} \quad (i = 1, 2 \ldots r).$$

Hierin sind (x_1, y_1) alle Punkte der Ebene, und das Verschwinden beider Differentialquotienten würde daher aussagen, dass φ und ψ beide den Parameter $\bar{\varepsilon}_i$ nicht enthalten, dass also — wenn dies eintritt, wie

auch die ε oder die $\bar{\varepsilon}$ gewählt sein mögen — die allgemeinen Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \,.\,.\, a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \,.\,.\, a_r)$$

frei von a_i sind und die Gruppe folglich gegen die Voraussetzung weniger als r-gliedrig ist.

Demnach dürfen wir annehmen, die $\bar{\varepsilon}_1 \,.\,.\, \bar{\varepsilon}_r$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_r$ seien in bestimmter Weise als solche Zahlen gewählt, dass in wenigstens einer der Gleichungen (15) stets unendlich kleine Glieder erster Ordnung in den $\delta\varepsilon_i$ vorkommen, wie auch die $\delta\varepsilon_i$ gewählt sein mögen. Bezeichnen wir dann die Ausdrücke (16) — da sie als veränderliche Grössen nur noch x, y enthalten — mit $\xi_i(x, y)$, $\eta_i(x, y)$, so folgt:

Satz 3: *Jede infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe mit paarweis inversen Transformationen lässt sich in der Form schreiben:*

$$\delta x = \sum_1^r {}^i\, \xi_i(x, y)\,\delta\varepsilon_i + \cdots, \quad \delta y = \sum_1^r {}^i\, \eta_i(x, y)\,\delta\varepsilon_i + \cdots,$$

in der die $\delta\varepsilon_i$ irgend welche nicht sämtlich verschwindende, aber gegen Null convergierende Zahlen bedeuten und ferner ξ_i und η_i nicht beide identisch Null sind für irgend einen der r Werte von i.

Hiermit sind die infinitesimalen Transformationen der Gruppe entwickelt in Reihen nach ganzen Potenzen unendlich kleiner Grössen und zwar so, dass die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung nicht sämtlich absolut verschwinden.

Das jetzige Verfahren leistet demnach mehr als das frühere, das zu den infinitesimalen Transformationen (12′) führte. In der That ist die frühere Methode nur ein besonderer Fall der jetzigen, die sich ja auf jene reduciert, wenn $\varepsilon_1 = a_1^0, \,.\,.\, \varepsilon_r = a_r^0$ gesetzt wird.

Wir können uns die $\delta\varepsilon_i$ gegeben denken als Potenzreihen einer gegen Null convergierenden Grösse δt, indem wir etwa setzen:

$$\delta\varepsilon_i = e_i\delta t + \cdots \quad (i = 1, 2 \cdot\cdot r).$$

Die hier nicht geschriebenen Glieder sollen also von höherer Potenz in δt sein, während die e_i nunmehr irgend welche endliche Zahlen bedeuten. Nun hat die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe die Form:

$$\delta x = \sum_1^r {}^i\, e_i\, \xi_i(x, y)\,\delta t + \cdot\cdot, \quad \delta y = \sum_1^r {}^i\, e_i\, \eta_i(x, y)\,\delta t + \cdots.$$

Dieselbe erteilt einer beliebigen Function $f(x, y)$ das Increment:

$$\delta f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = \left(\sum_1^r e_i \xi_i(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^r e_i \eta_i(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta t + \cdots.$$

Führen wir nun die Bezeichnung ein:

$$(17) \qquad Uf \equiv \xi(x,y)p + \eta(x,y)q \equiv \sum_1^r e_i \xi_i(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_1^r e_i \eta_i(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

oder also:

$$(17') \qquad Uf \equiv \xi(x,y)p + \eta(x,y)q \equiv \sum_1^r e_i(\xi_i(x,y)p + \eta_i(x,y)q),$$

so erfährt f das Increment:

$$\delta f = Uf\,\delta t + \cdots.$$

Uf setzt sich aber linear mit irgend welchen constanten Coefficienten $e_1 \ldots e_r$ zusammen aus den r einzelnen Symbolen:

$$(18) \qquad U_i f \equiv \xi_i p + \eta_i q \quad (i = 1, 2 \ldots r),$$

was wir bekanntlich so ausdrücken: *Uf lässt sich linear aus $U_1 f \ldots U_r f$ ableiten.*

Diese r einzelnen Symbole $U_1 f \ldots U_r f$ sind von einander unabhängig, d. h. es giebt keine Constanten $c_1 \ldots c_r$, die nicht sämtlich verschwinden und für die, wie auch x, y, f gewählt seien, der Ausdruck

$$c_1 U_1 f + \cdots + c_r U_r f$$

identisch Null wäre. In der That würde das Verschwinden dieses Ausdruckes nach sich ziehen, dass einzeln

$$c_1 \xi_1 + \cdots + c_r \xi_r \equiv 0,$$
$$c_1 \eta_1 + \cdots + c_r \eta_r \equiv 0$$

wäre. Da nun

$$\xi_i \equiv \frac{\partial \varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \cdots \bar{\varepsilon}_r)}{\partial \bar{\varepsilon}_i}, \quad \eta_i \equiv \frac{\partial \psi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \cdots \bar{\varepsilon}_r)}{\partial \bar{\varepsilon}_i}$$

war, so käme dann:

$$c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varepsilon}_1} + \cdots + c_r \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varepsilon}_r} \equiv 0,$$
$$c_1 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}_1} + \cdots + c_r \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}_r} \equiv 0.$$

Bei anderer Wahl der $\bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r$ hätten wir andere Constanten $c_1 \ldots c_r$. Diese letzteren wären also gewisse Functionen $\chi_1(\bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r), \ldots \chi_r(\bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r)$, und es würde sich somit, wenn die beliebigen $\bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r$ durch $a_1 \ldots a_r$, die x_1, y_1 durch x, y ersetzt werden, ergeben:

$$\chi_1(a)\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a_1}+\cdots+\chi_r(a)\frac{\partial\varphi(x,y,a)}{\partial a_r}\equiv 0,$$

$$\chi_1(a)\frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a_1}+\cdots+\chi_r(a)\frac{\partial\psi(x,y,a)}{\partial a_r}\equiv 0.$$

Nach Satz (1) des § 1 wären somit nicht alle r Parameter $a_1 \dots a_r$ der Gruppe wesentlich, was der Voraussetzung zuwiderläuft.

Mithin erteilt *jede* infinitesimale Transformation der Gruppe einer nicht gerade speciell gewählten, sondern beliebigen Function f der Veränderlichen x, y ein Increment:

$$\delta f = Uf\,\delta t + \cdots,$$

in dem das Glied erster Ordnung nicht identisch verschwindet. Diesem nicht verschwindenden Gliede gegenüber können aber die höheren Potenzen von δt vernachlässigt werden, und daher dürfen wir nun allgemein als infinitesimale Transformation

$$\delta x = \sum_1^r{}_i\, e_i\,\xi_i(x,y)\,\delta t, \quad \delta y = \sum_1^r{}_i\, e_i\,\eta_i(x,y)\,\delta t$$

annehmen, also als ihr Symbol:

$$Uf \equiv \sum_1^r{}_i\, e_i(\xi_i p + \eta_i q),$$

das sich linear aus $U_1 f \dots U_r f$ ableiten lässt.

Wir sind zu diesem Gesamtergebnis gelangt:

Gesamtergebnis.

Theorem 18: *Jede r-gliedrige continuierliche Gruppe der Ebene mit paarweis inversen Transformationen enthält gerade und nur r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen und gleichzeitig alle, die sich aus ihnen linear ableiten lassen.*

Beispiele.

1. Beispiel: Die Gleichungen

$$x_1 = ax + b, \quad y_1 = ay + c$$

stellen ∞^3 Transformationen dar, die eine Gruppe bilden, denn hieraus und aus

$$x_2 = a_1 x_1 + b_1, \quad y_2 = a_1 y_1 + c_1$$

folgt durch Elimination von x_1, y_1:

$$x_2 = aa_1 x + (a_1 b + b_1), \quad y_2 = aa_1 y + (a_1 c + c_1),$$

und dies ist wieder eine Transformation jener Schar. Hier liefert schon die einfache erste Methode alle infinitesimalen Transformationen. Es giebt nämlich die Annahme $a = 1$, $b = c = 0$ die identische, folglich die Annahme

$$a = 1 + \delta a, \quad b = \delta b, \quad c = \delta c$$

die infinitesimale Transformation:

$$x_1 = x + x\delta a + \delta b, \quad y_1 = y + y\delta a + \delta c.$$

Da diese Entwickelungen nach δa, δb, δc mit den Gliedern erster Ordnung schon abbrechen, so tritt der Übelstand, den die erste Methode, wie bemerkt, mit sich führen konnte, nicht auf. Wir erhalten als allgemeinste infinitesimale Transformation, wenn $\delta a = \alpha \delta t$, $\delta b = \beta \delta t$, $\delta c = \gamma \delta t$ gesetzt wird, diese:

$$(\alpha x + \beta)p + (\alpha y + \gamma)q,$$

die linear aus $xp + yq$, p, q ableitbar ist.

2. Beispiel: Die Gleichungen

$$x_1 = ax + b^2, \quad y_1 = ay + c$$

stellen offenbar auch die dreigliedrige Gruppe dar, die im vorigen Beispiel betrachtet wurde. Nur steht anstatt des Parameters b der Parameter b^2. Dieser rein äusserliche Unterschied bewirkt, dass hier die erste Methode Reihen liefert, in denen die Glieder erster Ordnung sämtlich verschwinden können. Da nämlich $a = 1$, $b = c = 0$ die identische Transformation liefert, so setzen wir

$$a = 1 + \delta a, \quad b = \delta b, \quad c = \delta c$$

und erhalten:

$$x_1 = x + x\delta a + \delta b^2, \quad y_1 = y + y\delta a + \delta c$$

oder

$$\delta x = x\delta a + \delta b^2, \quad \delta y = y\delta a + \delta c.$$

Nehmen wir hierin $\delta a = \delta c = 0$ an, so verschwinden alle Glieder erster Ordnung. Die Glieder erster Ordnung liefern also nur zwei unabhängige infinitesimale Transformationen $xp + yq$, q der Gruppe, aber nicht auch p. Da aber die Entwickelungen nach δa, δb, δc auch hier abbrechen, so liefert das unendlich kleine Glied zweiter Ordnung, indem δb^2 durch δb ersetzt werden kann, doch noch die infinitesimale Transformation p.

3. Beispiel: Auch die Gleichungen:

$$x_1 = ax + \sqrt{b}, \quad y_1 = ay + c$$

stellen die im ersten Beispiel betrachtete dreigliedrige Gruppe dar. Der rein äusserliche Unterschied besteht darin, dass $\sqrt{b}$ für b gesetzt ist, und bewirkt, dass die erste Methode zur Bestimmung der infinitesimalen Transformationen der Gruppe undurchführbar wird. Setzen wir nämlich

$$a = 1 + \delta a, \quad b = \delta b, \quad c = \delta c,$$

so kommt die infinitesimale Transformation:

$$\delta x = x \delta a + \sqrt{\delta b}, \quad \delta y = y \delta a + \delta c.$$

Aber $\sqrt{\delta b}$ kann nicht nach Potenzen von δa entwickelt werden, da $\sqrt{u}$ an der Stelle $u = 0$ singulär ist. Die zweite Methode aber führt zum Ziel. Es lautet nämlich die Auflösung der Transformation

$$x_1 = \varepsilon_1 x + \sqrt{\varepsilon_2}, \quad y_1 = \varepsilon_1 y + \varepsilon_3$$

nach x_1, y_1:

$$x = \frac{1}{\varepsilon_1} x_1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\varepsilon_1}, \quad y = \frac{1}{\varepsilon_1} y_1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1},$$

d. h. zur Transformation T_ε mit den Parametern

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3$$

ist invers die mit den Parametern:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\,2}}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

Wir setzen also:

$$\delta x = \frac{\partial \varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \cdots \bar{\varepsilon}_r)}{\partial \bar{\varepsilon}_1} \delta \varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varepsilon}_2} \delta \varepsilon_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varepsilon}_3} \delta \varepsilon_3,$$

wo

$$\varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \cdots \bar{\varepsilon}_r) \equiv \bar{\varepsilon}_1 x_1 + \sqrt{\bar{\varepsilon}_2}$$

ist. Es kommt:

$$\delta x = x_1 \delta \varepsilon_1 + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\varepsilon}_2}} \delta \varepsilon_2.$$

Analog kommt, da hier

$$\psi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}_1 \ldots \bar{\varepsilon}_r) \equiv \bar{\varepsilon}_1 y_1 + \bar{\varepsilon}_3$$

ist:

$$\delta y = y_1 \delta \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_3.$$

Noch ist in δx und δy

$$x_1 = \varepsilon_1 x + \sqrt{\varepsilon_2}, \quad y_1 = \varepsilon_1 y + \varepsilon_3$$

und

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^{\,2}}$$

zu setzen. Wir können aber vorher $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ irgendwie specialisieren, nur nicht so, dass eines der Differentialquotientenpaare $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varepsilon}_i}, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\varepsilon}_i}$ verschwindet. Wir setzen also etwa:

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_3 = 0,$$

somit $\bar{\varepsilon}_2 = 1$ und erhalten $x_1 = x + 1$, $y_1 = y$ und daher:

$$\delta x = (x + 1) \delta \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \delta \varepsilon_2, \quad \delta y = y \delta \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_3.$$

Hierin verschwinden die Glieder erster Ordnung nicht, es sei denn, dass die $\delta\varepsilon$ alle drei gleich Null gesetzt werden. Die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe ist daher:

$$((x+1)e_1 + \frac{1}{2}e_2)p + (ye_1 + e_3)q,$$

also linear ableitbar aus

$$(x+1)p + yq, \quad p, \quad q$$

oder aus $xp + yq$, p, q.

4. Beispiel: Wir wollen die zweite Methode auf die dreigliedrige Gruppe:

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+1}, \quad y_1 = y$$

anwenden, deren infinitesimale Transformationen wir schon in § 1 des 5. Kap. in der Form p, xp, x^2p mit Hülfe der ersten Methode fanden. Die zu

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 x + \varepsilon_2}{\varepsilon_3 x + 1}, \quad y_1 = y$$

inverse Transformation wird durch Auflösung nach x, y erhalten:

$$x = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1}x_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{-\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}x_1 + 1}, \quad y = y_1.$$

Es ist also:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

Setzen wir

$$\delta x = \frac{\partial\varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon})}{\partial\bar{\varepsilon}_1}\delta\varepsilon_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\varepsilon}_2}\delta\varepsilon_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\varepsilon}_3}\delta\varepsilon_3,$$

wobei

$$\varphi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}) \equiv \frac{\bar{\varepsilon}_1 x_1 + \bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_3 x_1 + 1}$$

ist, so kommt:

$$\delta x = \frac{x_1}{\bar{\varepsilon}_3 x_1 + 1}\delta\varepsilon_1 + \frac{1}{\bar{\varepsilon}_3 x_1 + 1}\delta\varepsilon_2 - \frac{\bar{\varepsilon}_1 x_1 + \bar{\varepsilon}_2}{(\bar{\varepsilon}_3 x_1 + 1)^2}x_1\delta\varepsilon_3$$

und, da hier $\psi(x_1, y_1, \bar{\varepsilon}) \equiv y_1$ ist:

$$\delta y = 0.$$

Setzen wir insbesondere etwa $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 0$, also $\bar{\varepsilon}_1 = 1$, $\bar{\varepsilon}_2 = -1$, $\bar{\varepsilon}_3 = 0$ und $x_1 = x + 1$, so ergiebt sich:

$$\delta x = (x+1)\delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2 - x^2\delta\varepsilon_3, \quad \delta y = 0,$$

also als allgemeinste infinitesimale Transformation

$$((x + 1)e_1 + e_2 - x^2 e_3)p.$$

Sie ist linear ableitbar aus $(x + 1)p$, p und $-x^2p$ oder also aus p, xp, x^2p. Die Annahme $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ hätte die erste Methode geliefert.

§ 4. Einführung neuer Veränderlicher in eine Gruppe.

Es sei wieder eine r-gliedrige Gruppe vorgelegt:

$$(19) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a_1 \ldots a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \ldots a_r).$$

Jede ihrer Transformationen führt die Punkte (x, y) der Ebene in neue Punkte (x_1, y_1) über. Dabei können wir unter x, y bez. x_1, y_1 gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten mit Cartesischem Axenkreuz verstehen oder auch irgend welche durch ein anderes Coordinatensystem definierte Variabeln.

Neues Coordinatensystem.

Wir wollen nun durch eine Transformation:

$$(20) \qquad \mathfrak{x} = \lambda(x, y), \quad \mathfrak{y} = \mu(x, y)$$

neue Veränderliche in die Gruppe einführen. Wir können dies so auffassen, als ob die Punkte nunmehr statt durch die Coordinaten x, y durch gewisse Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ in einem anderen zu Grunde gelegten Coordinatensystem bestimmt werden sollen, z. B., wenn die Gleichungen (20) diese sind:

$$\mathfrak{x} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \mathfrak{y} = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

statt durch die rechtwinkligen x, y durch die Polarcoordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Der Punkt (x, y) ist in dieser Auffassung identisch mit dem Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Entsprechend werden wir auch die transformierten Punkte (x_1, y_1) auf das neue Coordinatensystem beziehen, indem wir analog (20) setzen:

$$(20') \qquad \mathfrak{x}_1 = \lambda(x_1, y_1), \quad \mathfrak{y}_1 = \mu(x_1, y_1).$$

Wenn wir vermöge (20) und (20′) die Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$; $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1$ anstatt x, y; x_1, y_1 in die Gleichungen (19) der Gruppe einführen, so erhalten wir gewisse Gleichungen, deren Auflösung nach $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1$ etwa ergiebt:

$$(21) \qquad \mathfrak{x}_1 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \ldots a_r), \quad \mathfrak{y}_1 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \ldots a_r).$$

Dass sie nach $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1$ — wie auch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ — auflösbar sind, ist sofort einzusehen, da (19) und (20) nach x, y auflösbar sind. Diese neuen Gleichungen (21) stellen dann nichts anderes dar als die Transformation (19), nur freilich ausgedrückt in einem anderen Coordinatensystem, was natürlich an dem geometrischen Sinn der Transformation

nichts ändern kann. Da nun die ∞^r durch (19) dargestellten Transformationen eine Gruppe bilden, also die Aufeinanderfolge zweier jener Transformationen durch eine jener Transformationen ersetzt werden kann, und da diese Eigenschaft einen rein geometrischen Sinn hat, so müssen unsere ∞^r Transformationen auch in der neuen Form (21) die Gruppeneigenschaft haben.

Die neuen Gleichungen (21) stellen also ebenfalls eine r-gliedrige Gruppe dar. Aus unserer Überlegung folgt somit das analytisch zwar auch ableitbare, aber doch nicht so evidente Ergebnis, dass, wenn man (21) und

$$(21') \qquad \mathfrak{x}_2 = \Phi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, b_1 \,.\,.\, b_r), \quad \mathfrak{y}_2 = \Psi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, b_1 \,.\,.\, b_r)$$

ansetzt und hieraus $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ eliminiert, die hervorgehenden Gleichungen die Form haben müssen:

$$\mathfrak{x}_2 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \lambda_1(a, b) \,.\,.\, \lambda_r(a, b)), \quad \mathfrak{y}_2 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \lambda_1(a, b) \,.\,.\, \lambda_r(a, b)).$$

Satz 4: *Führt man in eine r-gliedrige Gruppe*

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \,.\,.\, a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \,.\,.\, a_r)$$

neue Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ ein, indem man gleichzeitig

$$\mathfrak{x} = \lambda(x, y), \quad \mathfrak{y} = \mu(x, y)$$

und

$$\mathfrak{x}_1 = \lambda(x_1, y_1), \quad \mathfrak{y}_1 = \mu(x_1, y_1)$$

setzt, so stellen die so erhaltenen neuen Gleichungen

$$\mathfrak{x}_1 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \,.\,.\, a_r), \quad \mathfrak{y}_1 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \,.\,.\, a_r)$$

wieder eine r-gliedrige Gruppe dar.

Neue Veränderliche in demselben Coordinatensystem.

Nachdem wir dies eingesehen haben, steht es uns nun frei, die Gleichungen (20) und (20′) in anderer Weise aufzufassen. Wir können uns vorstellen, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ seien Coordinaten in *demselben* System wie x, y und x_1, y_1. Alsdann sind nicht mehr wie früher (x, y) und $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ identische Punkte, ausgedrückt in verschiedenen Coordinatensystemen, sondern *verschiedene* Punkte, ausgedrückt in demselben System. Mit anderen Worten: Wir fassen (20) als die Gleichungen einer Transformation S auf, welche die Punkte (x, y) in neue Lagen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, also die Punkte (x_1, y_1) in neue Lagen $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1)$ überführt. In dieser Auffassung stellen die Gleichungen (21) diejenigen Transformationen T_a, T_b .. dar, welche aus den Transformationen T_a, T_b ... der Gruppe (19) hervorgehen, wenn man sowohl die ursprünglichen als auch die transformierten Punkte (x, y) und (x_1, y_1) der Transformation S unterwirft. Es ist also, wie wir es schon in Satz 5, § 2 des 3. Kap. gelegentlich ausgesprochen haben, allgemein

Transform. einer Gruppe.

$$\mathsf{T}_a = S^{-1}\, T_a\, S.$$

Dass T_a, also die Transformationen (21), wirklich eine Gruppe bilden, ist zwar schon bewiesen, kann aber auch so eingesehen werden: Ist:

$$T_a\, T_b = T_c,$$

so ist, weil

$$\mathsf{T}_a = S^{-1}\, T_a\, S, \quad \mathsf{T}_b = S^{-1}\, T_b\, S, \quad \mathsf{T}_c = S^{-1}\, T_c\, S$$

ist:

$$\mathsf{T}_a\, \mathsf{T}_b = S^{-1}\, T_a\, S\, S^{-1}\, T_b\, S = S^{-1}\, T_a\, T_b\, S = S^{-1}\, T_c\, S = \mathsf{T}_c.$$

Dies aber ist der symbolische Ausdruck der Gruppeneigenschaft.

Jeder Transformation T_a der ursprünglichen Gruppe (19) entspricht also eine ganz bestimmte Transformation

$$\mathsf{T}_a = S^{-1}\, T_a\, S$$

der neuen Gruppe (21) derart, dass mit

$$T_a\, T_b = T_c$$

auch

$$\mathsf{T}_a\, \mathsf{T}_b = \mathsf{T}_c$$

ist. T_a und T_b sind nur dann identisch, wenn

$$S^{-1}\, T_a\, S = S^{-1}\, T_b\, S,$$

d. h. wie durch Ausführung von S beiderseits links und Ausführung von S^{-1} beiderseits rechts folgt, wenn

$$T_a = T_b$$

ist. Unter den T sind also genau so viele verschiedene enthalten wie unter den T. Die neue Gruppe (21) ist demnach auch r-gliedrig. Ist T_b zu T_a invers, so ist offenbar auch T_b zu T_a invers, und aus $T_a = 1$ folgt $\mathsf{T}_a = 1$; d. h. diejenigen Werte $a_1^0 \,..\, a_r^0$ der Parameter $a_1 \,..\, a_r$, für welche die Gleichungen (19) die identische Transformation darstellen, geben auch bei der Gruppe (21) die identische Transformation.

Satz 5: *Führt man auf eine r-gliedrige Gruppe T_a, $T_b \dots$ mit paarweis inversen Transformationen eine Transformation S aus, so erhält man wieder eine r-gliedrige Gruppe T_a, $\mathsf{T}_b \dots$ mit paarweis inversen Transformationen. Es ist allgemein*

$$\mathsf{T}_a = S^{-1}\, T_a\, S.$$

Wenn ferner $T_a\, T_b = T_c$ ist, so ist auch $\mathsf{T}_a\, \mathsf{T}_b = \mathsf{T}_c$. Die identische Transformation der neuen Gruppe gehört zu demselben Wertsystem der Parameter der Gruppe wie in der ursprünglichen Gruppe.

Ähnliche Gruppen.

Zwei solche Gruppen T_a, T_b .. und T_a, $\mathsf{T}_b \dots$, deren eine aus der anderen durch Ausführung einer Transformation S hervorgeht, nennen

wir einander *ähnlich.* Unserer ersten Auffassung nach können zwei ähnliche Gruppen auch als geometrisch einander gleich, wenn auch analytisch verschieden eingekleidet, betrachtet werden. Wir sprachen früher öfters von gleichberechtigten Untergruppen gewisser projectiver Gruppen, z. B. von denen der linearen homogenen Gruppe (in § 4 des 5. Kap.). Es ist klar, dass diese innerhalb der linearen homogenen Gruppe gleichberechtigten Untergruppen mit einander ähnlich sind und zwar vermöge einer linearen homogenen Transformation S.

Transform. einer Gruppe in sich.

Wählt man als Transformation S eine Transformation der Gruppe $T_a, T_b \dots$ selbst, so geht diese Gruppe in sich über, denn ist z. B.

$$S = T_a,$$

so ist

$$\mathsf{T}_b = T_a^{-1}\, T_b\, T_a.$$

Die rechte Seite ist aber die Aufeinanderfolge von drei Transformationen der ursprünglichen Gruppe, also einer Transformation dieser Gruppe äquivalent. T_b gehört daher dann der alten Gruppe an. Insbesondere ist dann auch $\mathsf{T}_a = T_a$.

Satz 6: *Führt man auf eine r-gliedrige Gruppe $T_a, T_b \dots$ mit paarweis inversen Transformationen eine Transformation T der Gruppe aus, so geht die Gruppe in sich über, indem T ihre Transformationen unter einander vertauscht.*

Es kann aber auch, wenn S keine Transformation der Gruppe $T_a, T_b \dots$ ist, der Fall eintreten, dass die neue Gruppe $\mathsf{T}_a, \mathsf{T}_b \dots$ mit der ursprünglichen Gruppe identisch ist. Hierfür ein Beispiel:

Beispiel.

Beispiel: Die Gleichungen:

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b$$

stellen die zweigliedrige Gruppe der Translationen dar. Wir wollen auf dieselbe die Rotation:

$$\mathfrak{x} = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad \mathfrak{y} = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

ausüben, setzen also noch

$$\mathfrak{x}_1 = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \quad \mathfrak{y}_1 = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha.$$

Elimination von x, y und x_1, y_1 giebt:

$$\mathfrak{x}_1 = (\mathfrak{x} \cos \alpha + \mathfrak{y} \sin \alpha + a) \cos \alpha - (-\mathfrak{x} \sin \alpha + \mathfrak{y} \cos \alpha + b) \sin \alpha,$$
$$\mathfrak{y}_1 = (\mathfrak{x} \cos \alpha + \mathfrak{y} \sin \alpha + a) \sin \alpha + (-\mathfrak{x} \sin \alpha + \mathfrak{y} \cos \alpha + b) \cos \alpha,$$

oder:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + a \cos \alpha - b \sin \alpha, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + a \sin \alpha + b \cos \alpha.$$

Diese neue Gruppe ist in den rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ wieder die Gruppe aller Translationen. Man kann nämlich die hierin auftreten-

den Parameter a, b auch durch $a\cos\alpha - b\sin\alpha$ und $a\sin\alpha + b\cos\alpha$ ersetzen:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \mathfrak{b}.$$

Dass die Rotation jede Translation wieder in eine Translation verwandelt, liegt offenbar darin, dass sie parallele und gleichlange Strecken wieder in parallele und gleichlange Strecken überführt. (Siehe Fig. 25.)

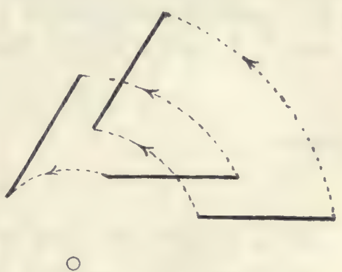
Inf. Transf. der transf. Gruppe

Es sei nun

$$Uf \equiv \xi(x, y)p + \eta(x, y)q$$

das Symbol irgend einer infinitesimalen Transformation der Gruppe (19). Die Gleichungen dieser infinitesimalen Transformation sind dann von der Form:

$$(22) \quad x_1 = x + \xi t + \cdots, \quad y_1 = y + \eta t + \cdots,$$


Fig. 25.

in der t einen gegen Null convergierenden Parameter bezeichnet und die nicht geschriebenen Glieder convergente Reihen nach ganzen Potenzen von t darstellen. Auch in diese Transformation (22) unserer Gruppe führen wir die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ vermöge (20) und (20′) ein. Es kommt zunächst:

$$\mathfrak{x}_1 = \lambda(x + \xi t + \cdots, \quad y + \eta t + \cdots)$$
$$= \lambda(x, y) + \left(\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x}\xi + \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y}\eta\right)t + \cdots,$$

also nach (20):

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \left(\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x}\xi + \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y}\eta\right)t + \cdots$$

und entsprechend

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \left(\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}\xi + \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y}\eta\right)t + \cdots.$$

Demnach hat die infinitesimale Transformation Uf, geschrieben in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, das Symbol:

$$\mathfrak{U}f = \left(\frac{\partial \lambda(x,y)}{\partial x}\xi(x, y) + \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y}\eta(x, y)\right)\mathfrak{p} +$$
$$+ \left(\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x}\xi(x, y) + \frac{\partial \mu(x,y)}{\partial y}\eta(x, y)\right)\mathfrak{q}.$$

Rechts sind natürlich noch statt x und y vermöge (20) $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eingeführt zu denken. $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sollen die Differentialquotienten von f nach $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ vorstellen. Wir können offenbar $\mathfrak{U}f$ kürzer so schreiben:

$$\mathfrak{U}f = \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\eta\right)\mathfrak{p} + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\eta\right)\mathfrak{q}$$

oder auch

$$\mathfrak{U}f = U\mathfrak{x}\,\mathfrak{p} + U\mathfrak{y}\,\mathfrak{q}.$$

Wenn wir direct in das Symbol

$$Uf \equiv \xi p + \eta q$$

die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ einführen, indem wir f als Function von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auffassen und daher

$$p \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \equiv \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\mathfrak{q}$$

sowie

$$q = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\mathfrak{q}$$

setzen, so geht Uf über in

$$\xi\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\mathfrak{q}\right) + \eta\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\mathfrak{p} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\mathfrak{q}\right)$$

oder

$$U\mathfrak{x}\,\mathfrak{p} + U\mathfrak{y}\,\mathfrak{q},$$

also in das soeben erhaltene $\mathfrak{U}f$. Daher gilt

Satz 7: *Führt man in die Gleichungen einer Gruppe in x, y neue Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ein, so kann man das Symbol $\mathfrak{U}f$ derjenigen infinitesimalen Transformation der neuen Gruppe, in welche eine infinitesimale Transformation Uf der ursprünglichen Gruppe übergeht, direct durch Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in das Symbol Uf berechnen. Es kommt*

$$\mathfrak{U}f \equiv U\mathfrak{x}\,\mathfrak{p} + U\mathfrak{y}\,\mathfrak{q},$$

wenn man hierin noch $U\mathfrak{x}$ und $U\mathfrak{y}$ durch x, y allein ausdrückt.

In § 2 des 3. Kap. haben wir schon diesen Satz kurz angedeutet und ihn in der Folge bei den Beispielen der ersten Abteilung einige Male benutzt.

Beispiel. *Beispiel:* Das obige Beispiel der Gruppe:

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b,$$

die der Transformation

$$\mathfrak{x} = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

unterworfen wurde, wollen wir hier ausführen. Die allgemeinste infinitesimale Transformation der Gruppe ist

$$Uf \equiv mp + nq \quad (m, n = \text{Const.}),$$

also

$$U\mathfrak{x} \equiv m\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + n\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = m\cos\alpha - n\sin\alpha,$$

$$U\mathfrak{y} \equiv m\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + n\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = m\sin\alpha + n\cos\alpha,$$

daher das neue Symbol:

$$\mathfrak{U}f \equiv (m\cos\alpha - n\sin\alpha)\,\mathfrak{p} + (m\sin\alpha + n\cos\alpha)\mathfrak{q}.$$

Die Coefficienten von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ hierin sind Constanten. $\mathfrak{U}f$ ist daher wieder, wie es nach den früher zu diesem Beispiel gemachten Bemerkungen sein muss, eine infinitesimale Translation in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$.

Kapitel 7.

Erzeugung einer Gruppe aus ihren infinitesimalen Transformationen.

Im vorigen Kapitel haben wir nachgewiessen, dass jede Gruppe mit paarweis inversen Transformationen gewisse infinitesimale Transformationen besitzt. Nunmehr werden wir umgekehrt erkennen, wie man ausgehend von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe wieder zu den endlichen Gleichungen der Gruppe gelangt.

§ 1. Die von den infinitesimalen Transformationen der Gruppe erzeugten eingliedrigen Untergruppen.

Wir wissen, dass sich das Symbol der allgemeinsten infinitesimalen Transformation Uf einer r-gliedrigen Gruppe mit paarweis inversen Transformationen:

$$(1) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a_1 \,.\,. a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \,.\,. a_r)$$

linear aus gewissen r von einander unabhängigen Symbolen

$$U_i f \equiv \xi_i(x, y)p + \eta_i(x, y)q \quad (i = 1, 2 \,.\,. r)$$

ableiten lässt:

$$Uf \equiv e_1 U_1 f + e_2 U_2 f + \cdots + e_r U_r f.$$

Die Grössen $e_1, e_2 \,.\,. e_r$ sind hierin ganz beliebig wählbare Constanten. Da es bei einer infinitesimalen Transformation Uf auf einen constanten Factor nicht ankommt, so sind nur die Verhältnisse von $e_1, e_2 \,.\,. e_r$ zu einander von Belang. Die Gruppe enthält daher ∞^{r-1} verschiedene infinitesimale Transformationen. Jede derselben erzeugt eine eingliedrige Gruppe von endlichen Transformationen, und es erhebt sich nun die

Frage, *ob alle diese endlichen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe* (1) *angehören oder nicht.*

Nachweis, dass Uf Transform. der Gruppe erzeugt.

Um dies zu entscheiden, sei vorausgesetzt, dass

$$Uf \equiv \xi p + \eta q$$

irgend eine infinitesimale Transformation der r-gliedrigen Gruppe ist. Wir wählen alsdann eine Function $\mathfrak{x}$ von x, y so, dass identisch

$$U\mathfrak{x} \equiv \xi \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = 0$$

wird, d. h. wir wählen $\mathfrak{x}$ als Integral der Differentialgleichung ersten Grades

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

zwischen x und y. Darauf nehmen wir $\mathfrak{y}$ so als Function von x, y an, dass identisch

$$U\mathfrak{y} \equiv \xi \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = 1$$

wird. Es giebt stets, wie man leicht einsieht, eine solche Function $\mathfrak{y}$, und zwar ist sie von der Function $\mathfrak{x}$ unabhängig.

Neue Variabeln vermöge Uf.

Nunmehr benutzen wir $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als neue Veränderliche. Durch Einführung derselben geht unsere r-gliedrige Gruppe (1) nach Satz (4), § 4 des 6. Kap., wieder in eine r-gliedrige Gruppe über, etwa in diese:

(2) $$\mathfrak{x}_1 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \,.\,. a_r), \quad \mathfrak{y}_1 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \,.\,. a_r).$$

Nach Satz 7, § 4 des 6. Kap., geht ihre infinitesimale Transformation Uf in die infinitesimale Transformation

$$\mathfrak{U}f = U\mathfrak{x} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + U\mathfrak{y} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

der neuen Gruppe (2) über. Wegen $U\mathfrak{x} \equiv 0$, $U\mathfrak{y} \equiv 1$ wird aber

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}.$$

Die neue Gruppe enthält demnach die infinitesimale Transformation

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \cdots, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \delta t + \cdots,$$

in der die nicht geschriebenen Glieder von zweiter und höherer Ordnung in der gegen Null convergierenden Grösse δt sind.

Folge einer endl. u. der inf. Transf.

Nach einer allgemeinen Transformation (2) der neuen Gruppe wollen wir jetzt diese infinitesimale ausüben. Wir haben also zu setzen:

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 + \cdots, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_1 + \delta t + \cdots$$

und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ hieraus vermittelst (2) zu eliminieren. So kommt:

(3) $\mathfrak{x}_2 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot\cdot a_r) + \cdots, \quad \mathfrak{y}_2 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot\cdot a_r) + \delta t + \cdots.$

Diese Transformation muss wieder der Gruppe (2) angehören und also, da sie nur unendlich wenig von der Transformation mit den bestimmt gewählten Parametern $a_1 \, .. \, a_r$ abweicht, aus (2) dadurch hervorgehen, dass darin für $a_1 \, .. \, a_r$ gewisse von diesen Werten nur unendlich wenig abweichende Werte

$$a_1 + \delta a_1, \quad \cdots a_r + \delta a_r$$

gesetzt werden, sodass (3) äquivalent sein muss mit:

$$\mathfrak{x}_2 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 + \delta a_1, \cdot\cdot a_r + \delta a_r), \quad \mathfrak{y}_2 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 + \delta a_1, \cdot\cdot a_r \cdot\cdot \delta a_r)$$

oder mit:

$$\mathfrak{x}_2 = \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdots a_r) + \sum_1^r{}_i \frac{\partial \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a)}{\partial a_i} \delta a_i + \cdots,$$

$$\mathfrak{y}_2 = \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdots a_r) + \sum_1^r{}_i \frac{\partial \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a)}{\partial a_i} \delta a_i + \cdots.$$

Es ist also:

$$(4) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^r{}_i \frac{\partial \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot\cdot a_r)}{\partial a_i} \delta a_i + \cdots = \cdots \\ \displaystyle\sum_1^r{}_i \frac{\partial \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot\cdot a_r)}{\partial a_i} \delta a_i + \cdots = \delta t + \cdots. \end{cases}$$

Hier sind die durch Punkte angedeuteten Glieder von zweiter oder höherer Ordnung in den δa links und in δt rechts. Da die Transformation mit den Parameterwerten $a_i + \delta a_i$ der Aufeinanderfolge der Transformation mit den Parameterwerten δa_i und der infinitesimalen Transformation, die δt enthält, äquivalent ist, wie auch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ gewählt sein mögen, so sind die $a_i + \delta a_i$ oder also auch die δa_i selbst gewisse Functionen der a_i und von δt allein.

Wenn für die δa_i eben diese Functionen der a_i und von δt eingesetzt werden, so müssen die Gleichungen (4) Identitäten werden für alle Werte von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Umgekehrt werden wir nun die Gleichungen (4) benutzen, um daraus die Beziehungen abzuleiten, welche die δa_i durch die a_i und durch δt ausdrücken. Wir geben nämlich etwa in der zweiten Relation (4) den Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auf r verschiedene Weisen bestimmte, aber irgendwie gewählte Zahlenwerte. Alsdann erhalten wir r Gleichungen zwischen den a_i, δa_i und δt und zwar r Gleichungen, die von den a_i, δa_i und δt nicht nur an den bestimmten Stellen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, sondern in der ganzen Ebene erfüllt sein müssen, da die δa_i Functionen der a_i und von δt, aber frei von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind.

Es mögen $\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_r$ und $\Psi_1, \Psi_2 \ldots \Psi_r$ die Werte sein, welche Φ bez. Ψ bei diesen r Annahmen für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ erhält. Bilden wir nun die Matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Phi_1}{\partial a_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Phi_r}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Phi_r}{\partial a_r} \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Psi_1}{\partial a_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Psi_r}{\partial a_1} & \cdot & \cdot & \frac{\partial \Psi_r}{\partial a_r} \end{vmatrix},$$

so ist leicht einzusehen, dass nicht alle r-reihigen Determinanten derselben identisch verschwinden für alle r Wertepaare $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Nehmen wir nämlich sogleich in allgemeinster Weise an, dass alle ϱ-reihigen Determinanten, nicht aber alle $(\varrho - 1)$-reihigen verschwinden, so können wir in einer der ersteren, in der nicht alle $(\varrho - 1)$-reihigen Unterdeterminanten Null sind, in einer Zeile für das betreffende Wertepaar der Veränderlichen eben $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ selbst setzen und haben alsdann eine homogene lineare partielle Differentialgleichung in $a_1 \ldots a_r$ mit nicht verschwindenden Coefficienten, die von $\Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \ldots a_r)$ bez. $\Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \ldots a_r)$ erfüllt wird. Da nun alle ϱ-reihigen Determinanten verschwinden, so wird die Gleichung auch dann bestehen, wenn in ihr die Function Φ bez. Ψ durch Ψ bez. Φ ersetzt wird. Nach Satz 1, § 1 des 6. Kap., sind also $a_1 \ldots a_r$ nicht sämtlich wesentliche Parameter der Gruppe (2). Dies aber widerspricht der Voraussetzung. Es verschwinden demnach auch nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix. Sicher können wir folglich aus den Gleichungen, die aus (4) durch besondere Wahl von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ hervorgehen, passende r herausgreifen von der Form:

$$u_{i1}\,\delta a_1 + u_{i2}\,\delta a_2 + \cdots + u_{ir}\,\delta a_r + \cdots = \cdots,$$
$$v_{j1}\,\delta a_1 + v_{j2}\,\delta a_2 + \cdots + v_{jr}\,\delta a_r + \cdots = \delta t + \cdots,$$
$$(i = 1, 2 \ldots r - \sigma,\ j = 1, 2 \ldots \sigma)$$

und zwar bedeuten darin die u und v gewisse Functionen von $a_1 \ldots a_r$, deren Determinante nicht verschwindet. Die Glieder höherer Ordnung in den δa_i und in δt sind nur angedeutet. Die Coefficienten auch dieser Glieder sind Functionen von $a_1 \ldots a_r$ allein.

Wichtige Relationen.

Nun aber folgt aus einem Satze der Theorie der unendlichen

Potenzreihen, dass wir hieraus $\delta a_1 \, . \, . \, \delta a_r$ nach ganzen Potenzen von δt entwickeln können in der Form

$$(5) \qquad \delta a_i = w_i(a_1 \, . \, . \, a_r)\delta t + \cdots \quad (i = 1, 2 \, . \, . \, r),$$

in der keines der w_i *identisch verschwindet.* Denn eines der w_i verschwindet nur dann, wenn unter den obigen r Gleichungen solche der zweiten Art gar nicht vorkommen, wenn also $\sigma = 0$ ist. Dann aber verschwinden alle w_i, und die Substitution der Werte (5) in die letzte Gleichung (4) würde zu dem Widerspruch führen, dass links δt nur in höheren Potenzen auftritt, während rechts auch δt^1 vorkommt.

Dies ist ein sehr wichtiges Ergebnis. Um es zu verwerten, kehren wir wieder zu den Gleichungen (4) zurück, in denen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ wieder die veränderlichen Grössen sein sollen. Wir bemerkten schon, dass auch für willkürliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ diese Gleichungen (4) durch die gefundenen Werte (5) identisch erfüllt werden müssen. Die Substitution der Werte (5) liefert demnach die Identitäten:

$$\sum_1^r {}_i \frac{\partial \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot \cdot a_r)}{\partial a_i} w_i(a_1 \, . \, . \, a_r)\delta t + \cdots \equiv \cdots,$$

$$\sum_1^r {}_i \frac{\partial \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot \cdot a_r)}{\partial a_i} w_i(a_1 \, . \, . \, a_r)\delta t + \cdots \equiv \delta t + \cdots.$$

Hierin sind rechts und links die nur angedeuteten Glieder mit höheren ganzen Potenzen von δt behaftet.

Wir dividieren beiderseits durch δt und gehen dann zur Grenze Null für δt über. Dadurch ergiebt sich:

$$(6) \qquad \begin{cases} \sum_1^r {}_i \frac{\partial \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot \cdot a_r)}{\partial a_i} w_i(a_1 \, . \, . \, a_r) \equiv 0, \\ \sum_1^r {}_i \frac{\partial \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \cdot \cdot a_r)}{\partial a_i} w_i(a_1 \, . \, . \, a_r) \equiv 1, \end{cases}$$

und hierin sind $w_1 \, . \, . \, w_r$ sämtlich nicht identisch Null.

Um hieraus Schlüsse über die Form von Φ und Ψ zu ziehen, betrachten wir zunächst die lineare partielle Differentialgleichung:

$$(7) \qquad \sum_1^r {}_i \, w_i(a_1 \, . \, . \, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i} = 0.$$

Sie besitzt $r - 1$ von einander unabhängige Lösungen f, etwa $\alpha_1(a_1 \, . \, . \, a_r)$, $. \, . \, \alpha_{r-1}(a_1 \, . \, . \, a_r)$, welche Integrale des simultanen Systems

$$\frac{d a_1}{w_1(a_1 \cdots a_r)} = \frac{d a_2}{w_2(a_1 \cdots a_r)} = \cdots = \frac{d a_r}{w_r(a_1 \cdots a_r)}$$

sind. Jede andere Lösung f von (7) muss eine Function von $\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}$ sein und darf ausserdem die in (7) als Variabeln auftretenden $a_1 \dots a_r$ nicht enthalten. Die erste Identität (6) aber sagt aus, dass Φ eine Lösung von (7) ist. Demnach lässt sich Φ sicher darstellen als Function von $\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}$ und von den in (7) gar nicht auftretenden, also bei der Integration von (7) die Rolle willkürlicher Constanten spielenden Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$:

$$(8) \qquad \Phi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \dots a_r) \equiv \overline{\Phi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1 \dots \alpha_{r-1}).$$

Ferner ist nach (6) Ψ Lösung der Differentialgleichung:

$$(9) \qquad \sum_1^r {}_i\, w_i(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i} = 1.$$

Wenn $\alpha(a_1 \dots a_r)$ irgend eine particulare Lösung derselben bedeutet, so wird also offenbar $\Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \dots a_r) - \alpha(a_1 \dots a_r)$ eine Lösung der Differentialgleichung (7), d. h. eine Function von $\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}$ und von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, die in (7) nicht auftreten, etwa die Function $\overline{\Psi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1 \dots \alpha_{r-1})$, sodass

$$(10) \qquad \Psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, a_1 \dots a_r) \equiv \overline{\Psi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1 \dots \alpha_{r-1}) + \alpha(a_1 \dots a_r)$$

ist.

Wir haben also erkannt, dass die Gleichungen (2) der in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ geschriebenen Gruppe sich wegen (8) und (10) auch so darstellen lassen:

$$(11) \qquad \mathfrak{x}_1 = \overline{\Phi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1 \dots \alpha_{r-1}), \quad \mathfrak{y}_1 = \overline{\Psi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1 \dots \alpha_{r-1}) + \alpha.$$

Sind nun $a_1^0 \dots a_r^0$ die Werte der Parameter $a_1 \dots a_r$, für die sich (1) und also auch nach Satz 5 des § 4, 6. Kap., die Gleichungen (2) auf die identische Transformation reducieren, und setzt man diese Werte in $\alpha_1 \dots \alpha_{r-1}$, α ein, wodurch diese etwa in $\alpha_1^0 \dots \alpha^0_{r-1}$, α^0 übergehen, so muss sich (11) auf

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y}$$

reducieren. Es ist also:

$$(12) \qquad \overline{\Phi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1^0 \dots \alpha^0_{r-1}) \equiv \mathfrak{x}, \quad \overline{\Psi}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha_1^0 \dots \alpha^0_{r-1}) + \alpha^0 \equiv \mathfrak{y}.$$

Wählen wir weiterhin $a_1 \dots a_r$ so, dass nur

$$\alpha_1 = \alpha_1^0, \dots \alpha_{r-1} = \alpha^0_{r-1}$$

wird, aber α einen beliebigen Wert annimmt, was immer angeht, da

$\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}$, α unabhängige Functionen von $a_1 \ldots a_r$ sind, so folgt wegen (12), dass die Gruppe alle Translationen von der Form

$$(13) \qquad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \text{Const.}$$

enthält. —

Kehren wir schliesslich zum Ausgangspunkt zurück: Wir hatten in die Gruppe (1) solche Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eingeführt, dass eine gewisse, aber beliebig ausgewählte infinitesimale Transformation Uf der Gruppe (1) die Form einer infinitesimalen Translation in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$:

$$\mathfrak{U}f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}}$$

annahm. Jetzt haben wir bewiesen, dass alsdann die neue Gruppe auch alle endlichen Translationen (13) enthält, alle endlichen Transformationen also, die von $\mathfrak{U}f$ erzeugt werden, kurz die eingliedrige Gruppe $\mathfrak{U}f$. Führen wir schliesslich wieder die ursprünglichen Veränderlichen x, y ein, so kommen wir zu dem

Satz 1: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen die infinitesimale Transformation*

$$Uf \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

so enthält sie auch alle endlichen Transformationen der von Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe.

Zusammen mit Theorem 18, § 3 des 6. Kap., giebt dieser Satz das

Theorem 19: *Jede r-gliedrige Gruppe in x, y mit paarweis inversen Transformationen und den r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1f \ldots U_rf$ enthält alle endlichen Transformationen aller ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$.* Ergebnis.

Bei den in der ersten Abteilung betrachteten projectiven Gruppen haben wir dieses Theorem jedesmal besonders bewiesen. Jene Gruppen liefern daher viele Beispiele zu unserem Theorem. Um auch einmal eine nicht-projective Gruppe zu betrachten, geben wir noch das folgende Beispiel. Beispiele.

Beispiel: Die dreigliedrige Gruppe

$$x_1 = x + a + by^2, \quad y_1 = cy$$

besitzt die drei von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$p, \quad y^2 p, \quad yq.$$

Die endlichen Gleichungen der von der allgemeinen infinitesimalen Transformation der Gruppe

$$Uf \equiv (e_1 + e_2 y^2)p + e_3 yq$$

erzeugten eingliedrigen Gruppe gehen hervor durch Integration des simultanen Systems:

$$\frac{dx_1}{e_1 + e_2 y_1^2} = \frac{dy_1}{e_3 y_1} = dt$$

mit den Anfangswerten $x_1 = x$, $y_1 = y$ für $t = 0$. Es kommt zunächst

$$\frac{1}{e_3}(\lg y_1 - \lg y) = t$$

oder

$$y_1 = y e^{e_3 t},$$

daher

$$dx_1 = (e_1 + e_2 y^2 e^{2 e_3 t}) dt.$$

Diese Gleichung giebt integriert, indem y die Rolle einer Constanten spielt:

$$x_1 - x = e_1 t + \frac{e_2}{2 e_3}(e^{2 e_3 t} - 1) y^2.$$

In der That haben die Gleichungen:

$$x_1 = x + e_1 t + \frac{e_2}{2 e_3}(e^{2 e_3 t} - 1) y^2, \quad y_1 = e^{e_3 t} y$$

die Form

$$x_1 = x + a + by^2, \quad y_1 = cy.$$

§ 2. Erzeugung einer Gruppe durch ihre infinitesimalen Transformationen.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben gezeigt, dass eine r-gliedrige Gruppe mit den r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1 f \dots U_r f$ sicher alle endlichen Transformationen enthält, welche die eingliedrige Gruppe $e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$ besitzt.

Es giebt gerade ∞^{r-1} solche eingliedrige Gruppen, jede hat ∞^1 endliche Transformationen. Wir werden nun darthun, dass alle diese endlichen Transformationen aller dieser eingliedrigen Gruppen wirklich auch eine Schar von ∞^r und nicht weniger verschiedenen Transformationen bilden. Wir finden es jedoch zweckmässig, zunächst ein etwas allgemeineres Theorem zu beweisen.

Verallgemeinerte Frage.

Es mögen nämlich $U_1 f \dots U_r f$ die Symbole von irgend welchen

r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen in x, y sein, während wir es *dahingestellt sein lassen, ob sie einer r-gliedrigen Gruppe angehören oder nicht.* Die r infinitesimalen Transformationen bestimmen, da sie von einander unabhängig sein sollen, also keine lineare Relation mit constanten Coefficienten zwischen ihnen besteht, eine Schar von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen

r beliebige unabh. inf. Transform.

$$Uf \equiv e_1 U_1 f + e_2 U_2 f + \cdots + e_r U_r f.$$

Hier bedeuten $e_1, e_2 \ldots e_r$ irgend welche r Constanten, auf deren Verhältnisse allein es ankommt. Jede dieser ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen erzeugt in bekannter Weise eine *eingliedrige Gruppe* von endlichen Transformationen. Die Gleichungen der zur obigen Uf gehörigen eingliedrigen Gruppe ergeben sich leicht in Form von Reihenentwickelungen:

Reihenentwickelgn.

$$(14) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \frac{t}{1} Ux + \frac{t^2}{1 \cdot 2} UUx + \cdots, \\ y_1 = y + \frac{t}{1} Uy + \frac{t^2}{1 \cdot 2} UUy + \cdots. \end{cases}$$

Wir werden direct zeigen, dass dies die Integralgleichungen des simultanen Systems:

$$(15) \qquad \frac{dx_1}{Ux_1} = \frac{dy_1}{Uy_1} = dt$$

sind, dessen Integration die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe Uf liefert. Aus (14) folgt zunächst, dass x_1, y_1 sich für $t = 0$ auf x, y reducieren. Ferner folgt:

$$\frac{dx_1}{dt} = Ux + \frac{t}{1} UUx + \frac{t^2}{1 \cdot 2} UUUx + \cdots$$

und, indem wir Ux_1 nach (14) bilden:

$$Ux_1 = U(x + \frac{t}{1} Ux + \frac{t^2}{1 \cdot 2} UUx + \cdots)$$

$$= Ux + \frac{t}{1} UUx + \frac{t^2}{1 \cdot 2} UUUx + \cdots.$$

Also ist in der That

$$\frac{dx_1}{dt} = Ux_1,$$

wie es von (15) verlangt wird. Damit ist der Nachweis erbracht*).

Die Gleichungen (14), die bei hinreichend kleinem Wert des Parameters t convergieren, stellen also, wenn t variiert wird, die ∞^1 endlichen Transformationen der von der infinitesimalen Transformation Uf erzeugten eingliedrigen Gruppe dar. Setzen wir darin

*) Eine ausführliche Herleitung der Formeln (14) findet man in den „Diffgln. mit inf. Trf.“, § 3 des 3. Kap.

$$Uf \equiv \sum_1^r {}^i\, e_i U_i f$$

ein, so folgt, da allgemein, wenn Uf, Vf, Wf solche Differentiationsprocesse sind, wie die Symbole der infinitesimalen Transformationen, auch

$$U(Vf + Wf) = UVf + UWf$$

ist:

$$UUx = \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k x$$

u. s. w., sodass kommt:

$$(16)\quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{t}{1} \sum_1^r {}^i\, e_i U_i x + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k x + \cdots, \\ y_1 = y + \frac{t}{1} \sum_1^r {}^i\, e_i U_i y + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k y + \cdots. \end{cases}$$

Lassen wir nun ausser t auch $e_1 \, .. \, e_r$ variieren, so gelangen wir zu allen endlichen Transformationen aller eingliedrigen Gruppen Uf, die aus $U_1 f \, .. \, U_r f$ linear ableitbar sind. Es kommen in ihnen $r + 1$ willkürliche Constanten $e_1 \, .. \, e_r$ und t vor. Sie treten aber nur in den r Verbindungen $e_1 t$, $e_2 t \, .. \, e_r t$ auf, d. h. wir dürfen, ohne den Umfang der Schar (16) zu verringern, $t = 1$ setzen. Dass eine Constante überzählig ist, folgt auch schon daraus, dass bei $Uf \equiv \Sigma\, e_i U_i f$ nur die Verhältnisse von $e_1 \, .. \, e_r$ in Betracht kommen. Setzen wir also in (16) $t = 1$:

$$(17)\quad \begin{cases} x_1 = x + \sum_1^r {}^i\, e_i U_i x + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k x + \cdots, \\ y_1 = y + \sum_1^r {}^i\, e_i U_i y + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k y + \cdots. \end{cases}$$

Alle endl. Transform., erz. v. ∞^{r-1} infinitesim. Transformationen.

Jetzt geben die Gleichungen (17) alle endlichen Transformationen aller ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen Uf, wenn man $e_1 \, .. \, e_r$ beliebig variieren lässt. Wir behaupten nun, dass in dieser Schar (17) $e_1 \, .. \, e_r$ sämtlich wesentliche Parameter sind, d. h. dass (17) wirklich ∞^r von einander verschiedene Transformationen darstellt.

Specieller Fall.

Dies zu beweisen, betrachten wir zur Vorbereitung den einfachen Fall, dass die Zahl $r = 2$ ist — dass also von nur zwei von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1 f$, $U_2 f$ die Rede ist —, und dass überdies $U_1 f$ und $U_2 f$ einem beliebigen Punkte (x, y) ver-

schiedene Fortschreitungsrichtungen zuordnen, d. h. dass auch keine Relation von der Form $U_2 f = \varphi(x, y)\, U_1 f$ besteht, dass also stets

$$\varphi(x, y)\, U_1 f + \psi(x, y)\, U_2 f \not\equiv 0$$

ist. Dies letztere kommt, wenn

$$U_1 f \equiv \xi_1(x, y) p + \eta_1(x, y) q,$$
$$U_2 f \equiv \xi_2(x, y) p + \eta_2(x, y) q$$

angenommen wird, darauf hinaus, dass die Determinante

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \not\equiv 0$$

ist. Alsdann bilden wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial e_1} & \frac{\partial x_1}{\partial e_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial e_1} & \frac{\partial y_1}{\partial e_2} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe ist sicher nicht identisch Null, denn wenn man nach ihrer Bildung $e_1 = e_2 = 0$ setzt, so reduciert sie sich wegen (17) gerade auf $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$. Wir können daher aus den Gleichungen (17), in denen sich jetzt wohlbemerkt jede Summe nur auf zwei Zahlen erstreckt, e_1 und e_2 berechnen als Functionen von x, y und x_1, y_1. Ist aber dies möglich, so sind offenbar e_1, e_2 beide wesentliche Parameter in (17). Die Schar (17) definiert deshalb wirklich ∞^2 verschiedene Transformationen. Für den vorliegenden Fall ist also die Behauptung bewiesen.

Allgemeiner Fall.

Wir kehren nun zu dem allgemeinen Fall zurück, dass r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$ vorgelegt sind. Wir geben den Coordinaten x, y in (17) auf r verschiedene Weisen bestimmte, aber allgemein gewählte Werte $x^{(1)}$, $y^{(1)}$; $x^{(2)}$, $y^{(2)}$; $\ldots x^{(r)}$, $y^{(r)}$. Die zugehörigen Werte von x_1, y_1 seien $x_1^{(1)}$, $y_1^{(1)}$; $x_1^{(2)}$, $y_1^{(2)}$; $\ldots x_1^{(r)}$, $y_1^{(r)}$. Ist allgemein

$$U_i f \equiv \xi_i(x, y) p + \eta_i(x, y) q,$$

so erfährt der Punkt $(x^{(j)}, y^{(j)})$ bei $U_i f$ die Coordinatenincremente

$$\xi(x^{(j)}, y^{(j)}) \delta t, \quad \eta(x^{(j)}, y^{(j)}) \delta t.$$

Die Transformation $U_i f$ hat also, ausgeübt auf das Variabelnpaar $x^{(j)}$, $y^{(j)}$, das Symbol

$$U_i^j f \equiv \xi(x^{(j)}, y^{(j)}) \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}} + \eta(x^{(j)}, y^{(j)}) \frac{\partial f}{\partial y^{(j)}}.$$

Betrachten wir alle $2r$ Wertpaare $x^{(j)}$, $y^{(j)}$ auf einmal, so wird also die Transformation $U_i f$, auf dieselben ausgeführt, das Symbol

$$V_i f \equiv U_i^1 f + U_i^2 f + \cdots + U_i^r f$$

haben, denn die rechte Seite stellt, mit δt multiplicirt, das Increment dar, das eine beliebige Function f von $x^{(1)}, y^{(1)}; \ldots x^{(r)}, y^{(r)}$ bei der infinitesimalen Transformation erfährt.

Zunächst können wir zeigen, dass keine r linearen Relationen von der Form

$$\varphi_1 U_1^j f + \varphi_2 U_2^j f + \cdots + \varphi_r U_r^j f = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

identisch bestehen können, in denen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ gewisse Functionen der $2r$ Veränderlichen $x^{(1)}, y^{(1)}; \ldots x^{(r)}, y^{(r)}$ und zwar in allen r Relationen dieselben Functionen, also unabhängig von j, wären. Beständen nämlich r solche Relationen identisch, und nähmen $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ für irgend ein beliebiges Wertsystem $x^{(1)}, y^{(1)}; \ldots x^{(r)}, y^{(r)}$ die Zahlenwerte $c_1 \ldots c_r$ an, so würde die infinitesimale Transformation

$$c_1 U_1 f + \cdots + c_r U_r f$$

die r Punkte $(x^{(1)}, y^{(1)}), \ldots (x^{(r)}, y^{(r)})$ in Ruhe lassen. Dies aber ist unmöglich, denn unter den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen

$$e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$$

giebt es höchstens ∞^{r-2}, welche einen beliebig aber bestimmt gewählten Punkt $(x^{(1)}, y^{(1)})$ invariant lassen. Ihre Coefficienten $e_1 \ldots e_r$ bestimmen sich nämlich aus den beiden Gleichungen:

$$e_1 \xi_1(x^{(1)}, y^{(1)}) + \cdots + e_r \xi_r(x^{(1)}, y^{(1)}) = 0,$$
$$e_1 \eta_1(x^{(1)}, y^{(1)}) + \cdots + e_r \eta_r(x^{(1)}, y^{(1)}) = 0,$$

die sicher nicht beide identisch Null sind für jedes Wertsystem $x^{(1)}, y^{(1)}$, weil sonst bei den Uf alle Punkte der Ebene in Ruhe blieben. Weiter schliessen wir ebenso, dass es unter den höchstens ∞^{r-2} infinitesimalen Transformationen, die den Punkt $(x^{(1)}, y^{(1)})$ nicht ändern, höchstens ∞^{r-3} giebt, die auch einen zweiten beliebig, aber bestimmt angenommenen Punkt $(x^{(2)}, y^{(2)})$ in Ruhe lassen u. s. w. Schliessen wir so weiter, so folgt endlich, dass es keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_i U_i f$ giebt, welche r beliebig, aber bestimmt gewählte Punkte in Ruhe lässt.

Hiernach steht fest, dass keine r Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ existieren, für die gleichzeitig

$$(18) \qquad \begin{cases} \varphi_1 \xi_1^{(j)} + \cdots + \varphi_r \xi_r^{(j)} \equiv 0 \\ \varphi_1 \eta_1^{(j)} + \cdots + \varphi_r \eta_r^{(j)} \equiv 0 \end{cases}$$
$$(j = 1, 2 \ldots r)$$

wäre. Hierin sollen natürlich die oberen Indices j bedeuten, dass für x, y die Werte $x^{(j)}$, $y^{(j)}$ eingesetzt zu denken sind.

Wenn nun alle r-reihigen Determinanten der Matrix

$$
(19) \qquad \begin{vmatrix}
\xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_r^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\xi_1^{(r)} & \cdots & \xi_r^{(r)} \\
\eta_1^{(1)} & \cdots & \eta_r^{(1)} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\eta_1^{(r)} & \cdots & \eta_r^{(r)}
\end{vmatrix}
$$

identisch Null wären, so könnten wir offenbar doch solche r Functionen $\varphi_1 \,..\, \varphi_r$ angeben, für welche die $2r$ Identitäten (18) beständen. Dann nämlich würden die r ersten Relationen (18) die r letzten ohne weiteres nach sich ziehen und es brauchten $\varphi_1 \,..\, \varphi_r$ nur so bestimmt zu werden, dass sie die r ersten erfüllten, was möglich wäre, da die Determinante dieser r Relationen auch identisch Null wäre.

Also schliessen wir umgekehrt, dass sicher nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix (19) identisch verschwinden.

Die r Punkte $(x^{(1)}, y^{(1)}), \,..\, (x^{(r)}, y^{(r)})$ werden bei der eingliedrigen Gruppe $Uf \equiv \Sigma e_i U_i f$ in die r Punkte $(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}), \,..\, (x_1^{(r)}, y_1^{(r)})$ übergeführt, für welche in Gemässheit von (17):

$$
(20) \qquad \begin{cases}
x_1^{(j)} = x^{(j)} + \sum\limits_1^r {}^i \, e_i U_i^j x^{(j)} + \sum\limits_1^r {}^i \sum {}^k \, e_i e_k U_i^j U_k^j x^{(j)} + \cdots \\
y_1^{(j)} = y^{(j)} + \sum\limits_1^r {}^i \, e_i U_i^j y^{(j)} + \sum\limits_1^r {}^i \sum {}^k \, e_i e_k U_i^j U_k^j y^{(j)} + \cdots
\end{cases}
$$
$$(j = 1, 2 \,..\, r)$$

ist. Lassen wir hierin $e_1 \,..\, e_r$ variieren, so erhalten wir alle endlichen Transformationen aller eingliedrigen Gruppen Uf, ausgeführt auf die r Punkte. Es ist nun unmöglich, aus diesen $2r$ Gleichungen (20) mehr als r von $e_1 \,..\, e_r$ freie abzuleiten, denn die Gleichungen sind nach $e_1 \,..\, e_r$ auflösbar, da nicht alle r-reihigen Functionaldeterminanten der Matrix

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial e_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial e_r} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial e_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial x_1^{(r)}}{\partial e_r} \\
\frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial e_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial y_1^{(1)}}{\partial e_r} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\partial y_1^{(r)}}{\partial e_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial y_1^{(r)}}{\partial e_r}
\end{vmatrix},
$$

die sich ja für $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 0$ auf die Matrix (19) reduciert, identisch verschwinden, denn sonst müssten auch alle r-reihigen Determinanten der Matrix (19) identisch Null sein. Es lassen sich somit $e_1 \ldots e_r$ aus (20) als Functionen der $x^{(j)}$, $y^{(j)}$ und $x_1^{(j)}$, $y_1^{(j)}$ berechnen.

Nehmen wir an, wir hätten den $e_1 \ldots e_r$ andere Werte $\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_r$ gegeben und verlangten, dass auch die zu diesen gehörige Transformation von der Form (20) die r Punkte $x^{(j)}$, $y^{(j)}$ in die r Punkte $x_1^{(j)}$, $y_1^{(j)}$ überführte, so würden wir für $\bar{e}_1 \ldots \bar{e}_r$ dieselben Functionen der $x^{(j)}$, $y^{(j)}$ und $x_1^{(j)}$, $y_1^{(j)}$ erhalten, d. h. es müsste dann doch $\bar{e}_1 = e_1, \ldots \bar{e}_r = e_r$ sein. Also stimmen zwei der Transformationen (20) nur dann überein, wenn in ihnen die e übereinstimmende Werte haben. Es sind aber die Transformationen (20) nichts anderes als die Transformationen (17), ausgeführt auf r Punkte der Ebene. Es folgt daher umsomehr: Zwei Transformationen (17) sind dann und nur dann in *allen* Punkten der Ebene äquivalent, wenn in ihnen $e_1 \ldots e_r$ übereinstimmende Werte haben. Mit anderen Worten: (17) stellt wirklich ∞^r verschiedene Transformationen dar.

Wir fügen noch hinzu, dass zur Transformation (14) diejenige invers ist, die sich ergiebt, wenn t durch $-t$ ersetzt wird. Demnach enthält auch die Schar (16) zu jeder ihrer Transformationen die inverse, ebenso die Schar (17). Bei dieser erhalten wir die inverse, wenn wir $e_1 \ldots e_r$ mit $-e_1 \ldots -e_r$ vertauschen.

Gesamtergebnis.

Theorem 20: *Sind die r infinitesimalen Transformationen*

$$U_i f \equiv \xi_i(x, y)p + \eta_i(x, y)q \quad (i = 1, 2 \ldots r)$$

von einander unabhängig, und sind $e_1 \ldots e_r$ willkürliche Parameter, so bildet der Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen

$$e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$$

eine Schar von Transformationen:

$$x_1 = x + \sum_1^r {}^i e_i U_i x + \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k x + \cdots,$$

$$y_1 = y + \sum_1^r {}^i e_i U_i y + \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k y + \cdots,$$

in welcher die r Parameter $e_1 \ldots e_r$ sämtlich wesentlich sind, also eine Schar von ∞^r verschiedenen Transformationen. Diese Schar enthält zu jeder ihrer Transformationen auch die inverse.

Künftig werden wir diese Schar öfters kurz bezeichnen als die „∞^r endlichen Transformationen, erzeugt von $U_1 f \ldots U_r f$“.

1. Beispiel: Liegen die beiden infinitesimalen Transformationen Beispiele.

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv xq$$

vor, die von einander unabhängig sind, so lauten die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe $e_1 p + e_2 xq$, wie man durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{dx_1}{e_1} = \frac{dy_1}{e_2 x_1} = dt$$

sofort findet:

$$x_1 = x + e_1 t, \quad y_1 = y + e_2 xt + \frac{e_1 e_2}{2} t^2.$$

Lässt man e_1, e_2 variieren, so sind dies offenbar ∞^2 verschiedene endliche Transformationen, die übrigens keine Gruppe bilden.

2. Beispiel: Sei

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv xq, \quad U_3 f \equiv yp,$$

so ergeben sich die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe

$$Uf \equiv e_1 p + e_2 xq + e_3 yp$$

z. B. auch durch Reihenentwickelung: Es ist

$$\begin{array}{ll} Ux \equiv e_1 + e_3 y, & Uy \equiv e_2 x, \\ UUx \equiv e_2 e_3 x, & UUy \equiv e_2(e_1 + e_3 y), \\ UUUx \equiv e_2 e_3 (e_1 + e_3 y), & UUUy \equiv e_2^2 e_3 x, \\ UUUUx \equiv e_2^2 e_3^2 x, & UUUUy \equiv e_2^2 e_3 (e_1 + e_3 y), \\ \dots\dots, & \dots\dots, \end{array}$$

sodass kommt:

$$x_1 = x + e_1 + e_3 y + \frac{1}{1 \cdot 2} e_2 e_3 x + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} e_2 e_3 (e_1 + e_3 y) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} e_2^2 e_3^2 x + \cdots$$

oder:

$$x_1 = \frac{e^{\sqrt{e_2 e_3}} + e^{-\sqrt{e_2 e_3}}}{2} x + \frac{e^{\sqrt{e_2 e_3}} - e^{-\sqrt{e_2 e_3}}}{2} \frac{e_1 + e_3 y}{\sqrt{e_2 e_3}},$$

analog:

$$y_1 = \frac{e^{\sqrt{e_2 e_3}} + e^{-\sqrt{e_2 e_3}}}{2} \cdot \frac{e_1 + e_3 y}{e_3} + \frac{e^{\sqrt{e_2 e_3}} - e^{-\sqrt{e_2 e_3}}}{2} \frac{e_2 x}{\sqrt{e_2 e_3}} - \frac{e_1}{e_3}.$$

In diesen Gleichungen sind, wie man leicht sieht, e_1, e_2, e_3 sämtlich wesentliche Parameter, wie es sein muss. Diese Gleichungen stellen keine Gruppe dar.

Wir wenden nunmehr endlich unser Theorem 20 auf den besonderen Fall an, dass die r vorgelegten von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1 f \,.\,.\, U_r f$, über die wir bisher keine weiteren Annahmen machten, einer r-gliedrigen *Gruppe* angehören. Anwendung auf Gruppen.

In diesem Falle ergiebt sich, wenn wir noch das Theorem 19 des vorigen Paragraphen berücksichtigen, Folgendes:

Theorem 21: *Sind $U_1f\,..\,U_rf$ r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe in x, y, so bildet der Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen*

$$e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$$

eine Schar von gerade ∞^r verschiedenen Transformationen:

$$x_1 = x + \sum_1^r {}^i e_i U_i x + \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k x + \cdots,$$

$$y_1 = y + \sum_1^r {}^i e_i U_i y + \sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i e_k U_i U_k y + \cdots,$$

welche der r-gliedrigen Gruppe angehören und also (jedenfalls in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation) alle Transformationen der Gruppe und keine weiteren umfassen.

Die hierin ausgesprochene Beschränkung auf Transformationen, die nicht über ein gewisses Mass von der identischen Transformation abweichen, findet ihren Grund darin, dass die obigen Reihenentwickelungen nur innerhalb gewisser Grenzen convergieren werden. Ihre weitere Fortsetzung über dieses zunächst erlaubte Gebiet hinaus erfordert functionentheoretische Überlegungen, auf die wir nicht eingehen.

§ 3. Zur Berechnung der endlichen Gleichungen einer Gruppe.

Das soeben abgeleitete Theorem giebt uns ein Mittel an die Hand, um aus r vorgelegten von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$U_i f \equiv \xi_i(x, y) p + \eta_i(x, y) q \quad (i = 1, 2 \,..\, r)$$

einer r-gliedrigen Gruppe die endlichen Gleichungen der Gruppe abzuleiten.

Erste Methode.

Diese Berechnung kommt ja nach unserem Theorem darauf hinaus, die endlichen Gleichungen der allgemeinen eingliedrigen Gruppe

$$Uf \equiv \sum_1^r {}^i e_i U_i f \equiv \left(\sum_1^r {}^i e_i \xi_i\right) p + \left(\sum_1^r {}^i e_i \eta_i\right) q$$

zu finden. Letzteres verlangt die Integration des simultanen Systems

$$(21) \qquad \frac{dx_1}{\sum_1^r {}_i\, e_i \xi_i(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\sum_1^r {}_i\, e_i \eta_i(x_1, y_1)} = dt$$

mit der Anfangsbedingung $x_1 = x, y_1 = y$ für $t = 0$. Durch Integration desselben werden x_1, y_1 als Functionen von x, y und t bestimmt. Doch enthalten diese Functionen $e_1 \dots e_r$ und t nur in den r Verbindungen $e_1 t, e_2 t \dots e_r t$, und es kann daher nachträglich $t = 1$ gesetzt werden, was ja darauf hinauskommt, dass für $e_1 t, e_2 t \dots e_r t$ neue Parameter eingeführt werden. Durch Reihenentwickelung ist die Integration des simultanen Systems (21) durch die Formeln des Theorems 21 geleistet.

Wir bemerken aber, dass die Integration des simultanen Systems (21) durch endliche geschlossene Ausdrücke schon in einfachen Fällen deshalb erhebliche Schwierigkeiten machen wird, weil das System r willkürliche Constanten $e_1 \dots e_r$ enthält, die nicht specialisiert werden dürfen. Es empfiehlt sich deshalb, den folgenden Weg zur Gewinnung der endlichen Gleichungen der Gruppe zu betreten:

Zweite Methode.

Zunächst suchen wir die endlichen Gleichungen der von jeder einzelnen infinitesimalen Transformation $U_i f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe durch Integration der r simultanen Systeme:

$$(22) \qquad \frac{dx_1}{\xi_i(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta_i(x_1, y_1)} = dt \quad (i = 1, 2 \dots r)$$

mit den Anfangswerten x, y von x_1, y_1 für $t = 0$:

$$x_1 = \varphi_i(x, y, t), \quad y_1 = \psi_i(x, y, t) \quad (i = 1, 2 \dots r).$$

Wir wollen alsdann nach einer allgemeinen Transformation T_1 der ersten eingliedrigen Gruppe $U_1 f$ eine allgemeine Transformation T_2 der zweiten $U_2 f$, auf diese eine Transformation T_3 der dritten $U_3 f$ u. s. w. ausführen. T_1 wird x, y in x_1, y_1, T_2 diese in $x_3, y_3, \dots$ verwandeln, sodass zu setzen ist:

$$(23) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x, y, t_1), & y_1 = \psi_1(x, y, t_1); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, y_1, t_2), & y_2 = \psi_2(x_1, y_1, t_2); \\ \dots\dots & \dots\dots \\ x_r = \varphi_r(x_{r-1}, y_{r-1}, t_r), & y_r = \psi_r(x_{r-1}, y_{r-1}, t_r). \end{cases}$$

$t_1, t_2 \dots t_r$ sind hierin willkürliche Parameter. Durch Elimination von $x_1, y_1 \dots x_{r-1}, y_{r-1}$ ergeben sich gewisse Gleichungen:

$$x_r = \Phi(x, y, t_1 \dots t_r), \quad y_r = \Psi(x, y, t_1 \dots t_r)$$

oder, wenn wir die transformierten Veränderlichen mit x', y' bezeichnen, diese:

(24) $$x' = \Phi(x, y, t_1 \,..\, t_r), \quad y' = \Psi(x, y, t_1 \,..\, t_r).$$

Dieselben stellen, wie auch $t_1 \,..\, t_r$ gewählt sein mögen, eine Transformation dar, welche r aufeinanderfolgenden Transformationen T_1, $T_2 \,..\, T_r$ der r einzelnen eingliedrigen Gruppen äquivalent ist, also eine Transformation der r-gliedrigen Gruppe. Die in ihnen enthaltenen Parameter $t_1 \,..\, t_r$ sind nun aber auch sämtlich wesentlich, denn die $2r$ Gleichungen (23) beginnen ja bekanntlich, nach $t_1 \,..\, t_r$ entwickelt, so:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + t_1 \xi_1 + \cdots, & y_1 &= y + t_1 \eta_1 + \cdots; \\ x_2 &= x_1 + t_2 \xi_2^{(1)} + \cdots, & y_2 &= y_1 + t_2 \eta_2^{(1)} + \cdots; \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ x_r &= x_{r-1} + t_r \xi_r^{(r-1)} + \cdots, & y_r &= y_{r-1} + t_r y_r^{(r-1)} + \cdots. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet $\xi_k^{(i)}$, $\eta_k^{(i)}$, dass in ξ_k, η_k für x, y die Variabeln x_i, y_i gesetzt sind. Eliminieren wir nun $x_1, y_1 \,..\, x_{r-1}, y_{r-1}$, so kommt genau bis auf Glieder erster Ordnung:

$$x_r = x + t_1 \xi_1 + \cdots + t_r \xi_r + \cdots, \quad y_r = y + t_1 \eta_1 + \cdots + t_r \eta_r + \cdots,$$

wo nun $\xi_1 \,..\, \xi_r$, $\eta_1 \,..\, \eta_r$ sämtlich x, y enthalten. Daher lauten die Gleichungen (24) nach $t_1 \,..\, t_r$ entwickelt:

(24′) $$x' = x + \sum_1^r{}^i\, t_i U_i x + \cdots, \quad y' = y + \sum_1^r{}^i\, t_i U_i y + \cdots.$$

Sie stimmen also in den Gliedern erster Ordnung mit den Gleichungen (17) des vorigen Paragraphen überein, nur steht hier $t_1 \,..\, t_r$ statt $e_1 \,..\, e_r$. Der Nachweis, dass in (17) $e_1 \,..\, e_r$ wesentlich sind, wurde damals geführt mit Hülfe der Form der Glieder erster Ordnung allein. Wir können daher ohne weiteres auch sagen, dass die Gleichungen (24) oder (24′) alle r Parameter $t_1 \,..\, t_r$ als wesentlich enthalten.

Also stellen die Gleichungen (24) ∞^r verschiedene endliche Transformationen der r-gliedrigen Gruppe, mithin alle Transformationen derselben dar.

Vorzüge und Nachteile beider Methoden.

Diese Methode*) zur Bestimmung der endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe hat vor der ersten Methode den Vorzug, dass die Integration hier in r von einander unabhängigen Schritten geleistet

*) Die oben gegebene zweite Methode teilte Lie dem Herausgeber im Anfange des Jahres 1891 mit. Im Laufe des Sommersemesters desselben Jahres brachte er sie in seinen Vorlesungen. Im Herbst endlich und unabhängig davon veröffentlichte Maurer in den Math. Annalen Bd. 39 eine Abhandlung, in der er ebenfalls diese Methode entwickelte.

wird durch die Integration der r Systeme (22), deren keines willkürliche Constanten enthält.

Andererseits leistet sie aber doch nicht dasselbe wie die frühere Methode, denn während die endliche Transformation (17) (in § 2) gerade von der infinitesimalen Transformation $e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$ erzeugt wird, welche dieselben Zahlen $e_1 \ldots e_r$ enthält, ist es durchaus nicht allgemein richtig, dass die endliche Transformation (24) oder (24') gerade von der infinitesimalen Transformation $t_1 U_1 f + \cdots + t_r U_r f$ erzeugt wird, wie man zu vermuten geneigt sein könnte. Die Entwickelungen (17) und (24'), die, bis auf andere Bezeichnung der Parameter, in den Gliedern erster Ordnung übereinstimmen, sind vielmehr in den Gliedern zweiter Ordnung schon nicht mehr dieselben.

Die zweite Methode giebt also zwar die endlichen Gleichungen der r-gliedrigen Gruppe bequemer, man kann aber nicht so leicht einsehen, welche infinitesimale Transformation gerade eine der gefundenen endlichen Transformationen erzeugt. Es ist jedoch zu bemerken, dass die zweite Methode bei gewissen Fragen der Gruppentheorie dennoch den Vorzug verdient.

Die bisherigen Betrachtungen lehren, dass eine r-gliedrige Gruppe in x, y mit paarweis inversen Transformationen vollständig definiert ist durch die Angabe von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$ der Gruppe. Daher werden wir eine solche Gruppe häufig kurz als „Gruppe, erzeugt von $U_1 f \ldots U_r f$" oder kurz als „Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$" bezeichnen. Dass jedoch nicht beliebige r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen stets eine Gruppe erzeugen, kann man aus den obigen Beispielen zu Theorem 20 entnehmen. Im übernächsten Kapitel werden wir das Criterium dafür aufstellen, dass $U_1 f \ldots U_r f$ eine Gruppe erzeugen.

Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$.

Wir geben zwei Beispiele.

Beispiele.

1. Beispiel. Man soll aus den acht von einander unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen

$$p, \quad q, \quad xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq, \quad x^2 p + xyq, \quad xyp + y^2 q$$

die endlichen Gleichungen der allgemeinen projectiven Gruppe ableiten. (Vgl. § 2 des 2. Kap.)

Wir wenden die zweite Methode an, indem wir die von den obigen acht infinitesimalen Transformationen erzeugten eingliedrigen Gruppen bestimmen und die Variabeln und Parameter wie in (23) bezeichnen:

$$\begin{array}{c|ll}
p & x_1 = x + t_1, & y_1 = y, \\
q & x_2 = x_1, & y_2 = y_1 + t_2, \\
xp & x_3 = x_2 e^{t_3}, & y_3 = y_2, \\
yp & x_4 = x_3 + y_3 t_4, & y_4 = y_3, \\
xq & x_5 = x_4, & y_5 = y_4 + x_4 t_5, \\
yq & x_6 = x_5, & y_6 = y_5 e^{t_6}, \\
x^2p + xyq & x_7 = \dfrac{x_6}{1 - x_6 t_7}, & y_7 = \dfrac{y_6}{1 - x_6 t_7}, \\
xyp + y^2q & x_8 = \dfrac{x_7}{1 - y_7 t_8}, & y_8 = \dfrac{y_7}{1 - y_7 t_8}.
\end{array}$$

Eliminieren wir hieraus $x_1, y_1 \dots x_7, y_7$, setzen wir noch x', y' statt x_8, y_8 und bezeichnen wir e^{t_3} und e^{t_6} mit t_3 resp. t_6, so ergeben sich die endlichen Gleichungen der allgemeinen projectiven Gruppe:

$$x' = \frac{t_3 x + t_4 y + t_1 t_3 + t_2 t_4}{\left\{\begin{array}{l} - t_3(t_7 + t_5 t_6 t_8)\, x - (t_4 t_7 + t_6 t_8 + t_4 t_5 t_6 t_8) y - \\ - t_1 t_3 t_7 - t_2 t_4 t_7 - t_2 t_6 t_8 - t_1 t_3 t_5 t_6 t_8 - t_2 t_4 t_5 t_6 t_8 \end{array}\right\}}$$

$$y' = \frac{(t_3 t_5 x + (1 + t_4 t_5) y + t_2 + t_1 t_3 t_5 + t_2 t_4 t_5) t_6}{\left\{\begin{array}{l} - t_3(t_7 + t_5 t_6 t_8)\, x - (t_4 t_7 + t_6 t_8 + t_4 t_5 t_6 t_8) y - \\ - t_1 t_3 t_7 - t_2 t_4 t_7 - t_2 t_6 t_8 - t_1 t_3 t_5 t_6 t_8 - t_2 t_4 t_5 t_6 t_8 \end{array}\right\}}.$$

In der That stellen diese Gleichungen eine allgemeine projective Transformation der Ebene dar, denn x', y' sind linear gebrochene Functionen von x, y mit demselben Nenner. Dass $t_1 \dots t_8$ sämtlich wesentlich sind, folgt aus unseren theoretischen Entwickelungen.

2. Beispiel. Es soll bewiesen werden, dass die ∞^2 infinitesimalen Transformationen

$$Uf \equiv e_1 p + e_2 q + e_3 y p$$

eine dreigliedrige Gruppe erzeugen.

Wir integrieren das simultane System:

$$\frac{dx_1}{e_1 + e_3 y_1} = \frac{dy_1}{e_2} = dt.$$

Es kommt zunächst:

$$y_1 - y = e_2 t.$$

Setzen wir $y_1 = y + e_2 t$ ein, so kommt noch:

$$\frac{dx_1}{e_1 + e_3(y + e_2 t)} = dt,$$

d. h.:

$$x_1 - x = (e_1 + e_3 y) t + \frac{e_2 e_3}{2} t^2,$$

sodass die endlichen Gleichungen lauten:

$$x_1 = x + (e_1 + e_3 y) t + \frac{e_2 e_3}{2} t^2, \quad y_1 = y + e_2 t.$$

Man kann leicht verificieren, dass sie eine dreigliedrige Gruppe darstellen. Natürlich darf hierin $t = 1$ gesetzt werden, da t überzählig ist. Lassen wir t variieren, während wir c_1, e_2, e_3 bestimmte Werte geben, so erhalten wir die von $e_1 p + e_2 q + e_3 yp$ erzeugte eingliedrige Gruppe. Die Anwendung der zweiten Methode macht keine Schwierigkeit.

Schliesslich heben wir noch die kleine, aber wichtige Bemerkung hervor, die keines Beweises bedarf:

Ausdehnung der Sätze auf Gruppen der Geraden.

Satz 2: *Die Sätze der beiden letzten Kapitel lassen sich sofort auf die Gruppen der Geraden ausdehnen, da die Gleichung einer solchen Gruppe:*

$$x_1 = \varphi(x, a_1 \dots a_r)$$

durch Hinzufügung der Gleichung

$$y_1 = y$$

in eine Gruppe der Ebene übergeht.

Wir werden daher künftig ohne weiteres die abgeleiteten Sätze auch für Probleme benutzen, welche Gruppen der Geraden betreffen.

Kapitel 8.

Transitivität, Invarianten, Primitivität.

Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Kapiteln allgemeine Eigenschaften der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen abgeleitet haben, gehen wir nun dazu über, die Gruppen in gewisse grosse Klassen zu bringen, indem wir die Begriffe der *Transitivität* und *Primitivität* einführen, zu deren ersterem der Begriff der *Invarianten* von Gruppen in enger Beziehung steht.

§ 1. Transitive und intransitive Gruppen.

Transitive Gruppe.

Eine r-gliedrige Gruppe:

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \dots a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \dots a_r) \tag{1}$$

nennen wir *transitiv*, wenn sich stets die Parameter $a_1 \dots a_r$ so annehmen lassen, dass die Transformation (1) einen bestimmt gewählten Punkt allgemeiner Lage (x, y) in einen beliebigen anderen bestimmt gewählten Punkt (x_1, y_1) allgemeiner Lage überführt, oder genauer ge-

sagt — um functionentheoretische Schwierigkeiten zu vermeiden —, dass sie ihn in einen beliebigen anderen bestimmt gewählten Punkt in der Umgebung des ersten Punktes überführt. Ist dagegen der Punkt (x_1, y_1) an eine natürlich durch den Punkt (x, y) selbst gehende Curve gebunden, so bezeichnen wir die Gruppe als *intransitiv*.

So z. B. ist die Gruppe

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b$$

transitiv, denn wählen wir x, y irgendwie und ebenso x_1, y_1 irgendwie, so lassen sich a, b immer so berechnen, dass diese Gleichungen erfüllt werden. Dies ist auch geometrisch einleuchtend, denn jene Gruppe besteht aus allen Translationen, welche eine beliebig gewählte Stelle in eine andere beliebig gewählte Stelle überführen.

Die Gruppe

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + ax + b$$

ist dagegen intransitiv, denn hier kann ein Punkt (x, y) stets nur in Punkte (x_1, y_1) mit derselben Abscisse, also nur in Punkte der durch ihn gehenden Parallelen zur y-Axe übergeführt werden. Der Punkt (x_1, y_1) beschreibt also, wenn man a, b in allen möglichen Weisen wählt, kein Flächenstück, sondern nur eine Curve.

Analytische Formulierung.

Soll die Gruppe (1) transitiv sein, so müssen sich, wenn x, y beliebig und x_1, y_1 innerhalb der Umgebung der Stelle (x, y) ebenfalls beliebig gewählt werden, die Gleichungen (1) dadurch erfüllen lassen, dass man den Parametern $a_1 \ldots a_r$ bestimmte Werte erteilt. Lassen sich die Gleichungen (1) nach zweien der Parameter, etwa a_1 und a_2, auflösen, so ist dies offenbar möglich, denn man braucht nur $a_3 \ldots a_r$ irgendwie anzunehmen, um dann durch diese Auflösung auch a_1, a_2 zu bestimmen. Wenn dagegen die Gleichungen (1) nicht nach zweien der Parameter auflösbar sind, so lässt sich aus ihnen eine Gleichung zwischen x, y und x_1, y_1 allein ableiten:

$$\chi(x, y, x_1, y_1) = 0.$$

Diese aber sagt aus, dass der transformierte Punkt (x_1, y_1), sobald x, y bestimmt angenommen sind, an eine gewisse Curve gebunden, also die Gruppe intransitiv ist.

Satz 1: *Eine r-gliedrige Gruppe in zwei Veränderlichen*

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \ldots a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \ldots a_r)$$

ist transitiv, sobald sich ihre Gleichungen nach zweien der Parameter $a_1 \ldots a_r$ auflösen lassen. Anderenfalls ist sie intransitiv.

An den beiden obigen Beispielen kann man dies sofort verificieren.

Zerlegung der Ebene in Curven bei intrans. Gruppen.

Die intransitiven Gruppen unterscheiden sich also dadurch wesentlich von den transitiven, dass ihre Transformationen einem beliebigen Punkte p nur solche Lagen erteilen, die keine Fläche, sondern bloss eine Curve c erfüllen. Eine intransitive Gruppe ordnet demnach jedem Punkte p eine Curve c zu, die durch ihn hindurchgeht, da die Gruppe die identische und infinitesimale Transformationen enthält. Es ist dann leicht, nachzuweisen, dass auch jedem anderen Punkte p_1 auf c eben diese Curve durch die Gruppe zugeordnet wird. Denn es existiert eine Transformation T_a der Gruppe, die den Punkt p nach der Stelle p_1 führt:

$$(p)T_a = (p_1).$$

Führt nun eine Transformation T_b der Gruppe den Punkt p_1 in den Punkt p_2 über:

$$(p_1)T_b = (p_2),$$

so kommt

$$(p)T_aT_b = (p_2).$$

Aber T_aT_b ist einer Transformation $T_{(a,b)}$ der Gruppe äquivalent, also:

$$(p)T_{(a,b)} = (p_2),$$

d. h. p_2 liegt auf der p zugeordneten Curve c, oder: dem Punkt p_1 ist ebenfalls die Curve c zugeordnet.

Eine eingliedrige Gruppe ist natürlich stets intransitiv, denn bei ihren ∞^1 Transformationen beschreibt jeder Punkt p eben nur seine *Bahncurve.*

Bei einer jeden intransitiven Gruppe wird allgemein demnach die Ebene in unendlich viele Curven zerlegt und zwar, da allen ∞^1 Punkten einer dieser Curven eben diese Curve zugeordnet ist, gerade in ∞^1 Curven. Jede dieser ∞^1 Curven c bleibt nach dem Vorstehenden invariant gegenüber den Transformationen der Gruppe, indem jede Transformation T_b der Gruppe einen Punkt p_1 einer der Curven c wieder in einen Punkt p_2 derselben Curve verwandelt. Diese ∞^1 einzeln invarianten Curven werden dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$\omega(x, y) = \text{Const.},$$

und zwar muss

$$\omega(x, y) = c$$

stets

$$\omega(x_1, y_1) = c$$

nach sich ziehen, sobald (x_1, y_1) der Punkt ist, in den (x, y) durch irgend eine Transformation der Gruppe (1) übergeht. Vermöge der Gleichungen (1) muss daher

$$\omega(x_1, y_1) = \omega(x, y)$$

sein und zwar identisch für alle Werte von $x, y, a_1 \ldots a_r$. Die Function $\omega(x, y)$ ändert also ihren Wert nicht bei irgend einer Transformation der Gruppe, und wir nennen sie deshalb eine *Invariante* der Gruppe.

Invariante einer intransit. Gruppe.

Wenn umgekehrt die Function $\Omega(x, y)$ bei allen Transformationen einer vorgelegten Gruppe (1) invariant bleibt, also vermöge (1) identisch

$$\Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y)$$

ist, so liegt der transformierte Punkt (x_1, y_1) auf der Curve

$$\Omega(x, y) = \text{Const.},$$

sobald der ursprüngliche Punkt (x, y) auf ihr gelegen ist, d. h. er ist an eine Curve gebunden, die Gruppe ist intransitiv.

Satz 2: *Transitive Gruppen der Ebene haben keine Invarianten; intransitive dagegen haben eine Invariante, und jede ihrer Invarianten lässt sich als Function irgend einer ihrer Invarianten darstellen.*

Das Letztere ist evident, denn die Gruppe kann dem Punkte (x, y) nur eine Curve c zuordnen, mit anderen Worten: Ist $\Omega(x, y)$ eine Invariante der Gruppe, so muss die Curvenschar

$$\Omega(x, y) = \text{Const.}$$

mit der obigen Schar

$$\omega(x, y) = \text{Const.}$$

übereinstimmen, d. h. es muss Ω eine Function von ω allein sein:

$$\Omega = W(\omega).$$

Wir werden daher auch sagen, dass eine intransitive Gruppe im Wesentlichen nur eine Invariante besitzt.

Beispiele.

1. Beispiel: Die Gruppe:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + ax + b$$

besitzt offenbar die Invariante x. Sie ist also intransitiv und zerlegt die Ebene in ∞^1 einzeln invariante Geraden $x = \text{Const.}$

2. Beispiel: Die dreigliedrige Gruppe:

$$x_1 = (1 + a_1)x + (a_2 - 1)y + a_3, \quad y_1 = a_1 x + a_2 y + a_3$$

ist intransitiv, denn ihre Gleichungen lassen sich nicht nach zweien der Parameter a_1, a_2, a_3 auflösen. In der That, sie lassen sich ja so schreiben:

$$x_1 = x - y + y_1, \quad y_1 = a_1 x + a_2 y + a_3,$$

und hier tritt es in Evidenz. Es existiert eine Relation zwischen x, y und x_1, y_1 allein:

$$x_1 - y_1 = x - y.$$

Die Gruppe zerlegt also die Ebene in ∞^1 einzeln invariante Geraden $x - y = \text{Const.}$ Jede Invariante der Gruppe ist eine Function von $x - y$ allein.

3. *Beispiel:* Die zweigliedrige Gruppe:

$$x_1 = x + a + (x^2 - 2y)b,$$

$$y_1 = y + ax + \frac{a^2}{2} + (x + a)(x^2 - 2y)b + (x^2 - 2y)^2 \frac{b^2}{2}$$

ist intransitiv, denn ihre Gleichungen sind nicht nach a, b auflösbar. Dies kann man auf verschiedenen Wegen einsehen. Entweder bildet man die Functionaldeterminante der rechten Seiten nach a und b:

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 - 2y \\ x + a + (x^2 - 2y)b & (x + a)(x^2 - 2y) + (x^2 - 2y)^2 b \end{vmatrix}.$$

Dieselbe verschwindet identisch. Oder man berechnet aus der ersten Gleichung

$$a = x_1 - x\,(x^2 - 2y)b$$

und setzt diesen Wert in die zweite ein. Dann kommt nach einiger Rechnung

$$x_1^2 - 2y_1 = x^2 - 2y,$$

d. h. $x^2 - 2y$ ist eine Invariante. Die Gruppe zerlegt die Ebene in die ∞^1 einzeln invarianten Kegelschnitte $x^2 - 2y = \text{Const.}$

§ 2. Criterium der Transitivität.

Auch aus den *infinitesimalen* Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe kann man leicht ersehen, ob die betreffende Gruppe transitiv oder intransitiv ist. Denn sind etwa $U_1 f \,.\,.\, U_r f$ r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe, so besteht die Gruppe nach Theorem 21, § 2 des 7. Kap., aus den ∞^r endlichen Transformationen der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen

$$\sum_1^r {}_i\, e_i U_i f.$$

Jede dieser eingliedrigen Gruppen erteilt einem beliebigen Punkte (x, y) ∞^1 Lagen, indem sie ihn auf der durch ihn gehenden Bahncurve dieser eingliedrigen Gruppe hinführt. Die r-gliedrige Gruppe ist alsdann offenbar intransitiv, wenn alle jene ∞^{r-1} durch den Punkt

(x, y) gehenden Bahncurven der eingliedrigen Gruppen $\Sigma e Uf$ zusammenfallen, d. h. wenn sich alle Summenausdrücke $\Sigma e Uf$ nur um einen Factor von einander unterscheiden, wenn also jedes

$$U_i f \equiv \varrho_i(x, y) U_1 f \quad (i = 2, 3 \ldots r)$$

ist.

Bestehen keine solche Relationen, so giebt es infinitesimale Transformationen $U_i f$ und $U_k f$ der Gruppe mit verschiedenen durch den Punkt (x, y) gehenden Bahncurven c_i und c_k. Alsdann bilden die Bahncurven der ∞^1 eingliedrigen Gruppen $e_i U_i f + e_k U_k f$ in diesem Punkte (x, y) ein Büschel von Curven. Der Punkt (x, y) wird somit von den endlichen Transformationen der ∞^1 eingliedrigen Gruppen $e_i U_i f + e_k U_k f$ in alle Punkte eines Flächenstückes, nicht nur in alle Punkte einer Curve, übergeführt, d. h. die r-gliedrige Gruppe ist transitiv.

Erste Form des Criteriums.

Satz 3: *Eine r-gliedrige Gruppe der Ebene, welche von den r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$ erzeugt wird, ist dann und nur dann intransitiv, wenn sich alle $U_i f$ nur um einen Factor von einander unterscheiden:*

$$U_i f \equiv \varrho_i(x, y) U_1 f \quad (i = 2, 3 \ldots r).$$

Betrachtet man nur die Fortschreitungen, welche der Punkt (x, y) bei den infinitesimalen Transformationen $\Sigma e Uf$ der r-gliedrigen Gruppe erfährt, und bedenkt man, dass $U_i f$ und $U_k f$ nur dann jedem Punkte (x, y) gleiche Fortschreitungsrichtungen zuordnen, wenn sie sich nur um einen Factor unterscheiden, so findet man unmittelbar:

Satz 4: *Eine r-gliedrige Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$ der Ebene ist dann und nur dann intransitiv, wenn ihre infinitesimalen Transformationen einem Punkte allgemeiner Lage sämtlich dieselbe Fortschreitungsrichtung zuordnen.*

Zweite Ableitung desselben.

Wenn die r-gliedrige Gruppe intransitiv ist, so besitzt sie, wie wir wissen, eine Invariante $\omega(x, y)$, und $\omega(x, y) = \text{Const.}$ stellt dann den Ort aller Punkte dar, in welche ein bestimmter Punkt (x, y) bei allen Transformationen der Gruppe verwandelt wird. Diese Curve ist also auch Bahncurve jeder eingliedrigen Gruppe $\Sigma e Uf$, welche ja der r-gliedrigen Gruppe angehört. Mithin ist $\omega(x, y)$ auch Invariante jeder eingliedrigen Gruppe $\Sigma e Uf$, d. h. es ist

$$\sum_1^r e_i U_i \omega(x, y) \equiv 0$$

für alle Werte der Constanten $c_1 \ldots c_r$, also auch einzeln

$$U_i \omega(x, y) \equiv 0 \quad (i = 1, 2 \ldots r).$$

Die Gleichungen

$$U_1 f = 0, \cdots U_r f = 0$$

müssen also eine gemeinsame Lösung ω besitzen, d. h. übereinstimmen. Dies aber thun sie dann und nur dann, wenn ihre linken Seiten sich nur um einen unwesentlichen Factor unterscheiden, wenn also jedes

$$U_i f \equiv \varrho_i(x, y)\, U_1 f$$

ist. Damit sind wir wieder zum obigen Criterium zurückgelangt.

Zweite Form des Criteriums.

Wir können das Criterium noch etwas anders aussprechen: Ist allgemein bei einer intransitiven Gruppe $U_1 f \,..\, U_r f$:

$$U_i f \equiv \xi_i(x, y) p + \eta_i(x, y) q \quad (i = 1, 2 \,..\, r),$$

so ist jedes

$$\xi_i \equiv \varrho_i \xi_1, \quad \eta_i \equiv \varrho_i \eta_1,$$

d. h. alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \\ \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r \end{vmatrix}$$

verschwinden identisch. Also:

Satz 5: *Eine r-gliedrige Gruppe $U_1 f \,..\, U_r f$, in der*

$$U_i f \equiv \xi_i p + \eta_i q$$

ist, ist transitiv oder besitzt keine Invariante, sobald nicht alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \\ \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden. Verschwinden sie sämtlich identisch, so ist die Gruppe intransitiv und die Lösung der Gleichung $U_1 f = 0$ ihre Invariante.

Beispiele.

1. Beispiel: Die oben betrachteten Gruppen

1) $x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b;$

2) $x_1 = x, \quad y_1 = y + ax + b;$

3) $x_1 = (1 + a_1)x + (a_2 - 1)y + a_3, \quad y_1 = a_1 x + a_2 y + a_3;$

4) $x_1 = x + a + (x^2 - 2y)b,$

$$y_1 = y + ax + \frac{a^2}{2} + (x + a)(x^2 - 2y)b + (x^2 - 2y)^2 \frac{b^2}{2}.$$

besitzen bez. die infinitesimalen Transformationen:

1) $p, \quad q$
2) $q, \quad xq$
3) $xp + xq, \quad yp + yq, \quad p + q$
4) $p + xq, \quad (x^2 - 2y)(p + xq)$.

Nach unserem letzten Satze ist die erste transitiv; die drei übrigen dagegen sind nach unserem Satze offenbar intransitiv.

2. Beispiel: Die infinitesimalen Transformationen

$$q, \quad xq, \quad x^2q, \quad x^3q \cdots x^{r-1}q$$

erzeugen eine r-gliedrige Gruppe:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_rx^{r-1}.$$

Dieselbe ist intransitiv, wie man schon aus ihren infinitesimalen Transformationen ersehen kann, da dieselben sich nur um eine Potenz von x von der ersten, q, unterscheiden.

Verallgemeinerung der Betrachtung.

Wir heben hervor, dass die Betrachtungen dieses Paragraphen, nicht so die der vorhergehenden, bei denen ja von der Gruppeneigenschaft $T_a T_b \equiv T_{(ab)}$ Gebrauch gemacht wurde, volle Gültigkeit behalten, wenn nur irgend welche r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$ vorgelegt sind, *ohne dass vorausgesetzt wird, dass dieselben eine Gruppe erzeugen sollen.* Wir wissen ja aus Theorem 20, § 2 des 7. Kap., dass die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $\Sigma e_i U_i f$ ∞^r verschiedene endliche Transformationen erzeugen. Dieselben führen den Punkt (x, y) allgemeiner Lage in alle Punkte einer Fläche über oder nur in alle Punkte einer Curve, je nachdem die infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$ nicht sämtlich dieselben oder doch sämtlich dieselben Bahncurven haben.

Satz 6: *Die Schar der ∞^r endlichen Transformationen der Ebene, welche von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\sum_1^r e_i U_i f$ erzeugt werden, wo $U_i f \equiv \xi_i p + \eta_i q$ sei, ist transitiv oder intransitiv, d. h. sie führt einen Punkt allgemeiner Lage in alle Punkte eines Flächenstückes oder nur in die Punkte einer Curve über, je nachdem von den zweireihigen Determinanten der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \\ \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r \end{vmatrix}$$

nicht alle oder aber alle identisch verschwinden.

§ 3. Primitivität und Imprimitivität.

Im § 1 und § 2 haben wir die Gruppen der Ebene in zwei grosse Klassen eingereiht, in die der transitiven und die der intransitiven Gruppen.

Nunmehr werden wir die Klasse der transitiven Gruppen weiterhin in zwei Abteilungen zerfällen, in die der *primitiven* und die der *imprimitiven* Gruppen.

Invariante Schar von ∞^1 Curven.

Wir wissen, dass eine transitive Gruppe keine Invariante besitzt, d. h. dass es keine ∞^1 einzeln invarianten Curven bei einer derartigen Gruppe giebt. Nun aber ist wohl denkbar, dass hier eine Schar von ∞^1 Curven existiert von der Beschaffenheit, dass jede Transformation der Gruppe alle Punkte irgend einer dieser ∞^1 Curven in alle Punkte einer anderen dieser Curven überführt, mit anderen Worten, dass die Gruppe ∞^1 Curven unter einander transformiert, oder dass ∞^1 Curven eine bei der Gruppe invariante Schar bilden.

Primitive, imprimitive Gruppen.

Wir nennen eine Gruppe der Ebene *primitiv*, sobald es keine bei ihr invariante Schar von ∞^1 Curven giebt, andernfalls heisst sie *imprimitiv*. Hiernach sind alle intransitiven Gruppen zu den imprimitiven zu rechnen, denn jede intransitive Gruppe besitzt ja eine Invariante ω, und $\omega = \text{Const.}$ stellt eine invariante Curvenschar dar, allerdings eine Schar von der besonderen Art, dass jede Curve derselben *für sich* invariant bleibt. Die transitiven Gruppen dagegen können primitiv oder imprimitiv sein, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen.

Beispiele.

1. Beispiel: Die transitive zweigliedrige Gruppe

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b$$

ist imprimitiv, denn bei ihr bleibt (unter anderen Scharen) die Geradenschar $x = \text{Const.}$ invariant. In der That wird ja jede Gerade $x = c$ in eine Gerade $x_1 = c + a$ übergeführt.

2. Beispiel: Die transitive sechsgliedrige Gruppe aller linearen Transformationen

$$x_1 = a + bx + cy, \quad y_1 = d + ex + fy$$

ist primitiv. Sie enthält nämlich auch die Translationen $x = \text{Const.}$, $y = \text{Const.}$, welche doch nur eine solche Schar von ∞^1 Curven in sich überführen können, die aus *einer* Curve durch alle Verschiebungen hervorgehen. Ist diese eine Curve:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

so lautet die Schar

$$\varphi(x + \text{Const.},\quad y + \text{Const.}) = 0.$$

Dies sind aber nur dann bloss ∞^1 Curven, wenn x und y in φ in additiver Verbindung auftreten, wenn also die Gleichung der ursprünglichen Curve auch so geschrieben werden kann:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

d. h. wenn die Schar aus lauter parallelen Geraden

$$\alpha x + \beta y = \text{Const.}$$

besteht. Eine solche Parallelenschar wird nicht bei allen linearen Transformationen in sich übergeführt. Es giebt demnach keine bei der Gruppe invariante Schar von ∞^1 Curven; die Gruppe ist primitiv.

Zur Entscheidung der Imprimitivität.

Um zu entscheiden, ob allgemein eine transitive Gruppe $U_1 f \,.\,. U_r f$ primitiv oder imprimitiv ist, bedenken wir, dass die eventuell vorhandene und alsdann gesuchte invariante Schar von Curven in der Form

$$\Omega(x, y) = \text{Const.}$$

sich muss schreiben lassen. Die Function Ω muss fernerhin die Eigenschaft haben, dass vermöge einer beliebigen Transformation

$$x_1 = \varphi(x, y, a_1 \,.\,. a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \,.\,. a_r)$$

die Gruppe $\Omega(x_1, y_1) = \text{Const.}$ sein muss, sobald $\Omega(x, y) = \text{Const.}$ ist, d. h. es muss

$$\Omega(\varphi(x, y, a_1 \,.\,. a_r), \quad \psi(x, y, a_1 \,.\,. a_r))$$

eine Function von $\Omega(x, y)$ allein sein: $W(\Omega(x, y))$ und zwar für alle Werte der Veränderlichen x, y und der Parameter $a_1 \,.\,. a_r$.

Insbesondere muss dies gelten für die allgemeine Transformation der Gruppe:

$$x_1 = x + \xi_1(x, y) e_1 + \cdot\cdot + \xi_r(x, y) e_r + \cdot\cdot,$$
$$y_1 = y + \eta_1(x, y) e_1 + \cdot\cdot + \eta_r(x, y) e_r + \cdot\cdot.$$

Bilden wir $\Omega(x_1, y_1)$ für diese Werte und entwickeln wir nach Potenzen von $e_1 \,.\,. e_r$, so kommt die Forderung:

$$\Omega(x, y) + (\xi_1 e_1 + \cdot\cdot + \xi_r e_r)\frac{\partial \Omega}{\partial x} + (\eta_1 e_1 + \cdot\cdot + \eta_r e_r)\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \cdot\cdot$$
$$= W(\Omega(x, y)).$$

Diese Bedingung muss für alle Werte von $e_1 \,.\,. e_r$ erfüllt sein. Sie muss also auch im speciellen für alle Glieder erster Ordnung in $e_1 \,.\,. e_r$ bestehen. Daraus folgt die Bedingung:

$$(\xi_1 e_1 + \cdot\cdot + \xi_r e_r)\frac{\partial \Omega}{\partial x} + (\eta_1 e_1 + \cdot\cdot + \eta_r e_r)\frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Phi(\Omega(x, y)),$$

die sofort in die r einzelnen zerfällt:

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Phi_1(\Omega(x, y)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_r \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_r \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \Phi_r(\Omega(x, y)).$$

Ω muss demnach sicher die r linearen partiellen Differentialgleichungen erfüllen:

$$U_1\Omega = \Phi_1(\Omega), \;\cdot\cdot\; U_r\Omega = \Phi_r(\Omega).$$

Die $\Phi_1 \ldots \Phi_r$ können dabei irgend welche Functionen von Ω allein bedeuten.

Man kann nun so verfahren, dass man etwa Ω aus der ersten Forderung:

$$U_1\Omega = \Phi_1(\Omega)$$

zu bestimmen sucht. Bemerkt man nämlich, dass statt $\Omega =$ Const. auch $F(\Omega) =$ Const. die gesuchte Schar darstellt, so sieht man leicht ein, dass $\Omega =$ Const. in solcher Form gedacht werden kann, dass entweder

$$U_1\Omega = 0 \text{ oder } U_1\Omega = 1$$

ist. Hat man Ω so bestimmt, dass sie eine dieser beiden Bedingungen erfüllt, und sind alsdann nicht alle $U_2\Omega \ldots U_r\Omega$ Functionen von Ω allein, so ist die Gruppe sicher primitiv. Wenn jedoch auch $U_2\Omega \ldots U_r\Omega$ als Functionen von Ω allein darstellbar sind, so ist nun noch nachträglich zu untersuchen, ob $\Omega =$ Const. auch eine bei *allen endlichen* Transformationen der Gruppe invariante Schar darstellt. Dazu wäre also zunächst die Kenntnis der endlichen Gleichungen der Gruppe erforderlich.

Dies Verfahren verlangt die Integration der Differentialgleichungen $U_1\Omega = 0$ oder $U_1\Omega = 1$. Um diese zu vermeiden, kann man einen anderen Weg einschlagen, den wir aber an dieser Stelle nicht erschöpfend angeben werden.

Zweites Verfahren dazu.

Eine Schar von ∞^1 Curven kann durch eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, y') = 0$$

definiert werden. Um also zu entscheiden, ob die vorgelegte Gruppe $U_1f \ldots U_rf$ imprimitiv ist, können wir uns auch fragen, ob ihre Transformationen eine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen.

Zunächst müsste jede infinitesimale Transformation der Gruppe diese Gleichung ungeändert lassen. Dies kommt, da die allgemeine infinitesimale Transformation linear aus $U_1f \ldots U_rf$ ableitbar ist, darauf hinaus, dass die Differentialgleichung insbesondere $U_1f \ldots U_rf$ gestatten

müsste. (Man vgl. hierzu die Ähnlichkeiten darbietenden Betrachtungen über Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen in § 3 des 4. Kap.). Bei

$$U_i f \equiv \xi_i p + \eta_i q$$

erfährt x das Increment $\xi_i \delta t$, y das Increment $\eta_i \delta t$ und y' das früher schon berechnete Increment:

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{dx \cdot d\delta y - dy \cdot d\delta x}{dx^2}$$
$$= \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\right)\delta t.$$

Mithin erhält bei $U_i f$ die linke Seite $F(x, y, y')$ der gesuchten Differentialgleichung bis auf den Factor δt das Increment:

$$\xi_i \frac{\partial F}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

Die Gleichung $F(x, y, y') = 0$ bleibt invariant bei $U_i f$, wenn dies Increment verschwindet, sobald zwischen x, y, y' die Relation $F = 0$ besteht. Wir fordern demnach, dass

$$\xi_i \frac{\partial F}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial F}{\partial y} + \eta_i' \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{2}$$
$$(i = 1, 2 \cdot\cdot r)$$

sei vermöge $F(x, y, y') = 0$. Hierin ist natürlich

$$\eta_i' \equiv \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial y}$$

zu setzen.

Nehmen wir nun an, die vorgelegte Gruppe sei mehr als zweigliedrig, sei also $r > 2$, so wählen wir aus den r Gleichungen (2) irgend drei aus. Sie sind linear und homogen in $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$, und wir dürfen voraussetzen, dass diese drei Differentialquotienten vermöge $F = 0$ nicht sämtlich verschwinden, indem wir uns etwa $F = 0$ in aufgelöster Form $y' - f(x, y) = 0$ geschrieben denken, in der $\frac{\partial F}{\partial y'} \equiv 1$ ist. Da die drei Gleichungen bestehen sollen, wenn $F = 0$ ist, so muss auch ihre Determinante

$$\Delta_{ikl} \equiv \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \eta_i' \\ \xi_k & \eta_k & \eta_k' \\ \xi_l & \eta_l & \eta_l' \end{vmatrix}$$

verschwinden, sobald $F = 0$ ist. Dies gilt von allen so zu bildenden dreireihigen Determinanten. Sie müssen sämtlich vermöge $F = 0$ verschwinden.

Sind sie nicht sämtlich an sich identisch Null, so enthalten die nicht identisch verschwindenden notgedrungen sämtlich einen Factor, der gleich Null gesetzt sich mit der Gleichung $F = 0$ deckt. Man kann also durch *ausführbare* Operationen alle Gleichungen $F = 0$ bestimmen, die überhaupt in Betracht kommen. Allerdings bleibt alsdann noch die Frage offen, ob nun auch jede Transformation der r-gliedrigen Gruppe diese Gleichungen $F = 0$ invariant lässt, denn bisher haben wir nur eingesehen, dass unter den so erhaltenen Gleichungen $F = 0$ die gewünschten sicher enthalten sind. Man kann in der That zeigen, dass wirklich jede der gefundenen Gleichungen $F = 0$ bei der ganzen Gruppe invariant bleibt. Wir gehen jedoch hierauf an dieser Stelle nicht weiter ein. Es ist aber noch zu bemerken, dass unter allen Scharen von ∞^1 Curven eine existiert, die nicht durch eine Differentialgleichung $\Omega(x, y, y') = 0$ darstellbar ist, nämlich die Schar $x =$ Const. Es ist also immer noch zu untersuchen, ob nicht auch die Schar $x =$ Const. invariant bleibt. Dies ist offenbar dann und nur dann der Fall, wenn x bei allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe nur von x abhängige Incremente erhält, wenn also $\xi_1 \dots \xi_r$ sämtlich von y frei sind.

Auch wollen wir hier nicht darauf eingehen, wie in dem Falle zu verfahren ist, in dem alle Δ_{ikl} identisch verschwinden.

Das bisher Gesagte genügt für die von uns verfolgten Zwecke völlig.

Beispiele

1. Beispiel: Die infinitesimalen Transformationen

$$p, \quad xp + yq, \quad x^2p + 2xyq$$

erzeugen, wie man leicht nach § 3 des vorigen Kapitels berechnet, die dreigliedrige Gruppe:

$$x_1 = \frac{(x+a)b}{1-(x+a)c}, \quad y_1 = \frac{by}{(1-(x+a)c)^2}.$$

Hier kann nur eine Determinante Δ_{ikl} gebildet werden, da die Gruppe dreigliedrig ist, nämlich diese:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ x^2 & 2xy & 2y \end{vmatrix} \equiv 2y^2.$$

Der Factor y kann offenbar nicht verschwinden vermöge einer Differentialgleichung $\Omega(x, y, y') = 0$, die ja y' enthalten soll. Wohl aber bleibt die Schar $x =$ Const. invariant: die Gruppe ist also imprimitiv.

2. Beispiel: Die fünfgliedrige specielle lineare Gruppe

$$p, \quad q, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp$$

ist primitiv, denn hier ist $x =$ Const. keine invariante Schar und von den Δ_{ikl}, also von den dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ x & -y & -2y' \\ y & 0 & -y'^2 \end{vmatrix}$$

verschwindet gleich die erste niemals.

3. Beispiel: Bei der dreigliedrigen projectiven Gruppe

$$x_1 = \frac{ax}{bx + cy + 1}, \quad y_1 = \frac{ay}{bx + cy + 1}$$

mit den infinitesimalen Transformationen

$$xp + yq, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q$$

bleibt die Schar $x =$ Const. nicht invariant. Auch ist die einzige hier auftretende Determinante Δ_{ikl}

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x^2 & xy & y - xy' \\ xy & y^2 & (y - xy')y' \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Von den drei Differentialgleichungen (2) ist hier also eine überzählig, sodass die zwei bleiben:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$x^2 \frac{\partial F}{\partial x} + xy \frac{\partial F}{\partial y} + (y - xy') \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

von denen sich die zweite wegen der ersten auf

$$(y - xy') \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

reduciert. Sie sollen vermöge $F(x, y, y') = 0$ erfüllt sein. Ist zunächst $y - xy' = 0$ vermöge $F = 0$, so kann

$$F \equiv y - xy'$$

gesetzt werden. In der That erfüllt diese F auch die erste Gleichung. Ist $y - xy' \neq 0$ vermöge $F = 0$, so denken wir uns $F = 0$ in aufgelöster Form geschrieben:

$$F \equiv y' - f(x, y) = 0.$$

Die zweite Gleichung ist hiermit unvereinbar. Also giebt

$$y - xy' = 0$$

die einzige in Betracht kommende Curvenschar, nämlich die der Geraden

$$\frac{y}{x} = \text{Const.},$$

die offenbar invariant ist, denn die vorgelegte Gruppe lässt den Anfangspunkt in Ruhe und führt Geraden in Geraden über. Die Gruppe ist somit imprimitiv.

Kapitel 9.

Der Hauptsatz der Gruppentheorie für die projectiven Gruppen der Ebene.

Wir kommen jetzt zum wichtigsten Satze der Theorie der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen, den wir allerdings in diesem Kapitel nur für die projectiven Gruppen der Ebene beweisen werden. Dieser Satz, der kurz der *Hauptsatz* heissen möge, kann allgemein so ausgesprochen werden:

r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \dots U_r f$ erzeugen eine r-gliedrige continuierliche Gruppe mit paarweis inversen Transformationen, welche alle eingliedrigen Gruppen $\Sigma\, e_i U_i f$ umfasst, dann und nur dann, wenn jeder Klammerausdruck $(U_i U_k)$ linear aus $U_1 f \dots U_r f$ ableitbar ist.

Diesen Hauptsatz werden wir also im jetzigen Kapitel nur für den Fall beweisen, dass $U_1 f \dots U_r f$ infinitesimale *projective* Transformationen der Ebene sind. Später wird er für beliebige Gruppen der Ebene, an einer noch späteren Stelle für beliebige Gruppen in n Veränderlichen bewiesen werden und zwar zuletzt durch eine rein analytische Betrachtung. Wenn wir jetzt im Beweise mehrere synthetische Überlegungen benutzen, so ist dabei zu bemerken, dass sie einerseits entbehrlich sind, andererseits aber an sich grosses Interesse haben, indem sie ausser dem Hauptsatze zugleich andere wichtige Ergebnisse liefern. Der hier zu gebende Beweis ist also nicht frei von absichtlichen Weitschweifigkeiten.

Namentlich erhalten wir hierbei wichtige Ergebnisse in Betreff der *Differentialinvarianten*, die wir in § 4 verwerten.

§ 1. Vorbereitende Bemerkungen.

Zu unserem Beweise bedürfen wir einiger Hülfsbetrachtungen, die vorausgeschickt werden sollen:

Es seien $U_1 f \dots U_r f$ irgend welche r von einander unabhängige infinitesimale projective Transformationen der Ebene. Die ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen $\Sigma e_i U_i f$ erzeugen, wie Theorem 20, § 2 des 7. Kapitels lehrt, ∞^r endliche Transformationen T_a, $T_b \dots$, die nach Theorem 3 des § 4, Kap. 2, ebenfalls projectiv sind. Ihre Schar ist continuierlich, enthält paarweis inverse Transformationen und auch die identische.

Es möge nun c eine Curve sein, die überhaupt keine infinitesimale projective Transformation gestattet. Werden dann auf c alle ∞^r Transformationen T_a, $T_b \dots$ ausgeführt, so geht die Curve in höchstens ∞^r verschiedene Lagen über. Sie wird aber auch, wie wir beweisen wollen, in nicht weniger als ∞^r verschiedene Curven übergeführt.

Gesetzt nämlich, sie erhält nur ∞^{r-1} oder noch weniger Lagen, so giebt es ∞^1 oder noch mehr Transformationen T_a, welche die Curve c in ein und dieselbe Curve c_1 überführen:

$$(c)\,T_a = (c_1).$$

Ist T eine bestimmte dieser Transformationen, so ist auch $(c)\,T = (c_1)$, also:

$$(c_1)\,T^{-1} = (c).$$

Daher kommt:

$$(c)\,T_a\,T^{-1} = (c).$$

Es giebt somit mindestens ∞^1 Transformationen $T_a T^{-1}$, $T_b T^{-1} \dots$, von denen die Curve c in sich übergeführt wird. Sie bilden offenbar eine continuierliche Schar, in der unter anderen die identische Transformation $T T^{-1} = 1$ und demnach auch infinitesimale Transformationen $T_a T^{-1}$ enthalten sind, die natürlich auch projectiv sind. Dies Ergebnis, dass also c wenigstens eine infinitesimale projective Transformation zulässt, widerspricht aber der Voraussetzung.

Wir bemerken noch, dass auch keine der Curven c_1 der Schar eine infinitesimale projective Transformation Uf zulässt, da sonst wegen

$$(c_1) = (c)\,T$$

die Curve c die infinitesimale projective Transformation zuliesse, die der Aufeinanderfolge von T, Uf und T^{-1} äquivalent ist.

Satz 1: *Führt man auf eine Curve, die keine infinitesimale pro-*

jective Transformation gestattet, alle ∞^r endlichen Transformationen aus, die von r von einander unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen $U_1 f \cdots U_r f$ und den aus ihnen linear ableitbaren $\Sigma e_i U_i f$ erzeugt werden, so geht die Curve in gerade ∞^r verschiedene Curven über, deren keine eine infinitesimale projective Transformation gestattet.

Von diesem Satze machen wir weiter unten Gebrauch.

Eine zweite Vorbemerkung ist diese:

Diffgl., die eine inf. Transform. gestattet.

Liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung in x, y vor:

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdot \cdot y^{(r-1)}) = 0,$$

so werden wir sagen, dass sie die Punkttransformation

$$Uf \equiv \xi p + \eta q$$

gestattet oder, was begrifflich dasselbe ist, dass ihre ∞^r Integralcurven von Uf unter einander vertauscht werden, sobald Uf den Grössen $x, y, y' \cdot \cdot y^{(r)}$ solche Incremente $\delta x, \delta y, \delta y' \cdots \delta y^{(r)}$ erteilt, dass die transformierte Gleichung

$$y^{(r)} + \delta y^{(r)} - \omega - \delta \omega = 0$$

oder also die Gleichung

$$\delta y^{(r)} - \delta \omega = 0$$

nur eine Folge von $y^{(r)} - \omega = 0$ ist*). Uf nämlich erteilt die Incremente (vgl. § 3 des 4. Kap.):

$$\delta x = \xi \delta t, \quad \delta y = \eta \delta t,$$

$$\delta y' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + y' \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - y'^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) \delta t \equiv \eta' \delta t,$$

$$\delta y'' = \delta \frac{dy'}{dx} = \frac{dx\, d\,\delta y' - dy'\, d\,\delta x}{dx^2} = \left(\frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx}\right) \delta t \equiv \eta'' \delta t.$$

Hierin ist η' der bei $\delta y'$ berechnete Ausdruck und die Differentiation nach x die totale, bei der also $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dy'}{dx} = y''$ zu setzen ist. So kommt weiter:

$$\delta y''' = \left(\frac{d\eta''}{dx} - y''' \frac{d\xi}{dx}\right) \delta t \equiv \eta''' \delta t$$

u. s. w. Irgend eine Function f von $x, y, y' \cdot \cdot y^{(r)}$ erfährt also bei Uf bis auf den Factor δt einen gewissen Zuwachs:

$$U^r f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y^{(r)}}.$$

Wir sagen deshalb, die infinitesimale Transformation Uf habe, aus-

---

*) Vgl. hierzu „Diffgln. m. inf. Trf.“, Kap. 16.

geführt auf eine Function, die auch die Differentialquotienten enthält, das Symbol $U^r f$, und bezeichnen $U^r f$ alsdann als die r-mal erweiterte infinitesimale Transformation Uf.

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdot \cdot y^{(r-1)}) = 0$$

gestattet also Uf, wenn das Increment

$$U^r(y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdot \cdot y^{(r-1)}))\, \delta t$$

vermöge $y^{(r)} - \omega = 0$ verschwindet. Das Increment $\eta^{(r)}$, das Uf dem Differentialquotienten $y^{(r)}$ erteilt, ist linear in $y^{(r)}$, sobald $r > 1$ ist. Mithin ist vorstehender Ausdruck sicher linear in $y^{(r)}$ und muss, da er vermöge $y^{(r)} - \omega = 0$ verschwinden soll, ein Vielfaches von $y^{(r)} - \omega$ oder aber identisch Null sein. Es ergiebt sich deshalb die Bedingung:

Satz 2: *Die gewöhnliche Differentialgleichung von zweiter oder höherer Ordnung*

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdot \cdot y^{(r-1)}) = 0$$

gestattet die infinitesimale Punkttransformation Uf dann und nur dann, wenn

$$U^r(y^{(r)} - \omega) \equiv \varrho(y^{(r)} - \omega) \tag{1}$$

ist. Hier bedeutet $U^r f$ die r-mal erweiterte Transformation Uf und ϱ irgend eine Function von $x, y, y' \cdot \cdot y^{(r-1)}$.

Diffgl., die zwei inf. Transform. gestattet.

Nunmehr möge die vorgelegte Differentialgleichung noch eine zweite infinitesimale Transformation Vf gestatten, sodass analog

$$V^r(y^{(r)} - \omega) \equiv \sigma(y^{(r)} - \omega) \tag{2}$$

wird. Der Klammerausdruck (UV) ist ebenfalls eine infinitesimale Transformation. Wir werden sehen, dass die Differentialgleichung auch diese zulässt.

Es ist

$$(UV) \equiv U(Vf) - V(Uf),$$

und (UV) erteilt ebenso wie Uf und Vf den Differentialquotienten $y', y'' \cdots y^{(r)}$ gewisse Incremente. Indem wir diese zum Symbol (UV) hinzufügen, erhalten wir $(UV)^r$, d. i. die r-mal erweiterte infinitesimale Transformation (UV). Es ist dann ziemlich einleuchtend, dass dieselbe sich deckt mit dem Klammerausdruck von $U^r f$ und $V^r f$:

$$(UV)^r \equiv U^r(V^r f) - V^r(U^r f) \equiv (U^r f, V^r f). \tag{3}$$

In der That kann man dies durch Ausrechnung oder auf anderen

Wegen streng beweisen. Wir wollen uns jedoch damit nicht aufhalten *).

Hiernach ist nun $(UV)^r$, ausgeführt auf $y^{(r)} - \omega$:

$$(UV)^r_{y^r - \omega} \equiv U^r\big(V^r(y^{(r)} - \omega)\big) - V^r\big(U^r(y^{(r)} - \omega)\big),$$

also nach (1) und (2) identisch gleich:

$$U^r\big(\sigma(y^{(r)} - \omega)\big) - V^r\big(\varrho(y^{(r)} - \omega)\big)$$

oder:

$$U^r\sigma \cdot (y^{(r)} - \omega) + \sigma U^r(y^r - \omega) - V^r\varrho \cdot (y^{(r)} - \omega) - \varrho V^r(y^{(r)} - \omega).$$

Dies aber ist nach (1) und (2) identisch gleich

$$(U^r\sigma - V^r\varrho)(y^{(r)} - \omega).$$

Bezeichnen wir die in der ersten Klammer stehende Function, die frei von $y^{(r)}$ ist, da ϱ und σ davon frei sind, mit τ, so kommt also:

$$(UV)^r_{y^{(r)} - \omega} \equiv \tau(y^{(r)} - \omega).$$

Nach Satz 2 gestattet unsere gewöhnliche Differentialgleichung also auch (UV).

Satz 3: *Gestattet die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdot\cdot y^{(r-1)}) = 0$$

die beiden infinitesimalen Punkttransformationen Uf, Vf, so gestattet sie auch die infinitesimale Transformation (UV).

An Satz 2 schliesst sich noch ein Satz an, der von vornherein ziemlich einleuchtend erscheint:

Diffgl., die eine eingl. Gruppe gestattet.

Satz 4: *Gestattet die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\Omega(x, y \cdot\cdot y^{(r)}) = 0$$

die infinitesimale Punkttransformation Uf, so gestattet sie auch jede endliche Transformation der von ihr erzeugten eingliedrigen Gruppe.

Sie gestattet nämlich Uf selbst, wenn die Gleichung:

$$U^r f \equiv \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdot\cdot + \eta^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y^{(r)}} = 0$$

vermöge $\Omega = 0$ erfüllt wird, sobald man in ihr f durch Ω ersetzt. Man kann aber $U^r f$ als eine infinitesimale Transformation der $r + 2$ Veränderlichen $x, y, y' \cdot\cdot y^{(r)}$ auffassen und alsdann von einem Satze Gebrauch machen, der in der Theorie der eingliedrigen Gruppen bewiesen wird**), von dem Satze, dass, sobald eine infinitesimale Transformation in beliebig vielen Veränderlichen eine Gleichung invariant lässt, alsdann auch jede der von ihr erzeugten endlichen Transforma-

*) Siehe Satz 4, § 1 des 17. Kap. der „Diffgln. mit inf. Trf."

**) Ebenda, Theorem 28, § 3 des 14. Kap.

tionen diese Gleichung in sich überführt. Hiernach bleibt dann $\Omega = 0$ auch invariant bei allen Transformationen der von $U^r f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe in den $r+2$ Veränderlichen $x, y, y' \cdots y^{(r)}$. Diese eingliedrige Gruppe besteht aber aus allen Transformationen, die aus den endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe Uf in x, y allein hervorgehen, wenn man sie erweitert, d. h. die Gleichungen hinzugefügt, die ausdrücken, wie sich $y_1', y_1'' \cdots y_1^{(r)}$ dabei als Functionen von $x, y, y' \cdots y^{(r)}$ darstellen*). Mithin gestattet die Differentialgleichung $\Omega = 0$ auch die eingliedrige Gruppe Uf.

Vollständige Systeme.

Schliesslich wollen wir noch die *vollständigen Systeme*, die wir im dritten Paragraphen gebrauchen werden, und die schon früher berührt wurden (im 4. Kapitel), dem Leser in aller Kürze ins Gedächtnis zurückrufen:

σ lineare partielle Differentialgleichungen in $x_1, x_2 \cdots x_n$:

$$A_k f \equiv \alpha_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_{k2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \alpha_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$$(k = 1, 2 \cdots \sigma),$$

in denen die α_{kj} gewisse Functionen von $x_1 \cdots x_n$ sind, heissen von einander unabhängig, wenn keine Beziehung von der Form:

$$\psi_1(x_1 \cdots x_n) A_1 f + \cdots + \psi_\sigma(x_1 \cdots x_n) A_\sigma f = 0$$

zwischen ihnen besteht, in der nicht alle ψ identisch Null sind. Sonst nämlich würden $\sigma - 1$ der Gleichungen die σ^{te} nach sich ziehen. Sind sie unabhängig und haben sie eine gemeinsame Lösung $f = \varphi(x_1 \cdots x_n)$, so ist mit $A_k \varphi \equiv 0$ auch jedes

$$(A_k A_l)\varphi \equiv A_k(A_l \varphi) - A_l(A_k \varphi) \equiv 0.$$

Jede gemeinsame Lösung erfüllt also auch die linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(A_k A_l) = 0 \quad (k, l = 1, 2 \cdots \sigma).$$

Entweder sind alle diese von den obigen σ Gleichungen abhängig, sodass sie nichts Neues aussagen, oder aber gewisse von ihnen sind von einander und von den σ gegebenen unabhängig. Im letzteren Falle werden wir diese zu den Gleichungen $A_k f = 0$ hinzufügen.

Das so erhaltene System von mehr als σ unabhängigen Differentialgleichungen behandeln wir wieder so, indem wir alle Klammerausdrücke gleich Null setzen und nur die dadurch entstehenden neuen Differentialgleichungen hinzunehmen, die auch unabhängig sind. So

---

*) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.", Satz 5, § 2 des 16. Kap.

fahren wir fort. Dieser Process muss ein Ende haben, da es nicht mehr als n von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen in n Veränderlichen giebt.

Endlich gewinnen wir also etwa $r\,(\leq n)$ von einander unabhängige Gleichungen

$$A_i f = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

von der Art, dass jede Gleichung

$$(A_i A_k) = 0$$

von jenen abhängt, also jeder Klammerausdruck die Form hat:

$$(A_i A_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, \psi_{iks}(x_1 \cdots x_n) A_s f.$$

Alsdann sagt man, dass die $A_i f = 0$ ein r-gliedriges vollständiges System bilden, und beweist, dass ein r-gliedriges vollständiges System in n Veränderlichen gerade $n - r$ von einander unabhängige Lösungen $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-r}$ hat, jede andere Lösung also eine Function von $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-r}$ allein und andererseits jede Function von $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-r}$ allein eine Lösung ist. Nur diesen Satz werden wir in der Folge aus der Theorie der vollständigen Systeme benutzen.

§ 2. Der eine Teil des Hauptsatzes: Die Klammerausdrücke der infinitesimalen Transformationen einer projectiven Gruppe.

Wir sind nun genügend ausgerüstet, unseren Hauptsatz zu beweisen, und zerlegen den Beweis in zwei Teile, die in diesem und dem nächsten Paragraphen nacheinander erledigt werden.

Es seien $U_1 f \cdots U_r f$ r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen projectiven Gruppe in x, y. Wir werden zeigen, dass sich ihre Klammerausdrücke linear aus ihnen ableiten lassen.

Zu diesem Zwecke sei c irgend eine Curve, welche keine infinitesimale projective Transformation der Ebene zulässt. Führen wir auf diese Curve alle ∞^r projectiven Transformationen T_a, $T_b \cdots$ unserer Gruppe aus, alle Transformationen also, welche den eingliedrigen Gruppen $\Sigma e_i U_i f$ angehören, so nimmt sie nach Satz 1 des vorigen Paragraphen gerade ∞^r verschiedene Lagen c_a, $c_b \cdots$ an. Wenn wir dann die Transformationen T_a, $T_b \cdots$ der Gruppe auf irgend eine dieser Curven c_a, $c_b \cdots$, etwa auf c_a, ausüben, so geht sie wieder in eine Curve dieser Schar von ∞^r Curven über, denn es ist:

$$(c_a)\, T_b = (c)\, T_a T_b = (c)\, T_c = c_c,$$

wenn T_c die Transformation der Gruppe bezeichnet, die $T_a T_b$ äquivalent ist.

Die Schar der erhaltenen ∞^r Curven wird also durch $T_a, T_b \cdots$ in sich transformiert. Sie verhält sich invariant gegenüber allen Transformationen der Gruppe. Es gestattet also auch die Differentialgleichung r^{ter} Ordnung

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdots y^{(r)}) = 0,$$

deren Integralcurven sie sind, alle Transformationen der Gruppe und insbesondere die r infinitesimalen $U_1 f \cdots U_r f$. Nach Satz 3 des § 1 gestattet sie also auch alle Klammerausdrücke $(U_i U_k)$. Dieselben sind gewisse infinitesimale projective Transformationen. Nach Satz 4 des § 1 gestattet sie auch alle von ihnen erzeugten endlichen Transformationen.

Mithin wird die Schar der ∞^r Curven von allen von $U_1 f \cdots U_r f$ und den $(U_i U_k)$ erzeugten endlichen projectiven Transformationen in sich übergeführt. Nach Satz 1 des § 1 können unter diesen endlichen Transformationen nur ∞^r verschiedene enthalten sein. Dies wäre nicht der Fall, wenn irgend eine $(U_i U_k)$ nicht linear aus $U_1 f \cdots U_r f$ ableitbar wäre, nach Theorem 20, § 2 des 7. Kap., denn $U_1 f \cdots U_r f$ sind ja schon r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. Also ist jede $(U_i U_k)$ linear aus $U_1 f \cdots U_r f$ ableitbar.

Klammerausdrücke der inf. Transform. einer Gruppe.

Satz 5: *Sind $U_1 f \cdots U_r f$ r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen projectiven Gruppe der Ebene, so ist jeder Klammerausdruck $(U_i U_k)$ aus ihnen von der Form:*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \cdots r),$$

in der die c_{iks} gewisse Constanten sind.

In der ersten Abteilung haben wir, wo es nur anging, diesen Satz direct an den damals betrachteten projectiven Gruppen bestätigt, sodass es hier keiner neuen Beispiele bedarf. Wohl aber wollen wir den Beweisgang durch ein Beispiel erläutern:

Beispiel.

Beispiel: Die Curve

$$y - \sin x = 0$$

gestattet keine infinitesimale projective Transformation. Denn gestattet sie

$$Uf \equiv \xi p + \eta q,$$

so muss

$$\eta - \xi \cos x = 0$$

sein vermöge $y = \sin x$. Bei einer infinitesimalen projectiven Transformation aber ist allgemein:

$$\xi \equiv a + cx + dy + hx^2 + kxy,$$
$$\eta \equiv b + ex + gy + hxy + ky^2,$$

und es müsste also

$$b + ex + g \sin x + hx \sin x + k \sin^2 x -$$
$$- (a + cx + d \sin x + hx^2 + kx \sin x) \cos x = 0$$

sein für jedes x. Dies zöge jedoch $a = b = \cdot \cdot = h = 0$ nach sich. — Wir dürfen also die Curve

$$y - \sin x = 0$$

als die oben mit c bezeichnete Curve benutzen.

Die vorgelegte projective Gruppe sei nun diese:

$$x_1 = ax + b, \quad y_1 = cy + d.$$

Führen wir alle ihre ∞^4 Transformationen auf die Curve c aus, so geht sie über in die Schar von ∞^4 Curven:

$$\alpha y + \beta - \sin(\gamma x + \delta) = 0,$$

in der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ willkürliche Constanten sind. Diese Curven sind die Integralcurven einer gewissen Differentialgleichung 4. O., die wir erhalten durch Elimination von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus der vorliegenden und den differenzierten Gleichungen:

$$\alpha y' - \gamma \cos(\gamma x + \delta) = 0,$$
$$\alpha y'' + \gamma^2 \sin(\gamma x + \delta) = 0,$$
$$\alpha y''' + \gamma^3 \cos(\gamma x + \delta) = 0,$$
$$\alpha y^{\mathrm{IV}} - \gamma^4 \sin(\gamma x + \delta) = 0.$$

Es ergiebt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{y^{\mathrm{IV}}}{y''} - \frac{y'''}{y'} = 0$$

oder:

$$y' y^{\mathrm{IV}} - y'' y''' = 0.$$

Sie gestattet natürlich die vier infinitesimalen Transformationen

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv xp, \quad U_3 f \equiv q, \quad U_4 f \equiv yq$$

der vorgelegten Gruppe. Man kann dies leicht bestätigen, da die viermalige Erweiterung zunächst giebt:

$$U_1^4 f \equiv p,$$
$$U_2^4 f \equiv xp - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - 2y'' \frac{\partial f}{\partial \eta''} - 3y''' \frac{\partial f}{\partial y'''} - 4y^{IV} \frac{\partial f}{\partial y^{IV}},$$
$$U_3^4 f \equiv q,$$
$$U_4^4 f \equiv yq + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y'' \frac{\partial f}{\partial y''} + y''' \frac{\partial f}{\partial y'''} + y^{IV} \frac{\partial f}{\partial y^{IV}}.$$

Setzt man hierin für f die linke Seite $y' y^{IV} - y'' y'''$ der Differentialgleichung ein, so erhält man Ausdrücke, die entweder identisch oder vermöge der Gleichung Null sind.

Da die Differentialgleichung also $U_1 f \ldots U_4 f$ gestattet, so lässt sie auch die $(U_i U_k)$ zu. Diese sind demnach linear aus $U_1 f \ldots U_4 f$ ableitbar. Es ist nämlich:

$$(U_1 U_2) \equiv p, \quad (U_3 U_4) \equiv q,$$

während die übrigen Klammerausdrücke verschwinden.

Um das Wesentliche unseres Beweises hervorzuheben, wollen wir noch als Beispiel eine Transformationenschar betrachten, die keine Gruppe ist.

Beispiel einer Schar von Transf., die keine Gruppe bilden.

Beispiel: Wir betrachten die Schar von ∞^2 projectiven Transformationen

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + bx + \frac{ab}{2},$$

die keine Gruppe darstellen. Sie werden von den infinitesimalen Transformationen p, xq erzeugt, und sie führen die Curve

$$y - \sin x = 0$$

über in die Curvenschar:

$$y + \beta x + \frac{\alpha\beta}{2} - \sin(x + \alpha) = 0,$$

deren Differentialgleichung 2. O. durch Elimination von α, β aus dieser und den beiden differenzierten Gleichungen

$$y' + \beta - \cos(x + \alpha) = 0,$$
$$y'' + \sin(x + \alpha) = 0$$

hervorgeht in der Form:

$$2(y + y'') + (x - \text{arc} \sin y'')(\sqrt{1 - y''^2} - y') = 0.$$

Die Curvenschar oder also diese Differentialgleichung gestattet aber die infinitesimale Transformation p nicht, denn bei p erhalten y, y', y'' keine Incremente, sondern nur x wächst um δt, die linke Seite der Gleichung also um

$$(\sqrt{1 - y''^2} - y')\delta t,$$

und dieser Ausdruck verschwindet nicht vermöge der Differential-

gleichung. Ebensowenig gestattet letztere, wie man ausrechnen möge, xq. Die Curve

$$y - \sin x = 0$$

wird also zwar durch die ∞^2 von den $e_1 p + e_2 xq$ erzeugten endlichen Transformationen in ∞^2 Curven übergeführt, aber nicht jede Curve dieser Schar wieder in eine Curve derselben.

§ 3. Der andere Teil des Hauptsatzes: Umkehrung des Ergebnisses.

Es wird sich nun darum handeln, nachzuweisen, dass r von einander unabhängige infinitesimale projective Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$, welche paarweis in Beziehungen von der Form

$$(4) \qquad (U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f$$

$$(i,\ k = 1,\ 2\ldots r, \quad c_{iks} = \text{Const.})$$

stehen, eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Zunächst wissen wir, dass die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\sum_i e_i U_i f$ insgesamt ∞^{r-1} eingliedrige projective Gruppen mit ∞^r verschiedenen endlichen Transformationen $T_a,\ T_b \ldots$ erzeugen, die paarweis invers sind. (Nach Theorem 20, § 2 des 7. Kap.) Wir müssen zeigen, dass alle diese $T_a,\ T_b \ldots$ zusammen eine Gruppe bilden.

Zum Beweise erweitern wir die infinitesimalen Transformationen $U_i f$ in bekannter Weise durch Hinzunahme der Transformationen, welche die Differentialquotienten $y',\ y'' \ldots y^{(r-1)}$ erfahren:

$(r-1)$-malige Erweiterung der inf. Transformationen.

$$U_i^{r-1} f \equiv \xi_i p + \eta_i q + \eta_i' \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + \eta_i^{(r-1)} \frac{\partial f}{\partial y^{r-1}}.$$

Die r linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(5) \qquad U_i^{r-1} f = 0 \quad (i = 1,\ 2 \ldots r)$$

in den $r+1$ Veränderlichen $x,\ y,\ y' \ldots y^{(r-1)}$ haben nun die Eigenschaft, dass jede der Gleichungen

$$(U_i^{r-1} U_k^{r-1}) = 0,$$

welche ja auch von den Lösungen von (5) erfüllt werden, wie in § 1 erwähnt wurde, eine Folge von jenen ist. Denn es ist ja nach Formel (3) des § 1 und nach (4):

$$(U_i^{r-1} U_k^{r-1}) \equiv (U_i U_k)^{r-1} \equiv \left(\sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f\right)^{r-1},$$

und dieser Ausdruck ist offenbar identisch mit:

$$\sum_1^r c_{iks} U_s^{r-1} f,$$

der aber vermöge (5) verschwindet.

Aus den Gleichungen (5) lassen sich also durch Klammeroperation keine wesentlich neuen Differentialgleichungen bilden. Sie stellen mithin nach den Schlussbemerkungen des § 1 ein höchstens r-gliedriges vollständiges System in $r+1$ Veränderlichen $x, y, y' \ldots y^{(r-1)}$ dar. Wäre es weniger als r-gliedrig, d. h. wäre eine der Gleichungen (5) eine Folge der übrigen, so würde es mindestens $r+1-(r-1)$, also zwei von einander unabhängige Lösungen $u(x, y \ldots y^{(r-1)})$ und $v(x, y \ldots y^{(r-1)})$ besitzen, sodass jede Gleichung von der Form

$$v - \Omega(u) = 0$$

eine Differentialgleichung von höchstens $(r-1)^{ter}$ Ordnung darstellte, die alle endlichen Transformationen $T_a, T_b \ldots$ der eingliedrigen Gruppen $\Sigma e_i U_i f$ gestattete, da ja dann mit $U_i^{r-1} u \equiv 0$, $U_i^{r-1} v \equiv 0$ auch

$$U_i^{r-1}(v - \Omega(u)) \equiv U_i^{r-1} v - \Omega'(u) U_i^{r-1} u \equiv 0$$

wäre. Diese Differentialgleichung würde also höchstens ∞^{r-1} Curven definieren, deren Schar alle $T_a, T_b \ldots$ zuliesse. Es liesse sich aber durch passende Wahl der willkürlichen Function Ω von u immer erreichen, dass der Schar der Integralcurven eine beliebige solche Curve

$$y - \psi(x) = 0$$

angehörte, welche keine infinitesimale projective Transformation gestattet. Denn man brauchte nur in u und v die Substitutionen

$$y = \psi(x), \quad y' = \psi'(x), \quad \ldots y^{(r-1)} = \psi^{r-1}(x)$$

zu machen, wodurch sie etwa in $\bar{u}(x)$ und $\bar{v}(x)$ übergingen und dann Ω so als Function von $u = \bar{u}$ zu wählen, dass

$$\bar{v}(x) - \Omega(\bar{u}(x)) \equiv 0$$

wäre, was stets möglich ist, da auch die Fälle $u =$ Const. und $v =$ Const. unter der Form $v - \Omega(u) = 0$ enthalten sind. Alsdann würden wir eine Schar von ∞^{r-1} oder noch weniger Curven vor uns haben, der diese eine Curve $y - \psi(x) = 0$ angehörte, und welche die ∞^r endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppen $\Sigma e_i U_i f$ zuliesse. Aber die Curve $y - \psi(x) = 0$ wird von diesen nach Satz 1 des § 1 in ∞^r verschiedene Curven übergeführt, sodass sich ein Widerspruch ergiebt.

Die Gleichungen (5) müssen folglich ein gerade r-gliedriges vollständiges System in den $r+1$ Veränderlichen bilden, mit anderen

Worten: sie sind von einander unabhängig. Sie besitzen demnach auch *gerade nur eine* gemeinsame Lösung, die wir mit $J_{r-1}(x, y \,.\,.\, y^{r-1})$ bezeichnen wollen. Dies Ergebnis ist an sich wichtig und wir werden darauf in § 4 zurückkommen. Für unseren augenblicklichen Zweck dagegen ist es nicht unbedingt nötig. Es giebt aber den folgenden Überlegungen mehr Klarheit.

r-malige Erweiterung der inf. Transformation.

Wir berechnen jetzt auch die r-maligen Erweiterungen von $U_1 f \ldots U_r f$ und setzen sie gleich Null. Die so erhaltenen Gleichungen

$$(6) \qquad U_i^r f = 0 \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

sind sicher von einander unabhängig, da schon die Gleichungen (5) von einander unabhängig sind. Auch ist nach Formel (2) des § 1 und nach (4) jeder Klammerausdruck:

$$(U_i^r U_k^r) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s^r f.$$

Die Gleichungen (6) bilden mithin ein r-gliedriges vollständiges System in $r + 2$ Veränderlichen $x, y \,.\,.\, y^{(r)}$. Es besitzt zwei von einander unabhängige Lösungen. Eine Lösung ist die obige J_{r-1}, die frei von $y^{(r)}$ ist, denn die $U_i^r f$ reducieren sich auf die $U_i^{r-1} f$, wenn f frei von $y^{(r-1)}$ angenommen wird. Eine zweite von J_{r-1} unabhängige Lösung von (6) sei $J_r(x, y \,.\,.\, y^{(r)})$. Sie ist sicher nicht frei von $y^{(r)}$, da sie sonst auch (5) erfüllte.

Jede Gleichung

$$J_r - \Omega(J_{r-1}) = 0$$

stellt nunmehr eine bei unseren ∞^r endlichen Transformationen T_a, T_b .. invariante Differentialgleichung von sicher r^{ter} Ordnung dar, und wie vorhin können wir durch passende Wahl der Function Ω von J_{r-1} erreichen, dass zu ihren ∞^r Integralcurven eine beliebig gewählte Curve c oder $y - \psi(x) = 0$ gehört, die keine infinitesimale projective Transformation gestattet. Weil diese Curve c nach Satz 1 des § 1 durch die ∞^r endlichen Transformationen T_a, T_b .., die von $U_1 f \ldots U_r f$ erzeugt werden, in gerade ∞^r verschiedene Curven übergeführt wird, und weil die Schar der ∞^r Integralcurven der Differentialgleichung die T_a, T_b .. gestattet, so besteht diese Schar gerade aus den ∞^r Curven, in welche jene bestimmte Curve c durch die T_a, T_b .. verwandelt wird. Keine dieser Curven gestattet nach Satz 1 des § 1 eine infinitesimale projective Transformation.

Nachweis der Gruppeneigenschaft.

Nehmen wir nun — entgegen dem zu Beweisenden — an, dass die T_a, T_b .. keine Gruppe bilden. Alsdann ist nicht jede Aufeinander-

folge $T_a T_b$ einer Transformation der Schar äquivalent. Bilden wir alle Aufeinanderfolgen $T_a T_b$, so erhalten wir eine continuierliche Schar von Transformationen T'. Diese Schar enthält paarweis inverse Transformationen, da zu $T_a T_b$ ja $T_b^{-1} T_a^{-1}$ invers ist und die T^{-1} der Schar der ursprünglichen T angehören. Weil diese Schar der T auch die identische Transformation enthält, so enthält die Schar T' auch alle T, denn wir brauchen nur in $T_a T_b$ die $T_b = 1$ anzunehmen, um T_a zu erhalten.

Wenn nun die T' auch keine Gruppe bilden, so stellen wir die Schar aller Transformationen T'' her, die den Aufeinanderfolgen je zweier T' äquivalent sind. Auch diese T'' bilden eine continuierliche Schar. Sie enthalten die T und die T' und sind paarweis invers.

So fahren wir fort, wenn auch die T'' noch keine Gruppe bilden. Jedenfalls ist die Schar der T' grösser als die der T, die der T'' grösser als die der T' u. s. w. Die T' sind also mindestens ∞^{r+1}, die T'' mindestens ∞^{r+2} Transformationen u. s. w. Andererseits aber sind die T', T''... sämtlich projectiv, und es existieren bekanntlich nur ∞^8 verschiedene projective Transformationen in der Ebene. Also müssen wir notgedrungen nach einer endlichen Anzahl von Fortsetzungen des angegebenen Verfahrens einmal zu einer continuierlichen Schar gelangen, etwa zur Schar der $T^{(\varrho)}$, derart, dass die $T^{(\varrho+1)}$, d. h. die den Aufeinanderfolgen je zweier $T^{(\varrho)}$ äquivalenten Transformationen keine grössere Anzahl bilden als die $T^{(\varrho)}$ selbst, dass also die Schar der $T^{(\varrho+1)}$ mit der Schar der $T^{(\varrho)}$ zusammenfällt, dass folglich die Aufeinanderfolge zweier $T^{(\varrho)}$ wieder eine $T^{(\varrho)}$ giebt, kurz, dass die $T^{(\varrho)}$ eine *Gruppe* bilden. Es ist dies alsdann eine continuierliche projective Gruppe mit paarweis inversen Transformationen und — bei der gemachten Annahme — mit mehr als ∞^r Transformationen, somit eine mindestens $(r+1)$-gliedrige Gruppe. Dieselbe besteht aber aus allen endlichen Transformationen, die von mindestens $r+1$ von einander unabhängigen infinitesimalen projectiven Transformationen und deren linearen Ableitungen erzeugt werden, nach Theorem 21, § 2 des 7. Kap.

Diese mindestens ∞^{r+1} projectiven Transformationen $T^{(\varrho)}$ lassen nun, wie die T, die T' u. s. w. die Schar der ∞^r Integralcurven unserer Differentialgleichung invariant. Keine dieser ∞^r Integralcurven aber gestattet eine infinitesimale projective Transformation. Daher geben die $T^{(\varrho)}$ auf eine dieser Curven ausgeführt nach Satz 1 des § 1 mindestens ∞^{r+1} Curven und nicht, wie es sein muss, nur jene ∞^r Integralcurven. Wir stossen hiermit auf einen Widerspruch.

Die gemachte Annahme ist also falsch: Die T selbst bilden demnach schon eine Gruppe. Damit haben wir gefunden:

Satz 6: *Stehen r von einander unabhängige infinitesimale projective Transformationen $U_1 f \dots U_r f$ der Ebene paarweis in Beziehungen von der Form:*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r),$$

in der die c_{iks} Constanten sind, so bilden die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$ erzeugten endlichen Transformationen eine r-gliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.

Vereinigen wir diesen Satz mit dem des vorigen Paragraphen, so ergiebt sich das als Hauptsatz für die projectiven Gruppen der Ebene angekündigte

Hauptsatz für die proj. Gruppen der Ebene.

Theorem 22: *r von einander unabhängige infinitesimale projective Transformationen $U_1 f \dots U_r f$ der Ebene erzeugen dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen, wenn die $U_i f$ paarweis in Beziehungen stehen von der Form*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r),$$

in der die c_{iks} Constanten sind.

Der Beweisgang soll durch ein Beispiel erläutert werden.

Beispiel: Vorgelegt seien

Beispiel.

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv q, \quad U_3 f \equiv xp, \quad U_4 f \equiv yq.$$

Da

$$\begin{aligned} (U_1 U_2) \equiv 0, \quad & (U_1 U_3) \equiv U_1 f, \quad (U_1 U_4) \equiv 0, \\ & (U_2 U_3) \equiv 0, \quad\;\; (U_2 U_4) \equiv U_2 f, \\ & \qquad\qquad\qquad\;\; (U_3 U_4) \equiv 0 \end{aligned}$$

ist, so sind die Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt. Es ist hier $r = 4$, und wir bilden daher das viergliedrige vollständige System:

$$\begin{aligned} U_1^{\mathrm{IV}} f &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ U_2^{\mathrm{IV}} f &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ U_3^{\mathrm{IV}} f &\equiv x \frac{\partial f}{dx} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} - 2y'' \frac{\partial f}{\partial y''} - 3y''' \frac{\partial f}{\partial y'''} - 4y^{\mathrm{IV}} \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} = 0, \\ U_4^{\mathrm{IV}} f &\equiv y \frac{\partial f}{\partial y} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} + y'' \frac{\partial f}{\partial y''} + y''' \frac{\partial f}{\partial y'''} + y^{\mathrm{IV}} \frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}} = 0 \end{aligned}$$

in den 6 Veränderlichen $x, y, y', y'', y''', y^{\mathrm{IV}}$ und mit zwei Lösungen J_3, J_4, deren erste frei von y^{IV} ist, während die zweite y^{IV} enthält.

Die beiden ersten Gleichungen zeigen, dass J_3 und J_4 frei von x und y sind. Es bleibt also noch zu erfüllen:

$$y''\frac{\partial f}{\partial y''}+2y'''\frac{\partial f}{\partial y'''}+3y^{\mathrm{IV}}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}}=0,$$

$$y'\frac{\partial f}{\partial y'}+y''\frac{\partial f}{\partial y''}+y'''\frac{\partial f}{\partial y'''}+y^{\mathrm{IV}}\frac{\partial f}{\partial y^{\mathrm{IV}}}=0.$$

Es kann also

$$J_3\equiv\frac{y'y'''}{y''^2},\quad J_4\equiv\frac{y'^2y^{\mathrm{IV}}}{y''^3}$$

gesetzt werden. Die invariante Differentialgleichung 4. O. lautet demnach:

$$\frac{y'^2y^{\mathrm{IV}}}{y''^3}-\Omega\left(\frac{y'y'''}{y''^2}\right)=0.$$

Hier kann Ω so gewählt werden, dass z. B. die schon in den Beispielen des § 2 gebrauchte Curve

$$y=\sin x$$

zu den Integralcurven gehört. Wir setzen daher

$$y=\sin x,\quad y'=\cos x,\quad y''=-\sin x,\quad y'''=-\cos x,\quad y^{\mathrm{IV}}=\sin x$$

ein und erhalten

$$-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-\Omega\left(-\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=0.$$

Es ist also

$$\Omega(u)\equiv u$$

anzunehmen, so dass die gewünschte Differentialgleichung lautet:

$$\frac{y'^2y^{\mathrm{IV}}}{y''^3}-\frac{y'y'''}{y''^2}=0$$

oder

$$y'y^{\mathrm{IV}}-y''y'''=0.$$

Ihre ∞^4 Integralcurven, die wir übrigens schon im ersten Beispiel des § 2 kennen lernten, gestatten keine infinitesimale projective Transformation. Die grösste projective Gruppe also, welche sie unter einander vertauscht, hat nach Satz 1 des § 1 höchstens 4 von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. Es sind dies p, xp, q, yq, welche die Gruppe

$$x_1=ax+b,\quad y_1=cy+d$$

erzeugen.

§ 4. Nachträgliche Bemerkungen zum Hauptsatze. — Differentialinvarianten.

Früher, in § 3 des 7. Kap., haben wir die Redeweise: „Gruppe $U_1f\dots U_rf$“ eingeführt. So lange es sich um projective Gruppen der

Ebene handelt, ist es nun nach unserem Hauptsatze klar, dass diese Bezeichnung dann und nur dann einen Sinn hat, wenn jeder Klammerausdruck $(U_i U_k)$ linear aus $U_1 f \dots U_r f$ abgeleitet werden kann.

Verallgemeinerung der Beweismethode.

Wir wollen ferner nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dass die in §§ 2, 3 gegebene Beweismethode sich ohne Schwierigkeit so abändern lässt, dass sie für einen viel allgemeineren Fall zum Beweise des Hauptsatzes ausreicht:

Angenommen nämlich, es liegt eine p-gliedrige Gruppe G_p der Ebene vor, von der wir wissen, dass ihre infinitesimalen Transformationen $U_1 f \dots U_p f$ Klammerrelationen von der Form

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^p {}^s \gamma_{iks} U_s f$$
$$(i, k = 1, 2 \,.\,. p, \quad \gamma_{iks} = \text{Const.})$$

erfüllen, und es sind insbesondere $U_1 f \dots U_r f$ irgend welche r $(< \varrho)$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen von G_p, so erzeugen auch sie dann und nur dann für sich eine r-gliedrige Gruppe, also eine r-gliedrige Untergruppe g_r der Gruppe G_p, wenn ihre Klammerausdrücke sich *aus ihnen selbst* linear ableiten lassen. Der wesentliche Unterschied zwischen dem hierzu nötigen Beweis und dem früheren ist der, dass überall, wo damals von einer projectiven Transformation die Rede war, von einer Transformation also, welche der allgemeinen achtgliedrigen projectiven Gruppe G_8 der Ebene angehört, hier allgemein eine Transformation der Gruppe G_p gesetzt werden muss, dass also an die Stelle der G_8 eben diese G_p tritt. Hält man dies fest, wählt man also unter anderem jene Curve c so, dass sie keine infinitesimale Transformation der G_p gestattet, so ist die Übertragung der früheren Beweise auf den jetzigen allgemeineren Fall nicht schwer. Wir gehen jedoch auf die Einzelheiten hier nicht weiter ein, weil der Hauptsatz für beliebige Gruppen der Ebene später besonders bewiesen werden soll.

Wir wollen nur das Eine bemerken, dass Satz 1 des § 1 sich ebenfalls unmittelbar so verallgemeinern lässt:

Satz 7: *Führt man auf eine Curve, welche keine infinitesimale Transformation einer p-gliedrigen Gruppe G_p der Ebene gestattet, alle ∞^r endlichen Transformationen aus, welche von irgend welchen r $(< p)$ von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_p und den aus ihnen linear ableitbaren erzeugt werden, so geht die Curve in gerade ∞^r verschiedene Curven über, deren Inbegriff jene ∞^r Transformationen gestattet, während keine der ∞^r Curven für sich eine infinitesimale Transformation der G_p zulässt.*

In § 3 sind gewisse Functionen J_{r-1} und J_r aufgetreten. Sie enthielten x, y und die Differentialquotienten y', y''... und waren invariant gegenüber allen infinitesimalen und also auch allen endlichen Transformationen der Gruppe $U_1f \dots U_rf$. Wir nennen sie daher *Differentialinvarianten**) der Gruppe (vgl. § 3 des 4. Kap.). J_r heisst, da sie $y^{(r)}$ wirklich enthält, eine *Differentialinvariante* r^{ter} *Ordnung*. Die Differentialinvariante J_{r-1} enthält $y^{(r)}$ nicht und braucht übrigens auch $y^{(r-1)}$ nicht zu enthalten, sondern kann von niederer als $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein, wie das Beispiel der Gruppe

Differential-invarianten.

$$U_1f \equiv x^2p + xyq, \quad U_2f \equiv xyp + y^2q$$

lehrt, in der

$$(U_1 U_2) \equiv 0$$

und $r = 2$ ist. Denn hier wird das zweigliedrige vollständige System

$$U_1''f \equiv x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + (y - xy')\frac{\partial f}{\partial y'} - 3xy''\frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$U_2''f \equiv xy\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + y'(y - xy')\frac{\partial f}{\partial y'} - 3xy'y''\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$$

erfüllt durch

$$J_1 \equiv \frac{y}{x}, \quad J_2 \equiv \frac{x^3y''}{(y - xy')^3}.$$

J_1 enthält aber y' nicht.

Wir bewiesen oben, dass, wenn $U_1f \dots U_rf$ erstens von einander unabhängig sind, zweitens paarweis in den Beziehungen

$$(4) \qquad (U_iU_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_sf$$

*) Die Integrationstheorien der älteren Mathematiker beziehen sich, wie Lie zuerst (1870) bemerkte — man vergleiche die „Diffgln. m. inf. Trf." an mehreren Stellen —, immer auf Differentialgleichungen, die alle Transformationen einer Gruppe gestatten. Bewusst machen wohl erst Gauss, Minding, Lamé, Cayley, Beltrami, Christoffel (1870) und Lipschitz (1870) von Differentialinvarianten Gebrauch. In den Jahren 1870—74 entwickelte Lie allgemeine Integrationstheorien für Differentialgleichungen, die eine Gruppe gestatten, und begründete gleichzeitig (Dec. 1872) eine vollständige Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen, sowie (1878) eine Invariantentheorie der Gruppe aller Punkttransformationen. In den Jahren 1879—83 haben Laguerre und Halphen eine Invariantentheorie für eine andere wichtige unendliche Gruppe entwickelt. Endlich skizzierte Lie (1882—84) eine allgemeine Invariantentheorie aller continuierlichen Gruppen. Seit 1885 beschäftigen sich viele englische Mathematiker mit der Berechnung von Differentialinvarianten, ohne doch ihre Theorie erheblich zu fördern. Dagegen haben in den letzten Jahren mehrere französische Mathematiker nicht unwichtige Beiträge zu dieser Theorie geliefert.

stehen und drittens projectiv sind, alsdann die durch $(r-1)$-malige Erweiterung entstehenden Gleichungen

$$(5) \qquad U_i^{r-1}f = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots r)$$

von einander unabhängig sind und ein r-gliedriges vollständiges System in den $r+1$ Veränderlichen $x, y, y' \ldots y^{(r-1)}$ bilden, folglich auch gerade eine Lösung J_{r-1} besitzen. Jener Beweis gilt nun auch, wenn die dritte Voraussetzung, dass die $U_i f$ projectiv seien, fallen gelassen wird, dagegen aber der Hauptsatz allgemein als bewiesen angenommen wird, dass nämlich unter den beiden übrigen Voraussetzungen die $U_i f$ eine r-gliedrige Gruppe G_r erzeugen. Denn: Sind die Gleichungen (5) von einander abhängig, so bilden sie, da aus (4) und aus Formel (3) des § 1

$$(U_i^{r-1} U_k^{r-1}) \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} U_s^{r-1} f$$

folgt, ein höchstens $(r-1)$-gliedriges vollständiges System in $r+1$ Veränderlichen und haben somit mindestens zwei von einander unabhängige Lösungen u, v, die Functionen von $x, y, y' \cdot \cdot y^{(r-1)}$ allein sind. Alsdann sei

$$y - \psi(x) = 0$$

eine Curve, welche keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_i U_i f$ zulässt. Es lässt sich voraussetzen, dass weder u noch v gleich Constans wird, wenn darin

$$y = \psi(x), \quad y' = \psi'(x), \quad \cdot \cdot y^{(r-1)} = \psi^{r-1}(x)$$

gesetzt wird. Dann kann $\Omega(u)$ stets so als Function von u gewählt werden, dass die Curve $y = \psi(x)$ zu den Integralcurven der Differentialgleichung

$$v - \Omega(u) = 0$$

gehört. Diese Gleichung aber ist von höchstens $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und besitzt demnach höchstens ∞^{r-1} Integralcurven. Da u und v bei den $\Sigma e_i U_i f$ und den von ihnen erzeugten ∞^r endlichen Transformationen der Gruppe G_r invariant sind, so ist

$$v - \Omega(u) = 0$$

eine bei diesen ebenfalls invariante Differentialgleichung. Ihre höchstens ∞^{r-1} Integralcurven bilden mithin eine invariante Schar, der die Curve $y = \psi(x)$ angehört. Nach Satz 7 aber geht diese Curve bei allen Transformationen der G_r in ∞^r Lagen über, und dies ist ein Widerspruch.

Also sind die Gleichungen (5) von einander unabhängig: Sie

bilden ein r-gliedriges vollständiges System mit nur einer Lösung J_{r-1}, die, wie bemerkt, auch von $y^{(r-1)}$ frei sein kann.

Das aus den λ-mal erweiterten infinitesimalen Transformationen gebildete Gleichungensystem

$$(7) \qquad U_i^\lambda f = 0 \quad (i = 1, 2 \cdot \cdot r)$$

kann, wenn $\lambda < r - 1$ ist, auch Lösungen haben, die aber offenbar auch das System (5) erfüllen, also sich auf J_{r-1} reducieren. Ist z. B. J_{r-1} von $y^{(r-1)}$ frei, so hat das vorliegende System auch für $\lambda = r - 2$ die Lösung J_{r-1}. Es existiert also nur eine Differentialinvariante J_{r-1} von niederer als r^{ter} Ordnung. Das System (7) ist für $\lambda = r + 1$ ein r-gliedriges vollständiges System in $r + 2$ Veränderlichen $x, y \cdot \cdot y^{(r)}$ und hat somit nur zwei von einander unabhängige Lösungen, als deren eine J_{r-1} gewählt werden kann, während die andere, J_r, sicher $y^{(r)}$ enthält. Für $\lambda = r + 2$ stellt (7) ein r-gliedriges vollständiges System in $r + 3$ Veränderlichen vor, das also drei von einander unabhängige Lösungen besitzt, nämlich J_{r-1}, J_r und eine $y^{(r+2)}$ enthaltende Lösung J_{r+2}. So kann man weiterschliessen. Es ergiebt sich also:

Satz 8: *Nimmt man das Theorem 22 auch für nicht-projective Gruppen der Ebene als bewiesen an, so folgt: Eine r-gliedrige Gruppe $U_1 f \cdot \cdot \cdot U_r f$ der Ebene besitzt nur eine Differentialinvariante J_{r-1} von niederer als r^{ter} Ordnung. Ferner besitzt sie je eine Differentialinvariante J_r, $J_{r+1} \cdot \cdot$ von gerade r^{ter}, $(r+1)^{\text{ter}} \cdot \cdot \cdot$ Ordnung derart, dass jede Differentialinvariante $(r+s)^{\text{ter}}$ Ordnung eine beliebige Function von J_{r-1}, J_r, $J_{r+1} \cdot \cdot J_{r+s}$ ist. J_{r-1} kann auch von niederer als $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein.*

Ableitung der höheren Differentialinvarianten durch Differentiation.

Es ist leicht zu erkennen, dass man J_{r+1}, $J_{r+2} \cdot \cdot$ durch Differentiationsprocesse allein angeben kann, sobald man J_{r-1} und J_r kennt. Denn da J_{r-1} und J_r Differentialinvarianten sind, so bleibt die Differentialgleichung

$$J_r - a J_{r-1} - b = 0$$

ebenfalls bei der Gruppe invariant. Es ist dies eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung mit ∞^r Integralcurven, deren Schar invariant ist. Geben wir der Zahl b einen anderen Wert, so erhalten wir eine andere invariante Curvenschar. Wird b variiert, so entstehen also ∞^1 Scharen von je ∞^r Curven, sodass jede Schar durch die Transformationen der Gruppen in sich übergeführt wird. Also ist auch die Gesamtheit aller dieser ∞^{r+1} Curven bei der Gruppe invariant. Ihre Differentialgleichung ergiebt sich, indem wir durch Differentiation aus der obigen b entfernen, in der Gestalt:

$$\frac{dJ_r}{dx} - a\frac{dJ_{r-1}}{dx} = 0.$$

Hierin ist die Differentiation nach x total, also $\frac{dy}{dx} = y'$ u. s. w. anzunehmen. Jede Differentialgleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\frac{\frac{dJ_r}{dx}}{\frac{dJ_{r-1}}{dx}} = a$$

ist mithin invariant, wie auch die Zahl a gewählt sein mag. Mithin ist die linke Seite für sich invariant, d. h. es ist jener Bruch oder also

$$\frac{dJ_r}{dJ_{r-1}}$$

eine Differentialinvariante $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sodass

$$J_{r+1} \equiv \frac{dJ_r}{dJ_{r-1}}$$

gesetzt werden darf. Analog kann

$$J_{r+2} \equiv \frac{dJ_{r+1}}{dJ_{r-1}} \equiv \frac{\frac{d^2J_r}{dx^2}}{\frac{d^2J_{r-1}}{dx^2}}$$

allgemein

$$J_{r+p} \equiv \frac{dJ_{r+p-1}}{dJ_{r-1}} \equiv \frac{\frac{d^pJ_r}{dx^p}}{\frac{d^pJ_{r-1}}{dx^p}}$$

gesetzt werden.

Satz 9: *Kennt man von den in Satz 8 erwähnten Differentialinvarianten die beiden ersten J_{r-1} und J_r, so kennt man sofort alle. Es darf nämlich gesetzt werden:*

$$J_{r+1} \equiv \frac{dJ_r}{dJ_{r-1}}, \quad J_{r+2} \equiv \frac{dJ_{r+1}}{dJ_{r-1}}, \cdots$$

oder allgemein

$$J_{r+p} \equiv \frac{\frac{d^pJ_r}{dx^p}}{\frac{d^pJ_{r-1}}{dx^p}} \equiv \frac{d^pJ_r}{d^pJ_{r-1}}.$$

1. Beispiel: Die ∞^2 infinitesimalen Transformationen: Beispiele.

$$(e_1 + e_2x + e_3x^2)q,$$

die aus q, xq, x^2q linear ableitbar sind, erzeugen, wie man leicht bestätigt, eine dreigliedrige Gruppe. x wird nämlich gar nicht transformiert, während y immer um $(e_1 + e_2x + e_3x^2)\delta t$ wächst, sodass die erzeugten endlichen Transformationen lauten:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y + c_1 + c_2 x + c_3 x^2,$$

und dies ist eine Gruppe. Ferner ist hier $(q, xq) \equiv 0$, $(q, x^2 q) \equiv 0$, $(xq, x^2 q) \equiv 0$, also der Hauptsatz erfüllt. Endlich ist $r = 3$. Um die beiden ersten Differentialinvarianten J_2 und J_3 zu erhalten, bilden wir durch dreimaliges Erweitern von q, xq, $x^2 q$ die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial y} - 2x \frac{\partial f}{\partial y'} - 2 \frac{\partial f}{\partial y''} = 0.$$

Offenbar ist die von y''' freie J_2 gleich x zu setzen und J_3 gleich y'''. So kommt:

$$J_2 \equiv x, \quad J_3 \equiv y''', \quad J_4 \equiv \frac{dy'''}{dx} \equiv y^{\mathrm{IV}},$$

$$J_5 \equiv \frac{dy^{\mathrm{IV}}}{dx} \equiv y^{\mathrm{V}}, \; \cdots \; J_n \equiv y^{(n)}.$$

Die Differentialinvariante J_2 ist nicht von zweiter, sondern nur von 0ter Ordnung.

2. Beispiel: Bei der dreigliedrigen Gruppe der Bewegungen fanden wir in § 3 des 4. Kap. die Differentialinvariante:

$$J_2 \equiv \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und als allgemeinste invariante Differentialgleichung 3. O. diese:

$$\Omega\left(\frac{1}{r}, \; \frac{dr}{ds}\right) = 0,$$

wo r den Krümmungsradius, also $\frac{1}{J_2}$, und ds das Bogenelement $\sqrt{1 + y'^2}\, dx$ bedeutet. Also ist auch $\frac{dr}{ds}$ oder $\frac{d\frac{1}{J_2}}{ds}$, d. h. $-\frac{1}{J_2^2}\frac{dJ_2}{ds}$ Differentialinvariante dritter Ordnung. Da J_2 selbst schon invariant ist, kann also

$$J_3 \equiv \frac{dJ_2}{ds} \equiv \frac{y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^3}$$

gesetzt werden. Nun ist nach Satz 9:

$$J_4 \equiv \frac{dJ_3}{dJ_2} \equiv \frac{\frac{d^2 J_2}{dx^2}}{\frac{dJ_2}{dx}} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dx}} - \frac{\frac{d^2 s}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}$$

u. s. w.

Schliesslich soll noch erwähnt werden, dass der Hauptsatz der Gruppentheorie auch für *die projectiven Gruppen der Geraden* gilt, doch können wir dies nicht wie die Übertragung anderer Sätze in der zum Schluss des 7. Kapitels angegebenen Weise thun, weil sich dadurch keine *projectiven* Gruppen der Ebene ergeben würden. Wir schliessen vielmehr so:

Der Hauptsatz für die projectiven Gruppen der Geraden.

Jeder r-gliedrigen derartigen Gruppe G_r entspricht eine r-gliedrige Untergruppe Γ_r der speciellen linearen homogenen Gruppe der Ebene, wie an mehreren Stellen des Kap. 5 ausgeführt wurde. Ist

$$U_i f \equiv (c_i - 2a_i x - b_i x^2)p$$

eine infinitesimale Transformation von G_r, so ist nach der Schlussbemerkung des Kap. 5:

$$V_i f \equiv (a_i x + b_i y)p + (c_i x - a_i y)q$$

die entsprechende infinitesimale Transformation der Gruppe Γ_r. Für letztere aber gilt der Hauptsatz. Sind also $V_1 f \cdots V_r f$ $(r \leq 3)$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe Γ_r, so ist jedes

$$(V_i V_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} V_s f.$$

Man kann sich nun durch Ausrechnung davon überzeugen, dass die infinitesimale Transformation Uf der Gruppe G_r, welche der infinitesimalen Transformation $(V_i V_k)$ der Gruppe Γ entspricht, mit $(U_i U_k)$ identisch ist. Daraus folgt dann sofort, dass auch

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f$$

sein muss.

Wenn umgekehrt $U_1 f \cdots U_r f$ $(r \leq 3)$ unabhängige infinitesimale projective Transformationen der Geraden sind, für die

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f$$

ist, so ist auch entsprechend

$$(V_i V_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} V_s f,$$

d. h. $V_1 f \cdots V_r f$ erzeugen eine r-gliedrige projective Gruppe Γ_r der Ebene. Ihr entspricht eine r-gliedrige projective Gruppe G_r der Geraden, welche die r infinitesimalen Transformationen $U_1 f \cdots U_r f$ enthält und also von ihnen erzeugt wird.

Natürlich sind hierbei unter Gruppen immer endliche continuierliche Gruppen mit paarweis inversen Transformationen zu verstehen.

Wir können also sagen:

Satz 10: *Das Theorem 22, d. h. der Hauptsatz der Gruppentheorie, gilt auch für die projectiven Gruppen der Geraden.*

Beispiel: Bestimmung der proj. Gruppen der Geraden.

Beispiel: Als Anwendung hierzu wollen wir die früher in einer Fussnote (in § 2 des 5. Kap.) versprochene Bestimmung der Gruppen der Geraden durchführen. Die dreigliedrige Gruppe ist die bekannte:

$$\boxed{p \quad xp \quad x^2p}\,.$$

Es handelt sich um die Bestimmung ihrer Untergruppen.

Ist Uf, Vf eine zweigliedrige Untergruppe derselben, so sind alle $a\,Uf + b\,Vf$ infinitesimale Transformationen dieser Untergruppe, und unter diesen giebt es offenbar sicher eine, die nur einen (doppeltzählenden) Punkt in Ruhe lässt. Durch Ausführung einer passenden projectiven Transformation der Geraden, welche die Untergruppe in eine gleichberechtigte verwandelt, lässt sich diese infinitesimale Transformation, wir wir wissen, in p überführen. Es seien also:

$$p, \quad \lambda p + \mu xp + \nu x^2p$$

zwei infinitesimale Transformationen der Untergruppe. Offenbar darf $\lambda = 0$ gesetzt werden. Ferner giebt die Klammeroperation $\mu p + 2\nu xp$. Diese muss sich aus den beiden obigen linear ableiten lassen:

$$\mu p + 2\nu xp \equiv c_1 p + c_2(\mu xp + \nu x^2p).$$

Daher ist

$$\mu = c_1, \quad 2\nu = c_2\mu, \quad 0 = c_2\nu.$$

Ist $c_2 \neq 0$, so ist also $\nu = 0$ und $\mu = 0$, was ausgeschlossen ist. Folglich muss $c_2 = 0$ sein, also auch $\nu = 0$, so dass als einziger Typus kommt — da dann $\mu = 1$ gesetzt werden kann:

$$\boxed{p, \quad xp}\,.$$

Die Bestimmung der eingliedrigen Untergruppen

$$\boxed{p} \qquad \boxed{xp}$$

geschieht wie früher. (Vgl. §§ 1 u. 2 des Kap. 5.)

Kapitel 10.

Curvenscharen, die eine Gruppe gestatten. — Die Dualität.

Im vorigen Kapitel haben wir Scharen von ∞^r Curven ins Auge gefasst, welche eine r-gliedrige projective Gruppe gestatteten. Doch geschah dies nur in Form einer gelegentlichen Hülfsbetrachtung.

Nunmehr werden wir genauer auf Scharen von Curven zu sprechen kommen, die irgend eine — also nicht gerade notwendig eine projective — Gruppe zulassen. Alsdann werden uns die gewonnenen Anschauungen zu dem für die projectiven Gruppen wichtigen Begriff der Dualität führen.

§ 1. Die Gruppe der Parameter einer bei einer Gruppe invarianten Curvenschar.

Schar von ∞^m Curven.

Eine Gleichung

$$\Omega(x, y, a_1 \cdot \cdot a_m) = 0, \tag{1}$$

in der m Parameter $a_1 \cdot \cdot a_m$ auftreten, stellt unendlich viele Curven dar und zwar gerade ∞^m von einander verschiedene, wenn alle m Parameter *wesentlich* sind. Um bei vorgelegter Gleichung (1) zu entscheiden, ob alle Parameter wesentlich sind oder nicht, setzen wir an:

$$\Omega(x, y, a_1 \cdot \cdot a_m) = 0$$

und

$$\Omega(x, y, b_1 \cdot \cdot b_m) = 0$$

und fragen uns, welche Functionen $b_1 \cdot \cdot b_m$ von $a_1 \cdot \cdot a_m$ allein sein müssen, damit die zweite Gleichung eine Folge der ersten wird für jedes x. Zu diesem Zweck werden wir aus der zweiten Gleichung vermöge der ersten y eliminieren und dadurch eine Relation

$$w(x, a_1 \cdot \cdot a_m, b_1 \cdot \cdot b_m) = 0$$

erhalten, die wegen der Veränderlichkeit von x in eine Anzahl von Gleichungen zerfallen kann, die von x frei sind. Lassen sich alle diese nur durch

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \quad \cdot \cdot b_m = a_m$$

und keine anderen von x freien Werte der b erfüllen, so sind alle m Parameter in der Curvenschar (1) wesentlich. Ebenso, wenn es zwar mehrere, ja sogar, wenn es unendlich viele Wertsysteme der $b_1 \cdot \cdot b_m$ giebt, welche die Relationen erfüllen, wenn nur diese Wertsysteme keine continuierliche Schar bilden, sondern discret verteilt sind. Bilden

sie jedoch eine continuierliche Schar, so sind die m Parameter nicht sämtlich wesentlich, weil es dann eine continuierliche Schar von Wertsystemen $a_1 \cdots a_m$ giebt, die alle ein und dieselbe Curve (1) liefern. Solche Scharen von Wertsystemen werden definiert durch gewisse Gleichungen:

$$\varphi_1(a_1 \cdots a_m) = \alpha_1, \quad \cdots \varphi_\mu(a_1 \cdots a_m) = \alpha_\mu, \quad (\mu < m),$$

die also bei bestimmter Wahl von $\alpha_1 \cdots \alpha_\mu$ alle Wertsysteme $a_1 \cdots a_m$ angeben, denen dieselbe Curve zukommt. Mit Hülfe derselben lassen sich μ Grössen a, sagen wir $a_1 \cdots a_\mu$, als Functionen der übrigen $a_{\mu+1} \cdots a_m$ und der $\alpha_1 \cdots \alpha_\mu$ darstellen, sodass $\Omega = 0$ in einer Form:

$$W(x, y, \alpha_1 \cdots \alpha_\mu, \quad a_{\mu+1} \cdots a_m) = 0$$

geschrieben werden kann, die nun für alle Werte von $a_{\mu+1} \cdots a_m$ bei festgehaltenen $\alpha_1 \cdots \alpha_\mu$ dieselbe Curve darstellen muss und mithin frei von $a_{\mu+1} \cdots a_m$ ist. Unsere Curvenschar lässt sich alsdann durch eine Gleichung

$$W(x, y, \alpha_1 \cdots \alpha_\mu) = 0$$

darstellen, die nur μ $(< m)$ Parameter enthält.

Transformation, ausgeführt auf eine Curvenschar.

Es möge vorausgesetzt werden, dass in

$$(1) \qquad \Omega(x, y, a_1 \cdots a_m) = 0$$

alle m Parameter $a_1 \cdots a_m$ wesentlich seien. Üben wir alsdann auf die Schar der ∞^m Curven (1) eine vorgelegte Punkttransformation

$$(2) \qquad x_1 = \varphi(x, y), \quad y_1 = \psi(x, y)$$

aus, so geht sie über in eine neue Schar von ∞^m Curven, deren Gleichung

$$\Omega_1(x_1, y_1, a_1 \cdots a_m) = 0$$

durch Elimination von x und y aus (1) vermöge (2) gewonnen wird. Alle diese neuen Curven gehören der ursprünglichen Schar (1) dann und nur dann an, wenn sich die erhaltene Gleichung auch so schreiben lässt:

$$(3) \qquad \Omega(x_1, y_1, a_1' \cdots a_m') = 0.$$

Alsdann wird jede zu einem Wertsystem $a_1 \cdots a_m$ gehörige Curve (1) in eine bestimmte Curve (3) übergeführt, d. h. $a_1' \cdots a_m'$ sind gewisse Functionen von $a_1 \cdots a_m$:

$$a_1' = A_1(a_1 \cdots a_m), \quad \cdots a_m' = A_m(a_1 \cdots a_m)$$

und zwar offenbar von einander unabhängige Functionen von $a_1 \cdots a_m$.

Die Schar (1) *von* ∞^m *Curven gestattet also die vorgelegte Trans-*

formation (2) *oder wird durch diese in sich übergeführt dann und nur dann, wenn es solche Functionen* $A_1 \cdot\cdot A_m$ *von* $a_1 \cdot\cdot a_m$ *giebt, dass die Gleichung* (1) *vermöge:*

$$(4)\ x_1 = \varphi(x, y),\ y_1 = \psi(x, y),\ a_1' = A_1(a_1 \cdot\cdot a_m),\ \cdot\cdot\ a_m' = A_m(a_1 \cdot\cdot a_m)$$

in die Gleichung (3) *übergeht, wenn also die Gleichung* (1), *aufgefasst als Gleichung zwischen* $m + 2$ *Veränderlichen* $x, y, a_1 \cdot\cdot a_m$, *die Transformation* (4) *gestattet, welche* $x, y, a_1 \cdot\cdot a_m$ *in* $x_1, y_1, a_1' \cdot\cdot a_m'$ *verwandelt.*

Die durch Elimination von $x, y, a_1 \cdot\cdot a_m$ aus (1) vermöge (4) hervorgehende Gleichung braucht übrigens nicht direct die Form (3) zu haben, sondern ist unter Umständen erst umzuformen.

Gruppe, ausgeführt auf eine Curvenschar.

Liegt nun nicht eine einzelne Transformation (2), sondern eine r-gliedrige *Transformationsgruppe:*

$$(5) \qquad x_1 = \varphi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r), \quad y_1 = \psi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r)$$

vor, so gestattet die Curvenschar (1) diese Gruppe, d. h. jede Transformation der Gruppe, wenn sich für jedes Wertsystem der Constanten $e_1 \cdot\cdot e_r$ solche Functionen

$$a_1' = A_1(a_1 \cdot\cdot a_m) \cdots a_m' = A_m(a_1 \cdot\cdot a_m)$$

angeben lassen, wie oben. Im allgemeinen werden dann aber die $A_1 \cdot\cdot A_m$ verschiedene Functionen sein für verschiedene Wertsysteme $e_1 \cdot\cdot e_r$, sie werden mit anderen Worten auch von $e_1 \cdot\cdot e_r$ abhängen. Also:

Satz 1: *Die Schar von* ∞^m *Curven*

$$\Omega(x, y, a_1 \cdot\cdot a_m) = 0$$

gestattet dann und nur dann die r*-gliedrige Gruppe*

$$x_1 = \varphi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r), \quad y_1 = \psi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r),$$

wenn es solche Functionen $A_1 \cdot\cdot A_m$ *von* $a_1 \cdot\cdot a_m$ *und* $e_1 \cdot\cdot e_r$ *giebt, dass die Gleichung*

$$\Omega(x, y, a_1 \cdot\cdot a_m) = 0$$

zwischen den $m + 2$ *Veränderlichen* $x, y, a_1 \cdot\cdot a_m$ *alle Transformationen:*

$$(6) \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r), & y_1 = \psi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r), \\ a_1' = A_1(a_1 \cdot\cdot a_m; e_1 \cdot\cdot e_r), & \cdots a_m' = A_m(a_1 \cdot\cdot a_m, e_1 \cdot\cdot e_r) \end{cases}$$

dieser $m + 2$ *Veränderlichen zulässt.*

Beispiel.

Beispiel: Die Schar aller ∞^3 Kreise:

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + a_3 = 0$$

gestattet, wie geometrisch einleuchtet, die zweigliedrige Gruppe aller Translationen

$$x_1 = x + e_1, \quad y_1 = y + e_2.$$

Zum analytischen Nachweise suchen wir a_1', a_2', a_3' so als Functionen von a_1, a_2, a_3 und e_1, e_2 zu bestimmen, dass

$$(x_1 - a_1')^2 + (y_1 - a_2')^2 + a_3' = 0$$

oder

$$(x + e_1 - a_1')^2 + (y + e_2 - a_2')^2 + a_3' = 0$$

eine Folge der obigen Kreisgleichung wird für jedes Wertepaar x, y. Es kommen die Bedingungen:

$$a_1' - e_1 = a_1, \quad a_2' - e_2 = a_2, \quad a_3' = a_3,$$

d. h.

$$a_1' = a_1 + e_1, \quad a_2' = a_2 + e_2, \quad a_3' = a_3.$$

Die Kreisgleichung:

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + a_3 = 0$$

gestattet demnach in der That die Transformationen:

$$x_1 = x + e_1, \quad y_1 = y + e_2, \quad a_1' = a_1 + e_1, \quad a_2' = a_2 + e_2, \quad a_3' = a_3,$$

die eine einfache geometrische Deutung haben.

Die Gleichungen (6) stellen sicher ∞^r verschiedene Transformationen dar, da schon die beiden ersten Gleichungen ∞^r verschiedene Transformationen ausdrücken.

Transformationen der Parameter.

Ferner stellen die Gleichungen

$$(7) \qquad a_1' = A_1(a_1 \cdots a_m, e_1 \cdots e_r), \quad \cdots a_m' = A_m(a_1 \cdots a_m, e_1 \cdots e_r)$$

für sich eine Schar von Transformationen von $a_1 \cdots a_m$ in $a_1' \cdots a_m'$ dar, allerdings nicht gerade notwendig auch ∞^r verschiedene, sondern möglicherweise weniger. Charakterisieren wir eine einzelne Curve (1) durch ihr Wertsystem $a_1 \cdots a_m$, so geben die Gleichungen (7) an, in welche Curve $(a_1' \cdots a_m')$ die Curve $(a_1 \cdots a_m)$ durch die Transformation (5) der Gruppe übergeht, welche alle ∞^m Curven unter einander vertauscht.

Wir wollen diese Transformationen (7) symbolisch mit S_e, $S_{e'} \cdots$ bezeichnen, sodass S_e die zu $e_1 \cdots e_r$, $S_{e'}$ die zu $e_1' \cdots e_r'$ gehörige bedeutet. Andererseits seien T_e, $T_{e'} \cdots$ die Transformationen der vorgelegten r-gliedrigen Gruppe (5). Zu jeder T_e gehört dann eine ganz bestimmte S_e. Führen wir T_e auf alle Punkte der Ebene aus, so heisst dies analytisch, es wird die Transformation S_e auf die Grössen $a_1 \cdots a_m$ oder auf die ∞^m Curven $(a_1 \cdots a_m)$ ausgeführt.

Da die T_e, $T_{e'} \cdots$ eine Gruppe bilden, so ist:

$$T_e T_{e'} = T_\varepsilon,$$

und hier bedeuten $\varepsilon_1 \cdot\cdot \varepsilon_r$ gewisse Functionen von $e_1 \cdot\cdot e_r$ und $e_1' \cdot\cdot e_r'$. Wenn T_e, $T_{e'}$ nach einander ausgeführt werden, so kommt dies darauf hinaus, dass S_e, $S_{e'}$ nach einander auf die Curven $(a_1 \cdot\cdot a_m)$ ausgeübt werden. Die Aufeinanderfolge deckt sich geometrisch damit, dass T_ε auf alle Punkte oder also S_ε auf die Grössen $a_1 \cdot\cdot a_m$ ausgeführt wird. Es ist daher auch

$$S_e S_{e'} = S_\varepsilon,$$

mit anderen Worten: *Die Transformationen* (7) *bilden eine Gruppe in den m Veränderlichen* $a_1 \cdot\cdot a_m$*).

Gruppe dieser Transformationen der Parameter.

Sie enthält die Parameter $e_1 \cdot\cdot e_r$, die — wie schon bemerkt — in ihr nicht sämtlich wesentlich zu sein brauchen. Wir können uns eine begriffliche Vorstellung von dieser Gruppe (7) machen, wenn wir nicht die ∞^2 Punkte (x, y) der Ebene, sondern die ∞^m Curven $(a_1 \cdot\cdot a_m)$ der Schar (1) als Individuen auffassen (sie etwa in einem Raum von m Dimensionen durch die Punkte mit den Coordinaten $a_1 \cdot\cdot a_m$ abbilden). Die Transformationen (7) geben dann an, wie diese Individuen bei der Gruppe (5) unter einander vertauscht werden. Dass sie eine Gruppe bilden, erscheint dann ziemlich selbstverständlich. Da nun aus

$$T_e T_{\bar{e}} = 1$$

folgen würde, dass $S_e S_{\bar{e}}$ die Curven gar nicht transformierte, d. h. $a_1 \cdot\cdot a_m$ ungeändert liesse, so ist dann auch

$$S_e S_{\bar{e}} = 1$$

zu setzen. Wir sagen nun:

Satz 2: *Gestattet die Schar von ∞^m Curven*

$$\Omega(x, y, a_1 \cdot\cdot a_m) = 0$$

die r-gliedrige Gruppe

$$x_1 = \varphi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r), \quad y_1 = \psi(x, y, e_1 \cdot\cdot e_r)$$

mit paarweis inversen Transformationen, und führt die allgemeine Transformation $(e_1 \cdot\cdot e_r)$ *der Gruppe die Curve* $(a_1 \cdot\cdot a_m)$ *in die Curve* $(a_1' \cdot\cdot a_m')$ *über, so sind* $a_1' \cdot\cdot a_m'$ *gewisse Functionen* $A_1 \cdot\cdot A_m$ *von* $a_1 \cdot\cdot a_m$ *und* $e_1 \cdot\cdot e_r$, *und die Gleichungen*

$$a_1' = A_1(a_1 \cdot\cdot a_m, e_1 \cdot\cdot e_r), \quad \cdots a_m' = A_m(a_1 \cdot\cdot a_m, e_1 \cdot\cdot e_r)$$

---

*) Wir haben zwar Gruppen in m Veränderlichen noch nicht eingeführt, es wird aber die hier betrachtete Gruppe durch die obigen Überlegungen genügend definiert.

stellen eine höchstens r-gliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen in den m Veränderlichen $a_1 \cdots a_m$ *dar.*

Ferner bilden dann die Gleichungen:

$$x_1 = \varphi(x, y, e_1 \cdots e_r), \quad y_1 = \psi(x, y, e_1 \cdots e_r),$$

$$a_1' = A_1(a_1 \cdots a_m, e_1 \cdots e_r), \quad \cdots a_m' = A_m(a_1 \cdots a_m, e_1 \cdots e_r)$$

ebenfalls eine Gruppe mit paarweis inversen Transformationen und zwar eine r-gliedrige in den $m + 2$ *Veränderlichen* $x, y, a_1 \cdots a_m$.

Das zuletzt Gesagte ist leicht einzusehen und braucht wohl hier nicht noch bewiesen zu werden. Es folgt ja unmittelbar aus der analytischen Fassung des Gruppenbegriffes.

Wir nennen die Gruppe (7) der $a_1 \cdots a_r$ die *Gruppe der Parameter* der bei (5) invarianten Curvenschar (1).

Beispiele.

1. Beispiel: Wir führten oben auf die Kreisschar

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + a_3 = 0$$

die zweigliedrige Gruppe

$$x_1 = x + e_1, \quad y_1 = y + e_2$$

aus und erhielten:

$$a_1' = a_1 + e_1, \quad a_2' = a_2 + e_2, \quad a_3' = a_3.$$

Offenbar stellen diese Gleichungen eine zweigliedrige Gruppe in den Veränderlichen a_1, a_2, a_3 mit den Parametern e_1, e_2 dar. Auch die Gleichungen:

$$x_1 = x + e_1, \quad y_1 = y + e_2, \quad a_1' = a_1 + e_1, \quad a_2' = a_2 + e_2, \quad a_3' = a_3$$

bilden eine zweigliedrige Gruppe in den Veränderlichen x, y, a_1, a_2, a_3.

2. Beispiel: Die Schar aller ∞^2 Kreise mit dem Radius 1:

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 - 1 = 0$$

bleibt offenbar invariant bei der dreigliedrigen Gruppe aller Bewegungen:

$$x_1 = x \cos e_1 - y \sin e_1 + e_2, \quad y_1 = x \sin e_1 + y \cos e_1 + e_3.$$

Hier ergiebt sich, wie der Leser ausrechnen möge,

$$a_1' = a_1 \cos e_1 - a_2 \sin e_1 + e_2, \quad a_2' = a_1 \sin e_1 + a_2 \cos e_1 + e_3.$$

Diese Gleichungen bilden offenbar eine Gruppe, denn sie haben genau die Form der Gruppe der Bewegungen.

3. Beispiel: Die Schar der ∞^2 Parabeln

$$y^2 - a_1 x - a_2 = 0$$

gestattet alle Transformationen der dreigliedrigen Gruppe

$$x_1 = e_1 x + e_2, \quad y_1 = e_3 y,$$

denn man kann a_1', a_2' so als Functionen von a_1, a_2, e_1, e_2, e_3 bestimmen, dass

$$y_1^2 - a_1' x_1 - a_2' = 0$$

oder also

$$e_3^2 y^2 - a_1'(e_1 x + e_2) - a_2' = 0$$

ist vermöge $y^2 = a_1 x + a_2$. Es kommt nämlich:

$$e_3^2 a_1 - a_1' e_1 = 0, \quad e_3^2 a_2 - a_1' e_2 - a_2' = 0,$$

also:

$$a_1' = \frac{e_3^2}{e_1} a_1, \quad a_2' = e_3^2 a_2 - \frac{e_2 e_3^2}{e_1} a_1.$$

Es ist dies eine dreigliedrige Gruppe in den beiden Veränderlichen a_1, a_2.

Im Anschluss hieran sei ein Satz eingeschaltet, der erst später benutzt werden wird: Liegt eine Schar von ∞^1 Curven vor, so haben wir in Satz 2 nur *eine* Gleichung

$$a' = A(a, e_1 \ldots e_r).$$

Geben wir a einen bestimmten Wert, d. h. wählen wir eine Curve aus, und setzen wir dann $a' = a$, so liegt eine Gleichung zwischen $e_1 \ldots e_r$ vor. Jede Transformation der gegebenen Gruppe, der solche Werte $e_1 \ldots e_r$ zugehören, die dieser Gleichung genügen, führt die ausgewählte Curve in sich über. Die obige Gleichung bestimmt aber ∞^{r-1} Wertsysteme $(e_1 \ldots e_r)$. Also gestattet eine einzelne Curve der Schar von ∞^1 Curven sicher mindestens ∞^{r-1} Transformationen der Gruppe.

Also können wir sagen:

Satz 3: *Gestattet eine Schar von ∞^1 Curven der Ebene eine r-gliedrige Gruppe der Ebene, so bleibt jede einzelne Curve der Schar bei mindestens ∞^{r-1} Transformationen der Gruppe invariant.*

Wie gesagt, werden wir diesen Satz erst später anwenden.

Jeder Transformation T der r-gliedrigen Gruppe (5) entspricht eine bestimmte Transformation der Gruppe (6) und umgekehrt. Hieraus ziehen wir einen Schluss: Wir wissen, dass die ∞^r Transformationen der Gruppe (5) sich in ∞^{r-1} eingliedrige Untergruppen anordnen lassen. Den ∞^1 Transformationen einer dieser eingliedrigen Gruppen entsprechen gewisse ∞^1 Transformationen der Gruppe (6) und diese müssen ebenso wie jene eine eingliedrige Gruppe bilden, d. h. sie werden von einer *infinitesimalen* Transformation erzeugt.

Inf. Transf. der Coord. und Parameter.

Es besitzt demnach die Gruppe (6) auch ∞^{r-1} infinitesimale Transformationen, die, wie man sofort sieht, sämtlich von einander verschieden sind. Wenn nämlich

$$U_i f \equiv \xi_i(x, y)p + \eta_i(x, y)q$$
$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe (5) sind, so erteilen die entsprechenden r infinitesimalen Transformationen $V_i f$ der Gruppe (6) in den Veränderlichen $x, y, a_1 \ldots a_m$ den beiden ersten dieser Veränderlichen, nämlich x, y, dieselben Incremente wie die $U_i f$. Es hat daher $V_i f$ die Form:

$$V_i f \equiv \xi_i(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_{i1}(a_1 \ldots a_m)\frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + \alpha_{im}(a_1 \ldots a_m)\frac{\partial f}{\partial a_m}$$
$$(i = 1, 2 \ldots r).$$

Hier sind die Functionen $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$ frei von x, y, wie sofort aus der Form der Gleichungen (6) erhellt. Weil nun keine Relation

$$\Sigma \text{ Const. } U_i f \equiv 0$$

besteht, so besteht auch keine Relation

$$\Sigma \text{ Const. } V_i f \equiv 0.$$

$V_1 f \ldots V_r f$ sind demnach auch von einander unabhängig. Mithin giebt es ∞^{r-1} verschiedene infinitesimale Transformationen Σ Const. $V_i f$, welche der Gruppe (6) angehören.

Andererseits ist auch klar, dass die Gruppe (6) nicht mehr infinitesimale Transformationen enthält als die Gruppe (5). Sie enthält also gerade ∞^{r-1}.

Bedingungen für die inf. Transf. der Coord. u. Param.

Die infinitesimalen Transformationen $V_i f$ der Gruppe (6) müssen natürlich die Gleichung

$$\Omega(x, y, a_1 \ldots a_m) = 0$$

invariant lassen, der Function Ω also Incremente erteilen, die vermöge $\Omega = 0$ verschwinden. Es muss daher

$$(8) \qquad V_i \Omega \equiv \xi_i \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \alpha_{i1}\frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + \cdots + \alpha_{im}\frac{\partial \Omega}{\partial a_m} = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

sein vermöge $\Omega = 0$. Wie man diese Bedingungen verwerten kann, um die $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$, d. h. die $V_i f$ zu berechnen, soll zunächst an einem Beispiel gezeigt werden.

Beispiel.

Beispiel: Die Parabelschar

$$y^2 - a_1 x - a_2 = 0$$

gestattet, wie oben bemerkt wurde, die dreigliedrige Gruppe

(5′) $$x_1 = e_1 x + e_2, \quad y_1 = e_3 y.$$

Hier ergab sich als Gruppe (6) diese:

(6′) $$x_1 = e_1 x + e_2, \quad y_1 = e_3 y, \quad a_1' = \frac{e_3^2}{e_1} a_1, \quad a_2' = e_3^2 a_2 - \frac{e_2 e_3^2}{e_1} a_1.$$

(5′) giebt $U_1 f$ und also (6′) das zugehörige $V_1 f$, wenn $e_1 = 1 + \delta t$, $e_2 = 0$, $e_3 = 1$ gesetzt wird, in der Form:

$$U_1 f \equiv xp, \quad V_1 f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1}.$$

$U_2 f$ geht aus (5′) und $V_2 f$ aus (6′) hervor, wenn $e_1 = 1$, $e_2 = \delta t$, $e_3 = 1$ angenommen wird:

$$U_2 f \equiv p, \quad V_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

Endlich ergeben sich $U_3 f$ und $V_3 f$, wenn $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $e_3 = 1 + \delta t$ gesetzt wird:

$$U_3 f \equiv yq, \quad V_3 f \equiv y \frac{\partial f}{\partial y} + 2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

$V_1 f$, $V_2 f$, $V_3 f$ hätten wir aber auch aus $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$ so berechnen können: Zunächst ist hier:

$$\Omega \equiv y^2 - a_1 x - a_2 = 0.$$

Ist ferner ein Vf:

$$Vf \equiv \xi p + \eta q + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial a_2},$$

so würde (8) ergeben, dass

$$-a_1 \xi + 2y\eta - x\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

sein müsste vermöge $y^2 = a_1 x + a_2$. Nun ist zur Berechnung von $V_1 f$ wegen $U_1 f \equiv xp$ zu setzen: $\xi \equiv x$, $\eta \equiv 0$, sodass kommt:

$$-(a_1 + \alpha_1)x - \alpha_2 = 0,$$

d. h. $\alpha_1 = -a_1$, $\alpha_2 = 0$. Vf nimmt daher die obige Form:

$$V_1 f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1}$$

an. Wegen $U_2 f \equiv p$ ergiebt sich für $V_2 f$ aus $\xi \equiv 1$, $\eta \equiv 0$ die Bedingung:

$$-a_1 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0,$$

also $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -a_1$, sodass

$$V_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2}$$

wird. Endlich aus $U_3 f \equiv yq$ oder $\xi \equiv 0$, $\eta \equiv y$ folgt für $V_3 f$:

$$2y^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0$$

oder:

$$2(a_1 x + a_2) - \alpha_1 x - \alpha_2 = 0,$$

d. h. $\alpha_1 = 2a_1$, $\alpha_2 = 2a_2$ und somit auch

$$V_3 f \equiv y \frac{\partial f}{\partial y} + 2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

Nachweis, dass die Bedingungen hinreichen.

Es ist nun einzusehen, dass wie in diesem Beispiel stets die Bedingungen (8) vollständig hinreichen zur Berechnung der $V_i f$ oder $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$.

In der That, zunächst ist es infolge unserer früheren Überlegungen sicher, dass es Functionen $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$ von $a_1 \ldots a_m$ allein giebt, welche die Forderung (8) erfüllen vermöge $\Omega = 0$. Hierbei wird natürlich stillschweigend vorausgesetzt, dass $\Omega = 0$ so geschrieben ist, dass nicht alle Differentialquotienten von Ω nach x, y, $a_1 \ldots a_m$ vermöge $\Omega = 0$ verschwinden, dass also $\Omega = 0$ etwa in der aufgelösten Form

$$\Omega \equiv y - \omega(x, a_1 \ldots a_m) = 0$$

vorliege, in der $\frac{\partial \Omega}{\partial y} \equiv 1 \neq 0$ ist. Existierten *mehrere* Wertsysteme von $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$ (bei ein und demselben i), welche die Bedingung erfüllten, etwa $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$ und $\bar{\alpha}_{i1} \ldots \bar{\alpha}_{im}$, so wäre:

$$\xi_i \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \alpha_{i1} \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + \cdots + \alpha_{im} \frac{\partial \Omega}{\partial a_m} = 0,$$

$$\xi_i \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \bar{\alpha}_{i1} \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + \cdots + \bar{\alpha}_{im} \frac{\partial \Omega}{\partial a_m} = 0$$

vermöge $\Omega = 0$, also auch:

$$(9) \qquad (\alpha_{i1} - \bar{\alpha}_{i1}) \frac{\partial \Omega}{\partial a_1} + \cdots + (\alpha_{im} - \bar{\alpha}_{im}) \frac{\partial \Omega}{\partial a_m} = 0$$

vermöge $\Omega = 0$. Denken wir uns, was ohne Einfluss auf das Endergebnis ist, $\Omega = 0$ in obiger aufgelöster Form vorgelegt, so ist sicher (9) ganz frei von y. Da nun $\Omega = 0$ nur y durch x, $a_1 \ldots a_m$ ausdrückt, so muss also (9) nicht nur vermöge $\Omega = 0$, sondern schon an sich identisch bestehen. Ω wäre also eine Function von x, y und den $m - 1$ Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$(\alpha_{i1} - \bar{\alpha}_{i1}) \frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + (\alpha_{im} - \bar{\alpha}_{im}) \frac{\partial f}{\partial a_m} = 0,$$

d. h. in Ω würden nicht alle m Parameter $a_1 \ldots a_m$ wesentlich sein, indem sie nur in $m - 1$ Functionen in Ω vorkämen.

Dies aber widerspricht der Voraussetzung. Der Widerspruch löst sich nur dann, wenn $\alpha_{i1} \equiv \bar{\alpha}_{i1}, \ldots \alpha_{im} \equiv \bar{\alpha}_{im}$ ist, d. h. wenn sich aus der Bedingung (8) (bei dem bestimmten i) nur *ein* Wertsystem $\alpha_{i1} \ldots \alpha_{im}$ oder also nur *ein* Symbol $V_i f$ ergiebt.

Die Bedingungen (8) reichen daher in der That völlig aus zur Bestimmung der infinitesimalen Transformationen der Gruppe (6).

Man möge diese Methode zur Bestimmung der infinitesimalen Transformationen $V_i f$ in den oben angegebenen Beispielen anwenden. Wir geben hier noch ein neues:

Beispiel.

Beispiel: Die Schar aller ∞^2 Geraden:

$$\Omega \equiv a_1 x + a_2 y - 1 = 0$$

gestattet die Gruppe aller Bewegungen, bei der

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv q, \quad U_3 f \equiv yp - xq$$

ist. (Siehe § 3 des 4. Kap.) Hier bestimmt sich $V_1 f$ aus:

$$V_1 \Omega \equiv a_1 + \alpha_{11} x + \alpha_{12} y = 0$$

vermöge $\Omega = 0$. Setzen wir hierin

$$y = \frac{1 - a_1 x}{a_2}$$

ein, so kommt

$$a_1 a_2 + \alpha_{11} a_2 x + \alpha_{12} - \alpha_{12} a_1 x = 0,$$

d. h.

$$\alpha_{12} = - a_1 a_2, \quad \alpha_{11} = \frac{\alpha_{12} a_1}{a_2} = - a_1^2,$$

sodass

$$V_1 f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} - a_1^2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2}$$

wird. Analog ist:

$$V_2 f \equiv \frac{\partial f}{\partial y} - a_1 a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_2^2 \frac{\partial f}{\partial a_2}.$$

Für $V_3 f$ fordern wir, dass

$$V_3 \Omega \equiv a_1 y - a_2 x + \alpha_{31} x + \alpha_{32} y$$

vermöge $\Omega = 0$ verschwinden soll. Da $\Omega = 0$ nicht homogen in x, y ist, so geht dies nur dann, wenn

$$\alpha_{31} = a_2, \quad \alpha_{32} = - a_1,$$

also

$$V_3 f \equiv y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2}$$

ist.

Um eine Anwendung hiervon zu machen, wollen wir einmal alle Functionen Φ von x, y, a_1, a_2 suchen, welche bei der gefundenen Gruppe $V_1 f, V_2 f, V_3 f$ invariant bleiben. Da diese Gruppe in lauter eingliedrige Untergruppen zerfällt, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, so ist hierzu notwendig und hinreichend, dass Φ invariant bleibe bei den drei gefundenen infinitesimalen Transformationen. Wir fordern also, dass identisch sei:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad - a_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} - a_1 a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - a_1 a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} - a_2^2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0,$$

$$y \frac{\partial \Phi}{\partial x} - x \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} - a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0.$$

Dies ist ein dreigliedriges vollständiges System in vier Veränderlichen (vgl. § 1 des 9. Kap.) und besitzt also nur eine unabhängige Lösung Φ. Nach der ersten Gleichung ist Φ eine Function von y und

$$\lambda \equiv \frac{a_1}{a_2}, \quad \mu \equiv x - \frac{1}{a_1}$$

allein, sodass die zweite wird:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0,$$

also Φ eine Function von

$$\lambda \equiv \frac{a_1}{a_2}, \quad \nu \equiv y + \lambda \mu \equiv \frac{a_1 x + a_2 y - 1}{a_2}$$

allein ist. Die letzte Gleichung wird somit:

$$(1 + \lambda^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \nu \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0.$$

Φ ist daher nur eine Function von

$$\varphi \equiv \frac{\nu}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \equiv \frac{a_1 x + a_2 y - 1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Diese Invariante hat eine einfache geometrische Bedeutung: Sie stellt den Abstand eines beliebigen Punktes (x, y) von der beliebigen Geraden

$$a_1 x + a_2 y - 1 = 0$$

dar, der natürlich bei jeder Bewegung, an der Punkt und Gerade teilnehmen, ungeändert bleibt.

§ 2. Princip der Dualität.

Wir werden jetzt insbesondere die Schar aller Geraden der Ebene, die ja bei projectiven Transformationen unter einander vertauscht werden, beliebigen projectiven Transformationen unterwerfen. Dadurch werden wir zum wichtigen Begriff der *Dualität* geführt werden, der in der projectiven Geometrie, also auch in der Theorie der projectiven Gruppen eine grosse Rolle spielt.

Transform. der Coord. bei project. Transmationen.

Betrachten wir eine projective Transformation

$$(10)\qquad x_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad y_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Sie führt die ∞^2 Geraden

$$(11)\qquad ux + vy + 1 = 0$$

der Ebene in einander über. Die einzelnen Geraden der Schar werden bestimmt durch die Parameter u, v. Diese Coefficienten heissen bekanntlich die *Liniencoordinaten* (in engerem Sinne) der Geraden (11). Sie sind die reciproken negativen Werte der Abschnitte der Geraden auf den Coordinatenaxen.

Bei der Transformation (10) gehe die Gerade (11) in die Gerade (u_1, v_1) oder

$$(12)\qquad u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1 = 0$$

über. u_1, v_1 sind dann gewisse Functionen der ursprünglichen Parameter u, v und der Coefficienten von (10). Um sie zu berechnen, lösen wir (10) nach x, y auf, wodurch sich bekanntlich ergiebt (vgl. § 3 des 1. Kap.):

$$x = \frac{A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3}{C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3}, \quad y = \frac{B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3}{C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3},$$

und setzen diese Werte in (11) ein. Die Gerade (11) geht also über in die Gerade:

$$u(A_1 x_1 + A_2 y_1 + A_3) + v(B_1 x_1 + B_2 y_1 + B_3) + (C_1 x_1 + C_2 y_1 + C_3) = 0$$

oder:

$$(12')\qquad \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{A_3 u + B_3 v + C_3}\, x_1 + \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{A_3 u + B_3 v + C_3}\, y_1 + 1 = 0.$$

A_i, B_i, C_i bedeuten die zweireihigen Unterdeterminanten der Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ hinsichtlich a_i, b_i, c_i.

Die Liniencoordinaten u_1, v_1 der neuen Geraden (12) oder (12′) haben hiernach die Werte:

$$(13)\qquad u_1 = \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{A_3 u + B_3 v + C_3}, \quad v_1 = \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{A_3 u + B_3 v + C_3}.$$

Bei der projectiven Transformation (10) werden folglich die Liniencoordinaten u, v ebenfalls *projectiv* — allerdings mit anderen Coefficienten — transformiert, denn u_1, v_1 sind linear gebrochene Functionen von u, v mit demselben Nenner.

Die Transformation (13) sagt aus, wie die Geraden (u, v) bei der Punkttransformation (10) unter einander vertauscht werden. Geraden, die sämtlich durch einen Punkt (x, y) gehen, werden selbstverständ-

lich in Geraden übergeführt, die ebenfalls sämtlich durch einen Punkt (x_1, y_1) gehen, d. h. Strahlenbüschel gehen in Strahlenbüschel über.

Allgemeine Transf. der Geraden, die Büschel in Büschel überführen.

Man kann nun allgemein fragen, wie überhaupt eine Transformation der Geraden unter einander, d. h. eine Transformation der Liniencoordinaten u, v beschaffen sein muss, wenn Strahlenbüschel stets wieder in Strahlenbüschel übergehen sollen. Diese Frage wollen wir rein analytisch formulieren: Wenn eine Gerade (u, v) durch einen bestimmten Punkt (x, y) hindurchgehen soll, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass

$$ux + vy + 1 = 0$$

sei. Alle Geraden (u, v) also, welche durch den Punkt (x, y) hindurchgehen, werden durch vorstehende Gleichung definiert. So giebt überhaupt jede lineare Gleichung zwischen u, v:

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0$$

alle Geraden (u, v) durch einen gemeinsamen Punkt mit den Coordinaten $x = \frac{\alpha}{\gamma}$ und $y = \frac{\beta}{\gamma}$.

Wir fragen mithin nach *allen Transformationen von u, v in u_1, v_1, bei denen eine lineare Gleichung zwischen u, v wieder in eine lineare Gleichung zwischen u_1, v_1 übergeht.*

Nun haben wir früher bewiesen (siehe Theorem 2, § 3 des 2. Kap.), dass diejenigen analytischen Transformationen der Punkte (x, y) in Punkte (x_1, y_1), bei denen Geraden in Geraden, d. h. jede lineare Gleichung zwischen x, y wieder in eine lineare Gleichung zwischen x_1, y_1 übergeht, eben die projectiven, die von der Form (10) sind. Die rein analytische Definition dieser Transformationen stimmt mit der Definition der gesuchten Transformationen völlig überein bis auf eine andere Bezeichnung der Veränderlichen. Daher ergiebt sich sofort der

Satz 4: *Die allgemeinste analytische Geradentransformation, welche Strahlenbüschel wieder in Strahlenbüschel überführt, hat die projective Form:*

$$u_1 = \frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}, \quad v_1 = \frac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}.$$

Die Übereinstimmung dieser Form mit der Form (13) lehrt, dass bei projectiven Punkttransformationen die Geraden der Ebene schon in *allgemeinster* Weise so unter einander vertauscht werden, dass Strahlenbüschel in Strahlenbüschel übergehen.

Satz 5: *Die allgemeinste Geradentransformation, welche Strahlenbüschel in Strahlenbüschel überführt, wird erhalten, wenn die allgemeinste projective Punkttransformation auf die Punkte aller Geraden ausgeführt wird.*

Der hier bewerkstelligte Übergang von einem geometrischen Satze durch seine analytische Fassung hindurch zu einem neuen geometrischen Satze ist ein Ausfluss aus dem *Principe der Dualität*, das darin seinen Ursprung hat, dass die Gleichung

Princip der Dualität.

$$ux + vy + 1 = 0$$

zwei wesentlich verschiedene Deutungen zulässt, je nachdem u, v oder x, y fest angenommen werden. Diese Gleichung giebt bei festen u, v alle Punkte (x, y), welche auf einer Geraden liegen, also eine gerade Punktreihe, während sie bei festen x, y alle Geraden (u, v) definiert, welche durch einen Punkt gehen, also ein Strahlenbüschel.

Man kann hieraus schliessen, dass jeder Satz, der nur von der gegenseitigen Lage gewisser Punkte und Geraden handelt, sofort einen neuen Satz liefert, wenn man in ihm Punkt mit Gerade vertauscht, dabei aber vereinigt liegende Punkte und Geraden durch ebenfalls vereinigt liegende Geraden und Punkte ersetzt. Ein Beispiel hierzu ist der Satz des Desargues, nach welchem bei zwei Dreiecken, deren entsprechende Eckpunkte auf drei durch einen Punkt gehenden Geraden liegen, die Schnittpunkte entsprechender Seiten in einer Geraden gelegen sind. Die Anwendung des angedeuteten Principes des Dualität lehrt hier sofort, dass auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist.

Analytisch drückt sich ein Satz, der von der gegenseitigen Lage von Punkten und Geraden handelt, durch ein System von Gleichungen zwischen gewissen Punkten (x, y) und gewissen Geraden (u, v) aus. Will man ihn vermöge des Principes der Dualität umwandeln, so hat man nur überall Punkt- und Liniencoordinaten zu vertauschen, mit anderen Worten, die Transformation

$$(14) \qquad u_1 = x, \quad v_1 = y, \quad x_1 = u, \quad y_1 = v$$

auf die Coordinaten x, y, u, v auszuführen und alsdann die neuen Gleichungen geometrisch zu deuten.

Diese Überführung (14) von Punkten und Geraden in einander ist keine Punkt- oder Geradentransformation. Wir bezeichnen sie als die *specielle Dualität D*. Sie ist eines der einfachsten Beispiele von solchen Operationen, die *Berührungstransformationen* heissen. Dies zu erläutern, ist jedoch hier nicht der Platz.

Specielle Dualität.

§ 3. Die allgemeine Dualität.

Wir können leicht einsehen, dass die Gleichungen (14) nur einen speciellen Fall einer *allgemeineren* Operation darstellen, welche ebenfalls Punkte (x, y) und Geraden (u, v) in resp. Geraden (u_1, v_1) und

Punkte (x_1, y_1) verwandelt und auch vereinigte Punkte und Geraden in vereinigte Geraden und Punkte überführt, also Sätze der genannten Art in neue Sätze verwandelt. Zu dem Zweck fragen wir nach der allgemeinsten analytischen Transformation von x, y, u, v in u_1, v_1, x_1, y_1:

$$u_1 = \varphi(x, y), \quad v_1 = \psi(x, y), \quad x_1 = \varrho(u, v), \quad y_1 = \sigma(u, v),$$

welche *erstens* alle Punkte (x, y) einer Geraden in Strahlen (u_1, v_1) eines Büschels, *zweitens* alle Strahlen (u, v) eines Büschels in Punkte (x_1, y_1) einer Geraden und *drittens* vereinigt liegende Punkte (x, y) und Geraden (u, v) in vereinigt liegende Geraden (u_1, v_1) und Punkte (x, y) überführt.

Unsere *erste* Forderung verlangt, dass bei der Transformation

$$u_1 = \varphi(x, y), \quad v_1 = \psi(x, y)$$

eine lineare Gleichung zwischen x, y stets wieder in eine lineare Gleichung zwischen u, v übergehe. Ihre analytische Formulierung ist also die alte, und sie lehrt, dass allgemein

$$u_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad v_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{15}$$

sein muss. Die a, b, c bedeuten hierbei beliebige Zahlen, deren Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ nicht verschwindet. Nach unserer *zweiten* Forderung müssen auch x_1, y_1 linear gebrochene Functionen von u, v mit gleichen Nennern sein:

$$x_1 = \frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}, \quad y_1 = \frac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}. \tag{16}$$

Um endlich unsere *dritte* Forderung zu erfüllen, betrachten wir alle Punkte (x, y) einer Geraden (u, v). Sie sind an die Gleichung

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{17}$$

gebunden. Vermöge (15) gehen sie in Geraden (u_1, v_1) über, und es ist, wie die Auflösung von (15) giebt:

$$x_1 = \frac{A_1 u_1 + A_2 v_1 + A_3}{C_1 u_1 + C_2 v_1 + C_3}, \quad y_1 = \frac{B_1 u_1 + B_2 v_1 + B_3}{C_1 u_1 + C_2 v_1 + C_3}.$$

Setzen wir diese Werte in (17) ein, so sehen wir, dass diese Geraden (u_1, v_1) an die Relation gebunden sind:

$$u(A_1 u_1 + A_2 v_1 + A_3) + v(B_1 u_1 + B_2 v_1 + B_3) + (C_1 u_1 + C_2 v_1 + C_3) = 0$$

oder:

$$\frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{A_3 u + B_3 v + C_3} u_1 + \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{A_3 u + B_3 v + C_3} v_1 + 1 = 0.$$

Diese Relation ist linear in u_1, v_1. Sie bestimmt alle Geraden (u_1, v_1), welche durch den Punkt mit den Coordinaten

$$(18) \qquad x_1 = \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{A_3 u + B_3 v + C_3}, \quad y_1 = \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{A_3 u + B_3 v + C_3}$$

gehen. Alle Punkte (x, y) auf den Geraden (u, v) gehen also über in alle Geraden (u_1, v_1) durch den Punkt, welcher diese Coordinaten x_1, y_1 hat. Es muss dies also der Punkt sein, in welchen die Gerade (u, v) durch die gesuchte Operation übergeführt wird, da vereinigt liegende Punkte (x, y) und Geraden (u, v) in vereinigte Geraden und Punkte übergehen sollen. Mit anderen Worten: die Gleichungen (18) müssen die Transformation (16) darstellen. Die α, β, γ sind also nichts anderes als die Unterdeterminanten A, B, C.

Form der allgemeinen Dualität.

Theorem 23: *Die allgemeinste analytisch ausdrückbare Abbildung von Punkten (x, y) und Geraden (u, v) in Geraden (u_1, v_1) und Punkte (x_1, y_1), bei welcher alle Punkte einer Geraden in ein Strahlenbüschel, ferner ein Strahlenbüschel in alle Punkte einer Geraden und überhaupt vereinigt liegende Punkte und Geraden in vereinigt liegende Geraden und Punkte übergeführt werden, hat die Form:*

$$u_1 = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3}, \quad v_1 = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3};$$

$$x_1 = \frac{A_1 u + B_1 v + C_1}{A_3 u + B_3 v + C_3}, \quad y_1 = \frac{A_2 u + B_2 v + C_2}{A_3 u + B_3 v + C_3}.$$

Hierin bedeuten die a, b, c beliebige Zahlen, deren Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \neq 0$ ist, während A_i, B_i, C_i die zweireihigen Unterdeterminanten dieser Determinante hinsichtlich a_i, b_i, c_i sind.

Wir bezeichnen diese Operation als die *allgemeine Dualität Δ*. Die obige specielle Dualität D geht aus ihr hervor, wenn $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ und alle anderen Coefficienten gleich Null gesetzt werden.

Die allgemeine Dualität Δ lässt sich noch in mehr symmetrischer Weise darstellen. Aus der Gleichung (15) und aus

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 + 1 = 0$$

folgt nämlich:

$$(19) \quad (a_1 x + b_1 y + c_1) x_1 + (a_2 x + b_2 y + c_2) y_1 + (a_3 x + b_3 y + c_3) = 0.$$

Dies ist *eine bilineare Gleichung in x, y und x_1, y_1*. Halten wir x, y als gegeben fest, so stellt diese Gleichung in Punktcoordinaten x_1, y_1 die Gerade dar, in welche der Punkt (x, y) vermöge Δ übergeht. Halten wir x_1, y_1 fest, so stellt sie eine Gerade dar, an welche der Punkt (x, y) gebunden ist, nämlich die Gerade:

$$(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3)x + (b_1x_1 + b_2y_1 + b_3)y + (c_1x_1 + c_2y_1 + c_3) = 0,$$

also die Gerade mit den Liniencoordinaten

$$u = \frac{a_1x_1 + a_2y_1 + a_3}{c_1x_1 + c_2y_1 + c_3}, \quad v = \frac{b_1x_1 + b_2y_1 + b_3}{c_1x_1 + c_2y_1 + c_3}.$$

Diese Gleichungen aber geben aufgelöst:

$$x_1 = \frac{A_1u + B_1v + C_1}{A_3u + B_3v + C_3}, \quad y_1 = \frac{A_2u + B_2v + C_2}{A_3u + B_3v + C_3},$$

d. h. die Gleichungen (18), welche ausdrücken, wie die Geraden (u, v) in Punkte (x_1, y_1) bei $\varDelta$ verwandelt werden.

Die bilineare Gleichung (19) liefert somit alle vier Gleichungen der Dualität und ist ihr durchsichtigster Ausdruck. Sie heisst die *Äquatio directrix* der Dualität $\varDelta$. Zu bemerken ist, dass *jede* in x, y und in x_1, y_1 lineare Gleichung, die x, y, x_1, y_1 sämtlich wirklich enthält, eine Dualität repräsentiert. Man braucht sie ja nur mit (19) zu vergleichen und kann dadurch die Verhältnisse der a, b, c bestimmen.

Äquatio directrix.

Schliesslich lässt sich auch die Äquatio directrix (19) in übersichtlicher Form so schreiben:

$$(19') \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & x \\ A_2 & B_2 & C_2 & y \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wie man leicht sieht, wenn man bedenkt, dass bekanntlich $B_3C_1 - B_1C_3 = a_2 \Sigma \pm a_1b_2c_3$ u. s. w. ist.

Dualität mit symmetr. Determinante.

Ist die Äquatio directrix *symmetrisch* hinsichtlich x, y und x_1, y_1, sodass sie sich nicht ändert, wenn x, y mit x_1, y_1 vertauscht werden, ist also die Determinante $\Sigma \pm a_1b_2c_3$ symmetrisch hinsichtlich ihrer Hauptdiagonale, so giebt die Auflösung von (15) und (18) nach u, v und x, y wieder bei Form (15), (18). Die Auflösung kann also einfach dadurch hergestellt werden, dass man in (15) und (18) die u, v, x, y mit u_1, v_1, x_1, y_1 vertauscht.

Alsdann liefert die zweimalige Ausführung der Operation $\varDelta$ nach einander wieder die ursprünglichen Figuren. Denn geht der Punkt p bei $\varDelta$ in die Gerade g_1 über, so geht alsdann bei nochmaliger Ausführung von $\varDelta$ die Gerade g_1 wieder in den Punkt p über. *Die zweimalige Ausführung einer symmetrischen Dualität $\varDelta$ liefert mithin die Identität.*

Zu diesen symmetrischen Dualitäten gehört auch die specielle D,

wie schon ihre Gleichungen (14) zeigen, die durch Vertauschung von x, y, u, v mit x_1, y_1, u_1, v_1 nicht geändert werden.

Jede Dualität mit symmetrischer Determinante lässt eine einfache und wichtige geometrische Deutung zu: Betrachten wir nämlich den Kegelschnitt:

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & x \\ A_2 & B_2 & C_2 & y \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so können wir an ihn vom Punkte (x, y) aus zwei Tangenten ziehen. Alsdann ist bekanntlich für den Berührpunkt (x_1, y_1) jeder derselben:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & x_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & y_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & x \\ A_2 & B_2 & C_2 & y \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder, da jetzt die Determinante $\Sigma \pm A_1 B_2 C_3$ symmetrisch sein soll, also beide Glieder übereinstimmen:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & x \\ A_2 & B_2 & C_2 & y \\ A_3 & B_3 & C_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung wird von jedem der beiden Berührpunkte, also von jedem Punkte (x_1, y_1) der Berührsehne, welche bekanntlich die *Polare* des angenommenen *Poles* (x, y) heisst, erfüllt. Andererseits stellt (19′) die Gerade in Punktcoordinaten x_1, y_1 dar, in welche der Punkt (x, y) vermöge der Dualität übergeht. Da (19′) mit obiger Gleichung zusammenfällt, so folgt: *Eine Dualität mit symmetrischer Determinante führt jeden Punkt p über in seine Polare g_1 hinsichtlich des Kegelschnittes* (20). (Fig. 26.)

Polarität.

Da die Gleichungen dieser Dualität ungeändert bleiben, wenn x, y, u, v mit x_1, y_1, u_1, v_1 vertauscht werden, so folgt, *dass die Dualität auch jede Gerade in ihren Pol hinsichtlich des Kegelschnittes* (20) *verwandelt.*

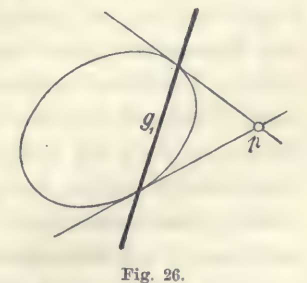


Fig. 26.

Satz 6: *Eine Dualität mit symmetrischer Determinante verwandelt jede Figur in die polare hinsichtlich eines gewissen festen Kegelschnittes.*

So führt die specielle Dualität D jede Figur in ihre polare hinsichtlich des (imaginären) Kegelschnittes:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

über. Wir bemerkten schon früher, in § 4 des 3. Kap., dass wir die elementare analytische Theorie der Kegelschnitte als bekannt voraussetzen. In dieser werden auch die Beziehungen zwischen Pol und Polare erörtert. Zur Vermeidung von Irrtümern möchte nur noch hervorzuheben sein, dass jeder reelle Punkt bei vorgelegtem reellen Kegelschnitt eine reelle Polare hat, wenn auch die Berührpunkte der Tangenten von dem Punkte an den Kegelschnitt für innere Punkte imaginär werden.

Invarianz der Doppelverhältnisse bei allgem. Dualität.

Kehren wir wieder zur *allgemeinen* Dualität Δ zurück. Erinnern wir uns daran, dass erstens das *Doppelverhältnis* von vier Punkten einer Geraden gleich dem ihrer Abscissen oder Ordinaten, zweitens das von vier Geraden durch einen Punkt gleich dem ihrer Abschnitte auf einer Axe, also auch gleich dem ihrer Liniencoordinaten u oder v ist, und dass drittens das Doppelverhältnis ungeändert bleibt bei einer Transformation, welche die neuen Veränderlichen als linear gebrochene Functionen der ursprünglichen mit demselben Nenner darstellt, so folgt unmittelbar:

Satz 7: *Bei einer Dualität gehen vier Punkte einer Geraden in vier Geraden durch einen Punkt mit demselben Doppelverhältnis über, und umgekehrt.*

Da wir nun früher die Kegelschnitte rein projectiv definiert haben (vgl. Satz 17, 18, 19 in § 4 des 3. Kap.), so folgt hieraus weiter:

Satz 8: *Eine Dualität führt die Punkte eines beliebigen Kegelschnittes in die Tangenten eines neuen Kegelschnittes und die Tangenten der ersteren in die Punkte des letzteren über.*

Insbesondere lehrt also Satz 6, *dass die polare Figur eines Kegelschnittes hinsichtlich eines festen Kegelschnittes stets wieder ein Kegelschnitt ist.*

Auch folgt, wenn p der Pol der Geraden g_1 hinsichtlich eines Kegelschnittes ist, wie in Figur 26, und wenn eine Gerade durch p den Kegelschnitt in a und b, die Polare g_1 in q trifft, dass bei der polaren Umformung die vier Punkte a, p, b, q in vier Geraden durch einen Punkt übergehen, nämlich a in die Tangente α von a, p in die Polare g_1, b in die Tangente β von b und q in eine Gerade h durch p. Die Geraden α, g_1, β, h müssen sämtlich durch einen Punkt gehen. Ferner muss nach Satz 7 das Doppelverhältnis $(apbq) = (\alpha g_1 \beta h)$ sein. Letzteres Doppelverhältnis ist aber nach Satz 1, § 1 des 1. Kap., gleich dem der Punkte a, q, b, p, sodass kommt:

$$(apbq) = (aqbp).$$

Die rechte Seite ist gleich dem reciproken Wert von $(apbq)$. Daher ist

$$(apbq) = -1,$$

denn $(apbq) = 1$ würde aussagen, dass zwei der vier Punkte zusammenfallen. Also folgt, dass jede Gerade durch einen Punkt p von der Polaren dieses Punktes so in einem Punkte q geschnitten wird, dass p, q harmonisch getrennt werden durch die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt. Ähnlich liessen sich noch andere auf die Polarentheorie bezügliche Sätze ableiten.

§ 4. Ausführung von Dualitäten und projectiven Punkttransformationen nach einander.

Aufeinanderfolge zweier Dualitäten.

Führen wir irgend *zwei Dualitäten* Δ_1 und Δ_2 *nach einander* aus, so geht ein Punkt zunächst bei Δ_1 in eine Gerade, alsdann diese Gerade bei Δ_2 wieder in einen Punkt über. Ferner geht eine Gerade bei Δ_1 in einen Punkt, darauf dieser Punkt bei Δ_2 wieder in eine Gerade über. Überdies gehen ein Punkt und eine durch ihn gehende Gerade bei Δ_1 in eine Gerade und einen Punkt auf ihr, diese bei Δ_2 in einen Punkt und eine hindurchgehende Gerade über.

Die Aufeinanderfolge zweier Dualitäten Δ_1, Δ_2 kann folglich ersetzt werden durch eine gewisse Punkttransformation, welche Geraden in Geraden überführt, d. h. durch eine projective Transformation P, was wir symbolisch ausdrücken:

$$\Delta_1 \Delta_2 = P.$$

Insbesondere ist, wie wir schon bemerkten, die Wiederholung einer Dualität mit symmetrischer Determinante der Identität äquivalent, so auch die der speciellen Dualität D:

$$DD = 1.$$

Inverse Dualität.

Ferner lässt sich jede Dualität Δ umkehren. So ergiebt sich die zur Dualität des Theorems 23 *inverse* Operation, wenn man die Gleichungen dieses Theorems nach u, v, x, y auflöst und x_1, y_1, u_1, v_1 als die ursprünglichen Coordinaten auffasst. Diese inverse Operation ist wieder eine Dualität. Wir bezeichnen sie symbolisch mit Δ^{-1}.

Symbolische Bezeichnung der Dualität.

Überhaupt ist zu beachten, dass die symbolische Bezeichnungsweise der Punkttransformationen sich ohne weiteres auf die der Dualitäten ausdehnen lässt, obgleich die Dualitäten ganz andere Operationen sind. Es liegt dies darin, dass jene Bezeichnungsweise überhaupt für beliebige Operationen, denen man die Gebilde unterwerfen kann, geeignet ist. Wir werden also auch schreiben können:

$$\Delta\Delta^{-1} = 1,$$

d. h. die Aufeinanderfolge einer Dualität und der inversen giebt die Identität. Aus

$$DD = 1$$

folgt, wenn wir beiderseits noch D^{-1} ausüben:

$$D = D^{-1},$$

d. h. die zur speciellen Dualität inverse stimmt mit ihr überein, was uns nichts neues ist.

Allgemeine Dualität abgeleitet aus der speciellen.

Nun wissen wir, dass die Aufeinanderfolge der speciellen Dualität D und einer allgemeinen Dualität Δ einer projectiven Punkttransformation P äquivalent ist:

$$D\Delta = P.$$

Führen wir hier beiderseits links D aus, so kommt:

$$DD\Delta = DP$$

oder, da $DD = 1$ ist:

$$\Delta = DP.$$

In Worten:

Satz 9: *Jede Dualität ist äquivalent der Aufeinanderfolge der speciellen Dualität und einer projectiven Punkttransformation.*

Aus der Formel

$$\Delta_1 \Delta_2 = P,$$

welche aussagt, dass die Aufeinanderfolge zweier Dualitäten einer gewissen projectiven Transformation äquivalent ist, folgt, wenn wir beiderseits Δ_1^{-1} links oder Δ_2^{-1} rechts ausüben:

$$\Delta_2 = \Delta_1^{-1} P, \quad \Delta_1 = P \Delta_2^{-1}.$$

Wir fassen unsere Ergebnisse so zusammen:

Satz 10: *Bezeichnen Δ_a, Δ_b ... Dualitäten und P_α, P_β ... projective Punkttransformationen, so gelten Beziehungen von der Form:*

$$P_\alpha P_\beta = P_\gamma, \quad P_\alpha \Delta_a = \Delta_b, \quad \Delta_a P_\alpha = \Delta_c, \quad \Delta_a \Delta_b = \Delta_d.$$

Auch sind dann Δ_a^{-1}, Δ_b^{-1} ... Dualitäten und P_α^{-1}, P_β^{-1} ... projective Punkttransformationen. Die Aufeinanderfolge einer Anzahl von projectiven Punkttransformationen und Dualitäten ist also einer einzigen projectiven Punkttransformation oder einer einzigen Dualität äquivalent, je nachdem die Anzahl der vorkommenden Dualitäten gerade oder ungerade ist.

Betrachten wir also die Gesamtheit aller Dualitäten und projectiven Transformationen der Ebene, so finden wir, dass dieser Schar von Operationen die Eigenschaft zukommt, dass die Aufeinanderfolge zweier Operationen der Schar wieder eine Operation der Schar ist. Diese Schar besitzt also die *Gruppeneigenschaft.*

Satz 11: *Der Inbegriff aller projectiven Punkttransformationen und aller Dualitäten der Ebene bildet eine Gruppe von Operationen mit paarweis inversen Operationen.*

Gruppe aller proj. Transformationen und Dualitäten.

Wir lernen hiermit eine Gruppe von Operationen kennen, die wohlbemerkt keine Punkttransformationsgruppe ist, da sie die Punkte nicht immer in Punkte verwandelt.

Ausführung einer Dualität auf eine projective Transform.

Es möge nun T eine bestimmte projective Punkttransformation bedeuten, während $\varDelta$ irgend eine Dualität sein soll. Wir wollen *die Dualität $\varDelta$ auf T ausüben* und müssen vorerst erklären, was dies heisst: T wird die Punkte p und Geraden g der Ebene in neue Punkte p' und Geraden g' überführen. Nun wollen wir die Dualität $\varDelta$ sowohl auf die ursprünglichen Punkte und Geraden p, g als auch auf die neuen Punkte und Geraden p', g' ausführen. Die p und g werden bei $\varDelta$ in gewisse Geraden g_1 und Punkte p_1, die p' und g' in gewisse Geraden g_1' und Punkte p_1' abgebildet. Wir kommen also zu einer Operation, bei welcher den Punkten p_1 und Geraden g_1 der Ebene die Punkte p_1' und Geraden g_1' zugeordnet sind, und wissen, dass diese Operation eine projective Punkttransformation T' ist. Um ihren symbolischen Ausdruck zu erhalten, bedenken wir, dass wir den Übergang von den p_1, g_1 zu den p_1', g_1' auch so herstellen können: p_1 und g_1 werden von $\varDelta^{-1}$ in g und p, diese von T in g' und p' und letztere endlich von $\varDelta$ in p_1' und g_1' übergeführt. Die Aufeinanderfolge von $\varDelta^{-1}$, T und $\varDelta$ leistet mithin dasselbe wie T'.

Satz 12: *Führt man auf eine projective Punkttransformation T der Ebene eine Dualität $\varDelta$ aus, so erhält man die projective Punkttransformation:*

$$T' = \varDelta^{-1} T \varDelta.$$

Es möge nun eine continuierliche projective Gruppe T_a, $T_b \dots$ mit paarweis inversen Transformationen vorliegen, und es sei:

$$T_a T_b = T_c.$$

Wenn eine Dualität $\varDelta$ auf alle Transformationen der Gruppe ausgeführt wird, so gehen sie über in neue projective Transformationen:

$$T_a' = \varDelta^{-1} T_a \varDelta, \quad T_b' = \varDelta^{-1} T_b \varDelta, \cdots.$$

Alsdann ist:

$$T_a' T_b' = \varDelta^{-1} T_a \varDelta \varDelta^{-1} T_b \varDelta = \varDelta^{-1} T_a T_b \varDelta$$

oder, da $T_a T_b = T_c$ ist:

$$T_a' T_b' = \varDelta^{-1} T_c \varDelta = T_c'.$$

Die neuen T' bilden folglich ebenfalls eine Gruppe und zwar offenbar auch eine continuierliche. Wenn ferner auf

$$T_a' = \Delta^{-1} T_a \Delta$$

beiderseits links Δ und rechts Δ^{-1} ausgeführt wird, so kommt:

$$\Delta T_a' \Delta^{-1} = T_a.$$

Es ist also:

$$T_a = \Delta T_a' \Delta^{-1}$$

und, wenn $T_{\bar{a}}$ zu T_a invers ist:

$$T_{\bar{a}} = \Delta T_{\bar{a}}' \Delta^{-1},$$

daher wegen $T_a T_{\bar{a}} = 1$ auch

$$\Delta T_a' \Delta^{-1} \Delta T_{\bar{a}}' \Delta^{-1} = 1$$

oder

$$\Delta T_a' T_{\bar{a}}' \Delta^{-1} = 1.$$

Führen wir hier beiderseits links Δ^{-1} und rechts Δ aus, so kommt:

$$T_a' T_{\bar{a}}' = 1,$$

also sind auch T_a' und $T_{\bar{a}}'$ invers. Ist endlich T_a infinitesimal, so ist offenbar auch $\Delta^{-1} T_a \Delta$ infinitesimal. Somit finden wir:

Satz 13: *Führt man auf alle Transformationen einer continuierlichen projectiven Gruppe der Ebene mit paarweis inversen Transformationen eine Dualität aus, so ergiebt sich wieder eine continuierliche projective Gruppe mit paarweis inversen Transformationen. Dabei gehen die infinitesimalen Transformationen der ursprünglichen Gruppe in die der neuen über.*

Die projective Transformation T', die aus einer vorgelegten projectiven Transformation T durch Ausführung einer Dualität Δ hervorgeht, also die Transformation

$$T' = \Delta^{-1} T \Delta$$

Dualistische Transform.

nennen wir eine zu T *dualistische Transformation.* Nach Satz 13 ist dann klar, was unter einer zu einer gegebenen projectiven Gruppe *dualistischen Gruppe* zu verstehen ist.

Dualistische Gruppe.

Eine Verwechselung der Begriffe „zu einer Transformation dualistische Transformation“ und „Dualität“ ist kaum zu befürchten. Erstere stellt eine Punkttransformation vor, die Geraden in Geraden überführt, letztere eine Operation, die Punkte und Geraden vertauscht.

Invariante Gebilde bei dualist. Gruppe.

Nehmen wir an, eine projective Transformation T lasse irgend ein Gebilde F invariant:

$$(F)T = (F),$$

so folgt leicht, dass auch jede zu T dualistische Transformation $T' = \varDelta^{-1} T \varDelta$ ein gewisses Gebilde invariant lässt, dasjenige Gebilde F' nämlich, das aus F durch Ausübung der Dualität $\varDelta$ hervorgeht:

$$(F') = (F)\varDelta.$$

Denn es ist:

$$(F')T' = (F')\varDelta^{-1}T\varDelta = (F)\varDelta\varDelta^{-1}T\varDelta = (F)T\varDelta = (F)\varDelta = (F').$$

Also folgt auch allgemein:

Satz 14: *Lässt eine projective Gruppe ein gewisses Gebilde F invariant, so lässt auch diejenige Gruppe, die aus der vorliegenden durch Ausübung einer gewissen Dualität $\varDelta$ hervorgeht, ein gewisses Gebilde F' invariant, dasjenige nämlich, das aus F durch Ausübung von $\varDelta$ entsteht:*

$$(F') = (F)\varDelta.$$

In § 4 des 4. Kap. sprachen wir von allen projectiven Transformationen, die ein gewisses Gebilde in Ruhe lassen, und zeigten, dass dieselben eine Gruppe bilden, die also durch Angabe des invarianten Gebildes vollständig definiert ist. Offenbar können wir nun hinzufügen:

Satz 15: *Ist eine projective Gruppe definiert als der Inbegriff aller projectiven Transformationen, die ein gewisses Gebilde F in Ruhe lassen, so lässt sich die vermöge der Dualität $\varDelta$ zur Gruppe dualistische Gruppe definieren als der Inbegriff aller projectiven Transformationen, die das aus F vermöge $\varDelta$ hervorgehende Gebilde in Ruhe lassen.*

Bestimmgn. der dualist. Gruppen.

Denken wir uns nun schliesslich, es sei eine projective Gruppe G vorgelegt, und wir wünschen *alle zu ihr dualistischen Gruppen zu bestimmen.* Da nach Satz 9 jede Dualität durch die Aufeinanderfolge der speciellen Dualität D und einer projectiven Transformation ersetzt werden kann, erhalten wir die dualistischen Gruppen, wenn wir auf G zunächst D und alsdann irgend eine projective Transformation ausüben. Indem wir zunächst auf G die specielle Dualität D zur Ausführung bringen, erhalten wir eine bestimmte dualistische Gruppe Γ. Jede andere zu G dualistische Gruppe geht alsdann dadurch hervor, dass wir Γ irgend einer projectiven Transformation unterwerfen, kurz, alle zu G dualistischen Gruppen sind „innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene gleichberechtigt“ mit der Gruppe Γ, wenn wir uns einer gelegentlich eingeführten Bezeichnungsweise bedienen, die wir allerdings früher nur für die eingliedrige Gruppe benutzten. (Vgl. § 2 des 3. Kap.)

Ausführung der spec. Dualität auf eine Gruppe.

Es wird sich also nur darum handeln, die Gruppe Γ zu finden, die aus G durch die specielle Dualität hervorgeht. Zu dem Zweck

bedenken wir, dass die specielle Dualität (14) des § 2 darin besteht, dass Punkt- und Liniencoordinaten mit einander vertauscht werden. Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe Γ ergeben sich also dadurch, dass wir die infinitesimalen Transformationen, welche die Liniencoordinaten bei ihnen erfahren, bestimmen. Dies geschieht nach der in § 1 gegebenen Methode, indem an Stelle der dortigen Function Ω die Function

$$\Omega \equiv ux + vy + 1,$$

an Stelle der dortigen $a_1, a_2 ..$ hier u, v treten. Im letzten Beispiel des § 1 haben wir ein specielleres derartiges Problem behandelt. Wir ersparen uns daher hier die Rechnung und geben nur das Resultat an:

Es ergiebt sich, dass die acht infinitesimalen projectiven Transformationen durch Hinzunahme der Transformationen der Liniencoordinaten diese werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + u^2 \frac{\partial f}{\partial u} + uv \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + uv \frac{\partial f}{\partial u} + v^2 \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$y \frac{\partial f}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$xy \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Indem wir nun u, v als neue Punktcoordinaten verwerten, sehen wir, dass die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial x}$ vermöge der Dualität D übergeht in $x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}$ u. s. w. Bezeichnen wir mit $\sim$ die Worte „dualistisch vermöge D mit“, so können wir also die folgende Tafel zusammenstellen:

Die bei der speciellen Dualität dualistisch. infinitesim. Transform.

$$p \sim x^2 p + xyq, \quad q \sim xyp + y^2 q,$$

$$xp \sim -xp, \quad yq \sim -yq,$$

$$xq \sim -yp.$$

Die rechts und links vom Zeichen $\sim$ stehenden Transformationen können in dieser Tafel mit einander vertauscht werden, da die specielle Dualität D symmetrisch, also $D^{-1} = D$ ist.

Ist z. B. die vorgelegte Gruppe G die Gruppe aller projectiven Transformationen, die den Anfangspunkt in Ruhe lassen (vgl. § 4 des 4. Kap.):

$$xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q,$$

so ist die vermöge D dazu dualistische Gruppe Γ nach unserer Tafel diese:

$$xp, \quad xq, \quad yp, \quad yq, \quad p, \quad q,$$

d. h. die Gruppe aller linearen Transformationen. G ist *definiert* als Inbegriff aller projectiven Transformationen, welche den Anfangspunkt in Ruhe lassen, Γ als der aller, welche die unendlich ferne Gerade in Ruhe lassen. D aber führt gerade den Anfangspunkt in die unendlich ferne Gerade über. Denn man erhält allgemein die Gerade g, in welche ein Punkt p bei D übergeht, indem man auf dem Radius vector von p in einem solchen Abstand vom Anfangspunkt das Lot g errichtet, dass das Product aus Radius vector und Abstand gleich -1 ist, sodass also p und g auf entgegengesetzter Seite vom Anfangspunkt liegen. Rückt p in den Anfangspunkt, so wird g unendlich fern. Wir haben hier also eine Bestätigung unseres Satzes 14 in einem Beispiele gefunden.

Kapitel 11.

Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene.

Wir sind nunmehr soweit ausgerüstet, um alle projectiven Gruppen der Ebene zu bestimmen und durch projective Umformung, d. h. durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge passender projectiver Transformationen, auf typische Formen zu bringen. Bei Erledigung dieses Problems haben diejenigen infinitesimalen projectiven Transformationen, welche zum Typus q (vgl. § 3 des 3. Kap.) gehören, besondere Bedeutung. Da wir also von ihnen mehreres zu sagen haben werden, so erscheint eine kurze Bezeichnung für diese angebracht. Man nennt sie hin und wieder ausgeartet perspective Transformationen, wir wollen sie aber kürzer als *Elationen* bezeichnen*).

---

*) Es mag hier hervorgehoben werden, dass auch bei Untersuchungen in n Veränderlichen über projective Gruppen, die eine grosse Anzahl Parameter enthalten, die Betrachtung der in ihnen enthaltenen Elationen sehr oft fruchtbar ist.

§ 1. Bestimmung aller mehr als viergliedrigen projectiven Gruppen.

Elation.

Unter *Elationen* verstehen wir die infinitesimalen Transformationen der Ebene, welche innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe mit der infinitesimalen Translation q gleichberechtigt sind, also aus dieser durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge projectiver Transformation hervorgehen. Das invariante Punkt- und Geradengebilde einer Elation besteht nach § 4 des 3. Kap. aus allen Punkten einer Geraden und aus allen Geraden durch einen auf der ersteren Geraden gelegenen Punkt. (Siehe Fig. 27.) Es ist demnach charakterisiert durch jene Gerade und diesen Punkt auf ihr, durch den Inbegriff einer Geraden und eines auf ihr liegenden Punktes, wir sagen: durch ein *Linienelement.* Umgekehrt ist eine Elation durch ihr invariantes Punkt- und Geradengebilde völlig definiert. Geometrisch ist demnach eine Elation völlig bestimmt, sobald man ihr Linienelement angegeben hat.

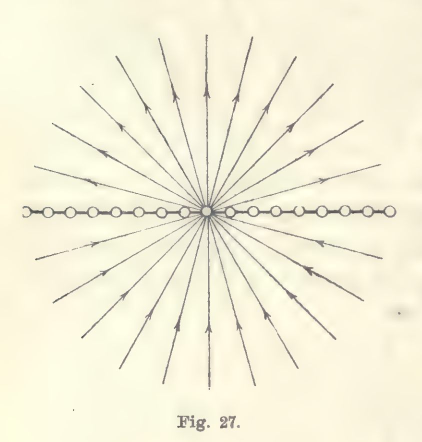


Fig. 27.

Es sind mehrere Fälle denkbar:

Liegt die Gerade des Linienelementes unendlich fern, so ist die Elation eine Translation $ap + bq$. Liegt nur der Punkt unendlich fern, die Gerade aber sonst im Endlichen:

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

so ist jede Parallelgerade bei der Elation invariant, insbesondere also auch die unendlich ferne Gerade. Die Elation ist daher zunächst linear (Satz 10, § 3 des 3. Kap.):

$$(ax + by + c)p + (dx + ey + f)q.$$

Da jeder Punkt der Geraden $\lambda x + \mu y + \nu = 0$ invariant bleiben soll, so müssen $ax + by + c$ und $dx + ey + f$ proportional $\lambda x + \mu y + \nu$ sein, sodass das Symbol die Form annimmt:

$$(\lambda x + \mu y + \nu)(\alpha p + \beta q).$$

Nun muss noch $\delta(\lambda x + \mu y)$ gleich Null sein vermöge $\lambda x + \mu y = \text{Const.}$ Es ist also $\lambda\alpha + \mu\beta$ gleich Null, daher:

$$\alpha : \beta = - \mu : \lambda,$$

sodass endgültig das Symbol der Elation so lautet:

$$(\lambda x + \mu y + \nu)(\mu p - \lambda q).$$

Wenn drittens — und dies ist der allgemeine Fall — Punkt und Gerade des Linienelementes im Endlichen liegen, der Punkt an der Stelle (x_0, y_0), die Gerade an der Stelle:

$$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0,$$

so wird die Elation durch Einführung neuer Veränderlicher

$$\bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0$$

in eine solche übergeführt, bei welcher der Anfangspunkt und die Gerade

$$\lambda\bar{x} + \mu\bar{y} = 0$$

das Linienelement bestimmen. Jeder Punkt dieser Geraden bleibt invariant, wenn die Incremente der Coordinaten vermöge $\lambda\bar{x} + \mu\bar{y} = 0$ verschwinden, sodass die Elation als projective Transformation zunächst ein Symbol hat von der Form:

$$(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y})\left((\alpha + \gamma\bar{x})\bar{p} + (\beta + \gamma\bar{y})\bar{q}\right).$$

Jede Gerade $\bar{y}$ — Const. $\bar{x} = 0$ soll invariant bleiben. Es ist folglich $\alpha = \beta = 0$. Setzen wir wieder:

$$x = \bar{x} + x_0, \quad y = \bar{y} + y_0,$$

so ergiebt sich das gewünschte Symbol der Elation:

$$(1) \qquad \left(\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0)\right)\left((x - x_0)p + (y - y_0)q\right).$$

Da zu jedem Linienelement — Inbegriff von Punkt und hindurchgehender Geraden — eine und nur eine Elation gehört, so giebt es gerade ∞^3 Elationen überhaupt.

Man kann sich fragen, für welche Werte der Constanten $a, b \ldots k$ die allgemeine infinitesimale projective Transformation

$$Uf \equiv ap + bq + cxp + dyp + exq + gyq + h(x^2p + xyq) + k(xyp + y^2q)$$

insbesondere eine Elation vorstellt. Es müssen sich dafür — da es ∞^7 infinitesimale projective Transformationen Uf giebt — gerade $7 - 3 = 4$ homogene Bedingungen zwischen $a, b \ldots k$ ergeben. Wir erhalten sie, indem wir Uf mit der allgemeinsten Elation (1) vergleichen. Zunächst kommt:

$$\begin{aligned} \lambda x_0^2 + \mu x_0 y_0 &= a, & \lambda x_0 y_0 + \mu y_0^2 &= b, \\ -2\lambda x_0 - \mu y_0 &= c, & -2\mu y_0 - \lambda x_0 &= g, \\ -\mu x_0 &= d, & -\lambda y_0 &= e, \\ \lambda &= h, & \mu &= k. \end{aligned}$$

Eliminieren wir hieraus λ, μ, x_0, y_0, so ergeben sich diese Bedingungen:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\equiv 2dh^2 - chk + ek^2 = 0,\\ \Phi_2 &\equiv dh^2 - ghk + 2ek^2 = 0,\\ \Phi_3 &\equiv d^2h^2 - ahk^2 + dek^2 = 0,\\ \Phi_4 &\equiv edh^2 - bh^2k + e^2k^2 = 0.\end{aligned}$$

Doch wurde hierbei vorausgesetzt, dass h und k nicht beide verschwinden. Sind h und k beide Null, so ergiebt der Vergleich mit

$$(\lambda x + \mu y + \nu)\,(\mu p - \lambda q)$$

offenbar noch drei Relationen, da es ∞^5 lineare Uf giebt, aber ∞^2 Elationen mit unendlich fernem Punkt vorhanden sind. *Im allgemeinen aber, wenn Uf nicht linear ist, werden die Elationen Uf durch vier von einander unabhängige Relationen $\Phi_i = 0$ zwischen $a, b\,..\,k$ bestimmt.*

Anzahl der Elationen in einer projectiven Gruppe.

Es möge nun eine r-gliedrige projective Gruppe G_r der Ebene $(r < 8)$ vorliegen. Ihre ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen sind, wie wir wissen, aus r von einander unabhängigen ableitbar in der Form

$$Uf \equiv c_1 U_1 f + \cdots + c_r U_r f.$$

Die Coefficienten $a, b\,..\,k$ der Uf sind demnach lineare homogene Functionen der ganz willkürlichen $c_1\,..\,c_r$. Zwischen ihnen bestehen also $8 - r$ Relationen, die frei von $c_1\,..\,c_r$ sind. Sobald $a, b\,..\,k$ diese $8 - r$ Relationen erfüllen, ist umgekehrt die zugehörige Uf linear aus $U_1 f \ldots U_r f$ ableitbar. Aus allen ∞^7 infinitesimalen projectiven Transformationen Uf werden also die der Gruppe G_r angehörigen dadurch herausgehoben, dass man ihre Coefficienten $a, b\,..\,k$ gewissen $8 - r$ homogenen Relationen unterwirft.

Siebengliedrige Gruppe.

Die infinitesimalen Transformationen einer 7-gliedrigen projectiven G_7 sind also durch *eine* homogene Relation $\Psi = 0$ zwischen $a, b\,..\,k$ definiert. Andererseits sind alle ∞^3 Elationen Uf durch *vier* homogene Relationen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, $\Phi_4 = 0$ zwischen $a, b\,..\,k$ definiert. Ist nun $\Psi = 0$ eine Folge dieser vier Gleichungen $\Phi_i = 0$, so folgt, dass G_7 alle ∞^3 Elationen, also auch diejenigen mit unendlich fernem Linienelement oder unendlich fernem Punkt, enthält. Ist dagegen $\Psi = 0$ von jenen Gleichungen unabhängig, so enthält G_7 nur ∞^2 Elationen. Im ersteren Fall muss die G_7 insbesondere die Elationen

$$p, \quad q, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q$$

enthalten. Nach dem Hauptsatz enthält sie dann auch die durch Klammerbildung hervorgehenden

$$2xp + yq, \quad xq, \quad xp + 2yq, \quad yp,$$

d. h. überhaupt alle infinitesimalen projectiven Transformationen, was damit in Widerspruch steht, dass G_7 nur 7-gliedrig ist. *Eine projective G_7 kann somit gerade nur ∞^2 Elationen enthalten.* Der Fall, dass h und k beide in der G_7 stets Null sind, kommt ja ebenfalls hier nicht in betracht, da sonst offenbar die Gruppe nur 6-gliedrig wäre. Wir können auch sagen: *Die allgemeine projective Gruppe G_8 ist die einzige, die alle ∞^3 Elationen enthält.*

Sechsgliedrige Gruppe.

Eine projective G_6 enthält ∞^2 oder ∞^1 Elationen, denn bei ihr sind $a, b \dots k$ an zwei Relationen $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ gebunden. Sind sie von $\Phi_1 = 0, \dots \Phi_4 = 0$ unabhängig, so giebt es nur $\infty^{3-2} = \infty^1$ Elationen in der G_6, ist eine abhängig, so giebt es $\infty^{3-1} = \infty^2$ Elationen. Wären beide abhängig, so würde G_6 alle ∞^3 Elationen enthalten, was nach Obigem unmöglich ist. Auch im Fall, dass h und k für alle Uf der G_6 Null sind, ist diese Betrachtung richtig, denn dann ist die G_6 die allgemeine lineare Gruppe mit ∞^2 Elationen.

Fünfgliedrige Gruppe.

Ebenso sieht man leicht ein, *dass eine projective G_5 gerade ∞^2 oder ∞^1 oder ∞^0* (d. h. eine discrete Anzahl) *Elationen und zwar im letzteren Falle, da die $a, b \dots k$ sich aus homogenen Gleichungen bestimmen, sicher mindestens eine Elation enthält.* Wenn h und k beide Null sind bei allen Uf der G_5, so besteht zwischen den übrigen $a, b \dots g$ eine homogene Relation infolge der Gruppeneigenschaft, während für die Elationen noch drei homogene Relationen hinzutreten. Demnach enthält eine fünfgliedrige lineare Gruppe auch (und zwar mindestens ∞^1) Elationen.

Satz 1: *Die einzige projective Gruppe, welche alle ∞^3 Elationen enthält, ist die allgemeine achtgliedrige. Eine siebengliedrige muss gerade ∞^2, eine sechsgliedrige ∞^2 oder ∞^1 und eine fünfgliedrige ∞^2 oder ∞^1 oder wenigstens eine oder einige Elationen enthalten.*

Beispiele.

1. Beispiel: Die allgemeine lineare Gruppe

$$p, \quad q, \quad xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq$$

enthält alle ∞^2 Elationen mit unendlich fernem Punkte. Wir stellen sie in Figur 28 schematisch dar, indem wir jede Elation durch ihr zugehöriges Linienelement andeuten.

2. Beispiel: Bei der Gruppe, bestehend aus allen projectiven Transformationen, welche den Anfangspunkt in Ruhe lassen:

Fig. 28.

$$xp, \quad yp, \quad xq, \quad yq, \quad x^2p + xyq, \quad xyp + y^2q$$

giebt es keine Elation mit Linienelementen, deren Geraden unendlich fern sind. Wohl aber giebt es hier Elationen mit unendlich fernem Punkte, nämlich alle diese:

$$(\lambda x + \mu y)(\mu p - \lambda q),$$

sowie alle Elationen

$$[\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0)][(x - x_0)p + (y - y_0)q],$$

bei denen

$$\lambda x_0 + \mu y_0 = 0$$

ist. Demnach enthält die Gruppe nur solche Elationen, deren Linienelemente sämtlich als Geraden Strahlen vom Anfangspunkt aus haben. Diese Linienelemente sind also wie in Figur 29 angeordnet. Das von diesen Linienelementen erzeugte geometrische Gebilde ist ein Strahlenbüschel vom Anfangspunkt aus, und dies Büschel wird von allen Transformationen der Gruppe in sich übergeführt. Dies deckt sich damit, dass die Gruppe die Differentialgleichung

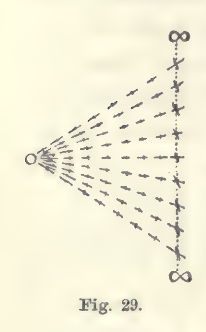


Fig. 29.

$$xy' - y = 0$$

invariant lässt, welche zu jedem Punkt (x, y) die Richtung $y' = \frac{y}{x}$ der Geraden des Linienelementes angiebt.

Die bei diesem Beispiel gemachte Bemerkung lässt sich verallgemeinern. Da nämlich eine Elation durch ihr invariantes Punkt- und Geradengebilde charakterisiert ist, so folgt aus Satz 9, § 2 des 3. Kap.:

Satz 2: *Führt man auf eine Elation irgend eine projective Transformation aus, so geht die Elation wieder in eine Elation und gleichzeitig ihr Linienelement in das der neuen über.*

Wenn nun auf eine projective Gruppe G_r irgend eine Transformation der Gruppe ausgeführt wird, so geht die Gruppe nach Satz 6, § 4 des 6. Kap., in sich über, sodass ihre Elationen unter einander vertauscht werden. Die Linienelemente dieser Elationen werden also ebenfalls unter einander vertauscht, sie bilden eine invariante Schar.

Figur der Linienelemente der Elationen.

Satz 3: *Eine projective Gruppe lässt die von den Linienelementen ihrer Elationen gebildete Figur invariant.*

Wir knüpfen hieran noch Eines an: Wenn wir auf eine Elation eine Dualität ausüben, so geht ihr invariantes Gebilde, bestehend aus ∞^1 invarianten Punkten und ∞^1 invarianten Geraden, in ein ebensolches über, da die Dualität Punkt und Gerade vertauscht und vereinigte Punkte und Geraden in vereinigte Geraden und Punkte überführt. Also folgt mit Rücksicht auf Satz 14, § 4 des 10. Kap.:

Satz 4: *Eine Dualität führt jede Elation wieder in eine Elation und das Linienelement der einen in das der andern über.*

Von diesen Sätzen machen wir nun Gebrauch, um die projectiven G_7, G_6, G_5 zu bestimmen. Nach Satz 1 kann eine derartige Gruppe G_r ($r = 7, 6, 5$) zunächst ∞^2 Elationen enthalten. Fassen wir diesen Fall jetzt ins Auge. Entweder besitzen die Linienelemente dieser Elationen ∞^2 verschiedene Geraden oder nur ∞^1. Im ersteren Fall sind sie die Tangenten von ∞^1 Curven, oder alle Geraden gehen von den Punkten einer Curve aus. Sehen wir jedoch vorerst von letzterer Annahme ab. Nach Satz 3 ist der Inbegriff jener ∞^1 Curven oder jener ∞^1 Geraden bei der Gruppe G_r invariant.

Wenn aber eine Schar von ∞^1 Curven alle ∞^r Transformationen der G_r zulässt, so muss jede einzelne Curve nach Satz 3, § 1 des 10. Kap., mindestens ∞^{r-1} projective Transformationen gestatten. Da nun $r > 4$ ist, so gestattet jede dieser Curven mindestens ∞^4 projective Transformationen, insbesondere ∞^3 infinitesimale. Nach Theorem 7, § 4 des 3. Kap., sind sie also Geraden. Demnach liegen die ∞^2 Linienelemente der Elationen unserer G_r auf ∞^1 Geraden. Diese Geraden besitzen als Umhüllungsfigur eine Curve oder gehen sämtlich durch einen Punkt. Offenbar muss diese Curve oder dieser Punkt ebenfalls bei der G_r invariant sein. Die G_r enthält mindestens ∞^4 infinitesimale Transformationen. Nach Theorem 7 muss die Curve also eine Gerade sein. Alsdann lässt sie andererseits höchstens ∞^5 und nicht mehr zu. Ein Punkt ferner bleibt auch bei höchstens ∞^5 infinitesimalen projectiven Transformationen in Ruhe.

Invarianter Punkt oder invariante Curve.

In dem bisher ausgeschlossenen Falle, dass die ∞^2 Geraden der Linienelemente von den Punkten einer Curve ausgehen, ist diese Curve bei der G_r invariant und nach Theorem 7 eine Gerade, die überhaupt ∞^5 infinitesimale projective Transformationen zulässt.

Demnach kommen alle drei Fälle bei höchstens sechsgliedrigen Gruppen in betracht, und wir können sagen:

Satz 5: *Enthält eine mehr als viergliedrige projective Gruppe ∞^2 Elationen, so ist sie fünf- oder sechsgliedrig und lässt mindestens einen Punkt oder eine Gerade in Ruhe.*

Nach Satz 1 folgt also insbesondere:

Keine siebengliedrige proj. Gruppe.

Satz 6: *Es giebt keine siebengliedrige projective Gruppe der Ebene.*

Bestimmung der sechsgliedrigen Gruppen.

Jede G_6 mit ∞^2 Elationen lässt nach Satz 5 einen Punkt oder eine Gerade in Ruhe. Nehmen wir zunächst an, sie besitze eine invariante Gerade, so können wir diese durch Ausführung einer passenden projectiven Transformation in die unendlich ferne Gerade überführen. Alsdann geht die G_6 notwendig nach § 1 des 4. Kap. in die allgemeine lineare Gruppe über:

$$\left| \; p \quad q \quad xp \quad yp \quad xq \quad yq \; \right|.$$

Offenbar enthält diese wirklich ∞^2 Elationen, nämlich diese:

$$(\lambda x + \mu y + \nu)(\mu p - \lambda q).$$

Auch weiss man, dass diese Gruppe keinen Punkt in Ruhe lässt.

Eine G_6 mit ∞^2 Elationen, die einen Punkt in Ruhe lässt, geht dadurch, dass man auf sie eine Dualität Δ ausführt, in eine solche über, die eine Gerade in Ruhe lässt, nach Satz 14, § 4 des 10 Kap. Letztere Gruppe aber geht durch eine passende projective Transformation T in den soeben angegebenen Typus über. Nach Satz 10, § 4 des 10. Kap., kann daher jede G_6 mit ∞^2 Elationen durch Ausführung einer passenden projectiven Transformation oder einer passenden Dualität auf die allgemeine lineare Gruppe zurückgeführt werden. Satz 4 steht hiermit in Einklang: Alle diese G_6 enthalten ∞^2 Elationen.

Eine G_6 mit ∞^1 Elationen wird nach Satz 3 den Punktort ihrer Linienelemente invariant lassen. Ist er eine Curve, so wird diese Curve eine Gerade sein nach Theorem 7, § 4 des 3. Kap. Aber eine G_6 mit invarianter Geraden enthält ja ∞^2 Elationen. Ist jener Punktort nur ein Punkt, so erhalten wir eine G_6, welche einen Punkt in Ruhe lässt. Eine solche aber enthält auch ∞^2 Elationen. Also:

Satz 7: *Jede sechsgliedrige projective Gruppe der Ebene lässt einen Punkt oder eine Gerade invariant; sie besteht aus allen projectiven Transformationen, die einen Punkt oder aber eine Gerade in Ruhe lassen. Die Gruppen der einen Art gehen in die der anderen vermöge passender Dualitäten über. Jede sechsgliedrige projective Gruppe ist vermöge einer geeigneten projectiven Transformation oder Dualität in die allgemeine lineare Gruppe*

$$p \quad q \quad xp \quad yp \quad xq \quad yq$$

überführbar.

Es ist unmittelbar klar, dass diese G_6 nicht in eine dazu dualistische vermöge einer projectiven Transformation verwandelt werden kann, da sie eine Gerade, jede dualistische aber einen Punkt in Ruhe lässt. Nach § 4 des vorigen Kapitels können wir für die zum obigen Typus dualistischen G_6 — wenn wir von der in jenem Paragraphen zum Schluss gegebenen Tabelle Gebrauch machen — den Typus angeben:

$$\left| \; xp \quad yp \quad xq \quad yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q \; \right|.$$

Es ist dies die grösste projective Gruppe, welche den Anfangspunkt in Ruhe lässt.

Eine projective G_5, die ∞^2 Elationen enthält, lässt nach Satz 5 mindestens einen Punkt oder eine Gerade in Ruhe. Eine projective G_5 kann aber nach Satz 1 auch ∞^1 oder einige Elationen enthalten. Enthält sie gerade ∞^1 Elationen, so ist der Punktort ihrer Linienelemente nach Satz 3 invariant, also nach dem öfters citierten Theorem 7 eine Gerade oder nur ein Punkt. Enthält die G_5 nur einige Elationen, so sind die Linienelemente derselben einzeln invariant. Sie lässt also auch dann Punkt und Gerade in Ruhe. Eine projective G_5 lässt folglich sicher wenigstens einen Punkt oder eine Gerade in Ruhe. Wir werden sehen, dass der Fall, dass die G_5 nur eine discrete Anzahl von Elationen enthält, in der That gar nicht vorkommt*).

Bestimmung der fünfgliedrigen Gruppen.

Kennt man alle projectiven G_5, die eine Gerade in Ruhe lassen, so kennt man auch alle, die einen Punkt in Ruhe lassen, denn die einen gehen aus den anderen durch Ausübung einer Dualität hervor. Wir werden daher unser Augenmerk nur darauf richten, alle projectiven G_5 zu finden, die eine Gerade invariant lassen. Natürlich lässt sich diese Gerade durch eine geeignete projective Variabelnänderung in die unendlich ferne Gerade überführen. Dann aber besteht die Gruppe nach § 1 des 4. Kap. aus linearen Transformationen. Eine infinitesimale lineare Transformation

$$Uf \equiv ap + bq + cxp + dyp + exq + gyq$$

vertauscht nun die Punkte der invarianten unendlich fernen Geraden ebenso unter einander, wie die zugehörige sogenannte *verkürzte* infinitesimale Transformation

$$\overline{U}f \equiv cxp + dyp + exq + gyq,$$

da das Increment, das y' bei Uf erfährt, von a und b frei ist und andererseits y' als Coordinate der unendlich fernen Punkte — vgl. § 3 des 3. Kap. — benutzt werden darf.

Wenn wir nun in unserer G_5, die die unabhängigen infinitesimalen Transformationen $U_1f \dots U_5f$ enthalte, alle Uf in dieser Weise verkürzen, so erzeugen die entstehenden $\overline{U}_1f \dots \overline{U}_5f$ wieder eine Gruppe.

Verkürzte Gruppe.

*) Es ist übrigens von vornherein klar, dass eine G_5, die mehr als eine Elation, aber eine discrete Anzahl Elationen enthält, nicht vorhanden ist. Denn die Linienelemente dieser Elationen würden in ihren Punkten sowie in den Schnittpunkten ihrer Geraden eine discrete Anzahl von Punkten geben, die höchstens bei einer infinitesimalen projectiven Transformation in Ruhe bleiben. Dass auch projective G_5 mit nur einer Elation unmöglich sind, wird die folgende Überlegung zeigen.

Denn offenbar hängen in den $(U_i U_k)$ die Coefficienten von xp, yp, xq, yq nicht von den a und b ab. Mit

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^5 {}_s c_{iks} U_s f$$

ist daher auch

$$(\overline{U}_i \overline{U}_k) \equiv \sum_1^5 {}_s c_{iks} \overline{U}_s f.$$

Hieraus aber folgt nach dem Hauptsatze die Richtigkeit der Behauptung ohne weiteres. Wir sagen daher:

Satz 8: *Eine lineare Gruppe transformiert die Punkte der unendlich fernen Geraden genau so wie die zugehörige verkürzte lineare homogene Gruppe.*

Wir haben nun diese linearen homogenen Gruppen sämtlich durch lineare Transformationen, die ja Translationen in Translationen verwandeln, auf gewisse typische Formen in § 4 des 5. Kap. zurückgeführt und können von diesen Typen Gebrauch machen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die verkürzte Gruppe offenbar viergliedrig ist, wenn die G_5 gerade *eine* infinitesimale Translation, und nur dreigliedrig, wenn sie alle infinitesimalen Translationen enthält. Der Fall, dass G_5 keine infinitesimalen Translationen enthielte, ist unmöglich, da es ausser ihnen nur vier von einander unabhängige lineare homogene Transformationen giebt. Die verkürzte lineare homogene Gruppe kann also nach Theorem 16, § 4 des 5. Kap., in einer der drei Formen angenommen werden:

$$xp \quad yp \quad xq \quad yq,$$
$$xq \quad xp - yq \quad yp,$$
$$xp \quad xq \quad yq.$$

Im ersten Fall wird die gesuchte G_5 zunächst die Form haben müssen:

$$\lambda p + \mu q, \quad xp + \cdot\cdot, \quad yp + \cdot\cdot, \quad xq + \cdot\cdot, \quad yq + \cdots.$$

Hierin bedeuten die Punkte solche Glieder, die nur Translationen p, q mit irgend welchen Coefficienten enthalten. Nun aber kommt:

$$(\lambda p + \mu q, \quad xp + \cdots) = \lambda p,$$
$$(\lambda p + \mu q, \quad yq + \cdots) = \mu q,$$

d. h. die G_5 enthält λp und μq, da Klammeroperation zwischen den infinitesimalen Transformationen der Gruppe nach dem Hauptsatze immer nur wieder zu Transformationen der Gruppe führen kann. Da nun G_5 nur eine Translation enthält, so ist also λ oder μ gleich Null. Sagen wir: G_5 enthält p und nicht q. Alsdann ist

$$(p, \quad xq + \cdot\cdot) = q.$$

Dies giebt einen Widerspruch. Es ist also keine G_5 von dieser Art vorhanden.

Im zweiten Fall hat die G_5 zunächst die Form:

$$p, \quad q, \quad xq + \cdot\cdot, \quad xp - yq + \cdot\cdot, \quad yp + \cdot\cdot,$$

wo wieder die angedeuteten Glieder die Form Const. p + Const. q haben. Die G_5 enthält alsdann auch xq, $xp - yq$, yp selbst, da sie linear aus den vorstehenden abgeleitet werden können. Also ergiebt sich der Typus:

$$\boxed{p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp}.$$

Im dritten Fall endlich kommt analog der Typus:

$$\boxed{p \quad q \quad xp \quad xq \quad yq}.$$

Es haben sich also zwei projective G_5 ergeben, welche eine Gerade in Ruhe lassen. Dass dieselben durch projective Transformation nicht in einander überführbar sind, ist leicht einzusehen. Denn die erstere Gruppe lässt keinen Punkt, weder im Endlichen noch im Unendlichfernen, in Ruhe, während die zweite einen Punkt, nämlich den unendlichfernen Punkt der y-Axe, invariant lässt.

Die erste Gruppe lässt sich also charakterisieren als der Typus der fünfgliedrigen projectiven Gruppen, welche nur eine Gerade und keinen Punkt, die zweite als der Typus derjenigen, welche eine Gerade und einen Punkt auf ihr, also ein Linienelement, in Ruhe lassen.

Die G_5, welche einen Punkt in Ruhe lassen, ergeben sich durch Dualität aus den gefundenen. Die aus der zweiten Gruppe dadurch hervorgehenden Gruppen lassen wie diese ein Linienelement in Ruhe, sind also auch direct durch projective Transformation aus ihr ableitbar. Dagegen kann man die zur ersten G_5 dualistischen nicht durch projective Transformation aus ihr erhalten, da ihr invariantes Gebilde durch Dualität in ein andersartiges übergeht, nämlich die Gerade in einen Punkt verwandelt wird. Als Typus der zur ersten G_5 dualistischen kann man nach der Anleitung des § 4 des vorigen Kapitels diesen wählen:

$$\boxed{xq \quad xp - yq \quad yp \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q}.$$

Es ist dies eine projective G_5, welche nur den Anfangspunkt und sonst keinen Punkt und keine Gerade invariant lässt.

Man sieht ein, dass jede projective G_5 ∞^2 oder ∞^1 Elationen

enthält. Man braucht zu dem Ende nur alle Elationen der G_5 nach der früher angegebenen Methode zu berechnen. Die Linienelemente der ∞^2 Elationen des ersten Typus sind sämtliche Linienelemente, deren Punkte unendlich fern liegen, die der ∞^1 Elationen des zweiten Typus sämtliche Linienelemente, deren Punkt der unendlich ferne der y-Axe ist, sowie sämtliche Linienelemente, deren Gerade die unendlich ferne ist.

Es giebt also keine projective G_5 mit einer discreten Anzahl von Elationen.

Zusammenstellung.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen in dem

Theorem 24: *Jede mehr als viergliedrige projective Gruppe der Ebene mit paarweis inversen Transformationen ist durch projective Transformation in eine der folgenden überführbar:*

$$p \quad q \quad xp \quad yp \quad xq \quad yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q,$$

$$p \quad q \quad xp \quad yp \quad xq \quad yq,$$

$$xp \quad yp \quad xq \quad yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q,$$

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp,$$

$$xq \quad xp - yq \quad yp \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q,$$

$$p \quad q \quad xp \quad xq \quad yq.$$

Keine dieser Gruppen ist überzählig. Wohl aber lässt sich durch Dualität die zweite in die dritte und die vierte in die fünfte überführen.

§ 2. Vorbemerkungen über die übrigen projectiven Gruppen.

Für alle weniger als fünfgliedrigen projectiven Gruppen lassen sich einige allgemeine Sätze vorausschicken, welche die Bestimmung dieser Gruppen erleichtern werden. Ein Teil dieser allgemeinen Sätze lässt sich übrigens, wie wir später sehen werden, auch auf nicht-projective Gruppen ausdehnen.

Ist eine projective G_r *intransitiv* (§ 1 des 8. Kap.), so lässt sie ∞^1 einzelne Curven in Ruhe, also umsomehr eine Schar von ∞^1 Curven.

Wir werden zeigen, dass auch jede *transitive* projective Gruppe, sobald sie *weniger als fünfgliedrig* ist, eine *Schar* von ∞^1 Curven — allerdings nicht bestehend aus ∞^1 einzeln invarianten Curven — in sich überführt.

Nachweis der Invarianz einer Curvenschar.

Wählen wir nämlich aus allen Transformationen einer solchen G_r gerade diejenigen aus, welche einen beliebig angenommenen Punkt p_0

von allgemeiner Lage in Ruhe lassen, so ergeben sich insgesamt bei unserer r-gliedrigen Gruppe gerade ∞^{r-2} Transformationen — denn wenn es mehr wären, so wäre die Gruppe intransitiv. Diese ∞^{r-2} Transformationen bilden eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe G_{r-2}. Nach § 2 des 10. Kap. kann sie auch aufgefasst werden als eine Gruppe, welche Geraden in Geraden verwandelt, indem man sie in Liniencoordinaten u, v schreibt. Insbesondere werden die Geraden durch den Punkt p_0 unter sich vertauscht, da p_0 in Ruhe bleibt. Ziehen wir nur diese Geraden in betracht, so können wir sagen, dass sie durch eine gewisse höchstens $(r-2)$-gliedrige projective Gruppe unter einander vertauscht werden. Diese braucht in u, v nicht gerade $(r-2)$-gliedrig zu sein, weil die ∞^{r-3} infinitesimalen Transformationen der G_{r-2}, geschrieben in u, v, für alle Geraden durch den Punkt p_0 unter Umständen teilweis zusammenfallen können.

Wir können diesen Gedankengang auch so darstellen: Es seien $U_1 f \,.\,.\, U_{r-2} f$ die infinitesimalen Transformationen der G_r, welche einen bestimmten Punkt p_0, etwa den Anfangspunkt selbst, invariant lassen, und also sei für die von ihnen gebildete Gruppe G_{r-2} nach dem Hauptsatz allgemein:

$$(U_i U_k) \equiv \Sigma c_{iks} U_s f. \tag{2}$$

Die Uf haben als projective Transformationen, die den Punkt $x = y = 0$ in Ruhe lassen, die Form:

$$U_k f \equiv (a_k x + b_k y) p + (a_k' x + b_k' y) q + \\ + (\lambda_k x + \mu_k y)(xp + yq),$$

setzen sich also aus einer homogenen linearen und einer Transformation mit Gliedern zweiten Grades in x, y zusammen. Indem wir diese beiden Teile mit $L_k f$ und $Z_k f$ bezeichnen, setzen wir also:

$$U_k f \equiv L_k f + Z_k f.$$

Dann ist nach (2):

$$(L_i L_k) + (L_i Z_k) + (L_k Z_i) + (Z_i Z_k) \equiv \Sigma c_{iks}(L_s f + Z_s f).$$

Die Klammerausdrücke $(L_i L_k)$ sind homogen und linear in x, y, die übrigen quadratisch. Daher ist auch

$$(L_i L_k) \equiv \Sigma c_{iks} L_s f.$$

Die $L_i f$ bilden also für sich eine lineare homogene Gruppe. Betrachten wir nun die durch den Anfangspunkt gehenden Geraden, die durch die Richtungsgrösse $y' = \frac{dy}{dx}$ bestimmt werden. Das Increment, das y' bei $U_k f$ erfährt, ist, wie man leicht einsieht, nur von $L_k f$ abhängig, sobald in ihm $x = y = 0$ gesetzt wird. Also geben die $L_k f$ solche

Transformationen der Punkte der Ebene, welche die Geraden durch den Anfangspunkt gerade so unter einander vertauschen wie die $U_k f$ selbst. Die $L_k f$ bilden für sich eine lineare homogene und zwar höchstens auch $(r-2)$-gliedrige Gruppe.

Ist nun $r < 5$, so ist diese Gruppe höchstens zweigliedrig und lässt demnach mindestens eine Gerade durch den Anfangspunkt invariant. (Vgl. Theorem 17, § 4 des 5. Kap.)

Hätten wir an Stelle des Anfangspunktes irgend einen Punkt p_0 fest halten wollen, so hätten wir ihn nur zuvörderst durch eine Translation in den Anfangspunkt zu überführen brauchen, um alsdann dieselbe Betrachtung anstellen zu können.

Also ergiebt sich:

Satz 9: *Alle diejenigen Transformationen einer höchstens viergliedrigen transitiven projectiven Gruppe der Ebene, die einen Punkt p_0 von allgemeiner Lage in Ruhe lassen, lassen ebenfalls wenigstens eine durch p_0 gehende Gerade g_0 in Ruhe. Für intransitive projective Gruppen ist dieser Satz selbstverständlich.*

Da die G_r transitiv ist, so giebt es nun sicher Transformationen T in ihr, die p_0 in irgend einen anderen bestimmt gewählten Punkt p allgemeiner Lage überführen. Sie führen dann sämtlich die Gerade g_0 in ein und dieselbe Gerade g durch p über.

Um dies zu beweisen, seien die Transformationen der Gruppe, die p_0 invariant lassen, mit S_0, die aber, die p invariant lassen, mit S bezeichnet. Alsdann ist stets:

$$(p_0)S_0 = (p_0), \quad (p)S = (p)$$
$$(g_0)S_0 = (g_0), \quad (p_0)T = (p).$$

Eine bestimmte T, etwa T_0, führe g_0 in die Gerade g durch p über, sodass

$$(g_0)T_0 = (g)$$

ist. Ferner kann in

$$(p)S = (p)$$

der Punkt (p) durch $(p_0)T_0$ ersetzt werden, sodass kommt:

$$(p_0)T_0 S = (p_0)T_0$$

oder

$$(p_0)T_0 S T_0^{-1} = (p_0).$$

Also gehört $T_0 S T_0^{-1}$ zu den S_0, die p_0 invariant lassen:

$$T_0 S T_0^{-1} = S_0,$$

sodass

$$S = T_0^{-1} S_0 T_0$$

wird. Folglich ist nun

$$(g)S = (g) T_0^{-1} S_0 T_0.$$

Da jedoch

$$(g) T_0^{-1} = (g_0)$$

ist, so liefert dies:

$$(g)S = (g_0) S_0 T_0 = (g_0) T_0 = (g),$$

d. h. jede Transformation S der G_r, die p in Ruhe lässt, lässt auch g in Ruhe. Ferner folgt aus

$$(p_0) T = (p), \quad (p_0) T_0 = (p)$$

auch

$$(p) T^{-1} = (p) T_0^{-1},$$

also

$$(p) = (p) T_0^{-1} T.$$

Somit gehört $T_0^{-1} T$ zu den S, die p und, wie soeben bewiesen, auch g invariant lassen:

$$T_0^{-1} T = S.$$

Hieraus folgt:

$$T = T_0 S$$

oder, da $(g) T_0 = (g)$, $(g)S = (g)$ ist:

$$(g) T = (g),$$

was zu beweisen war.

Satz 10: *Führen alle Transformationen einer projectiven Gruppe, die einen Punkt allgemeiner Lage p_0 in Ruhe lassen, zugleich eine Gerade g_0 durch p_0 in sich über, so führen alle Transformationen der Gruppe, die p_0 nach einer Stelle p bringen, auch die Gerade g_0 in ein und dieselbe Gerade g über, die alsdann bei allen p invariant lassenden Transformationen der Gruppe ebenfalls in sich transformiert wird.*

Es ist natürlich denkbar, dass mit p_0 auch mehr als eine Gerade g_0 durch ihn invariant bleibt. Wir wählen in diesem Falle eine unter den Geraden g_0 aus und haben alsdann vermöge des Satzes auch jedem Punkt p der Ebene — da die G_r transitiv ist, also p_0 nach jeder Stelle p überführt — eine Gerade g durch ihn zugeordnet. Wir sagen: *Mit jedem Punkt p der Ebene ist eine durch ihn gehende Gerade g invariant verknüpft.*

Invariante Verknüpfg. v. Punkt u. Gerade.

Durch diese allen Punkten zugeordneten Richtungen werden ∞^1 Curven definiert, die Curven nämlich, welche in ihren Punkten p die betreffenden Geraden g zu Tangenten haben und die also, wenn y' die Tangentialneigung im Punkte (x, y) bezeichnet, durch eine gewisse Differentialgleichung erster Ordnung

$$f(x, y, y') = 0$$

definiert sind. Jede Transformation der Gruppe G_r führt die Curven dieser Schar in einander über, da sie zugeordnete Punkte und Geraden in ebensolche verwandelt. Also sehen wir:

Satz 11: *Jede höchstens viergliedrige projective Gruppe der Ebene lässt eine Schar von ∞^1 Curven invariant.*

Offenbar gilt dies ja auch für jede intransitive projective Gruppe.

Invariante Curve oder Punkt.

Diese Curvenschar wird nun eine Umhüllungsfigur besitzen, sei es eine Curve oder nur ein isolierter Punkt*). Jedenfalls muss die Gruppe diese Figur in sich überführen. Also folgt:

Satz 12: *Jede höchstens viergliedrige projective Gruppe der Ebene lässt wenigstens eine Curve oder einen Punkt in Ruhe.*

Die eventuell also vorhandene invariante Curve gestattet r infinitesimale projective Transformationen und ist demnach nach Theorem 7, § 4 des 3. Kap., im Fall $r = 4$ eine Gerade, im Fall $r = 3$ oder 2 eine Gerade oder ein Kegelschnitt. Im Fall $r = 1$ lässt die Gruppe nach Theorem 5, § 1 des 3. Kap., mindestens einen Punkt und eine Gerade in Ruhe. Zusammengefasst ergiebt sich also:

Satz 13: *Jede höchstens viergliedrige projective Gruppe der Ebene lässt mindestens einen Punkt oder eine Gerade oder einen Kegelschnitt in Ruhe. Ist sie viergliedrig, so sind nur die beiden ersten Fälle möglich.*

In Verbindung mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphen liefert dieser Satz noch:

Satz 14: *Jede projective Gruppe der Ebene — mit Ausnahme der allgemeinen achtgliedrigen — lässt mindestens einen Punkt oder eine Gerade oder einen Kegelschnitt in Ruhe.*

---

*) Allerdings ist die Existenz einer Umhüllungscurve nur dann sicher, wenn die Schar aus algebraischen Curven besteht. Wir schliessen exacter so: Eine Curve der Schar geht bei den ∞^r Transformationen der G_r in ∞^1 Curven über, sie gestattet daher nach Satz 3, § 1 des 10. Kap., $r - 1$ unabhängige infinitesimale projective Transformationen, also für $r > 2$ mindestens zwei, sodass dann nach Theorem 7, § 4 des 3. Kap., die Curven der Schar Geraden oder Kegelschnitte, mithin wirklich algebraische Curven sind. Ist $r = 2$, so kann die G_2 in der Form $U_1 f$, $U_2 f$ angenommen werden, dass $(U_1 U_2) = c\, U_1 f$ ist, wie man leicht sieht — vgl. „Dffgln. m. inf. Trf.", Satz 1, § 1 des 18. Kap. Alsdann gestattet die Schar der Integralcurven von $U_1 f = 0$, d. i. die der Bahncurven von $U_1 f$, alle infinitesimalen Transformationen $c_1 U_1 f + c_2 U_2 f$ der Gruppe, da diese mit $U_1 f$ combiniert Const. $U_1 f$ liefern. Vgl. „Dffgln. m. inf. Trf.", Theorem 9, § 2 des 6. Kap. Immer besitzt nun die Schar der Bahncurven von $U_1 f$ eine Umhüllungsfigur, bestehend aus Punkten oder Geraden, siehe Satz 23, § 4 des 3. Kap. Diese Figur bleibt also bei der Gruppe invariant. Der Fall $r = 1$ erledigt sich ohne weiteres.

§ 3. Bestimmung aller übrigen projectiven Gruppen der Ebene.

Wollen wir nun die 4-, 3- und 2-gliedrigen projectiven Gruppen bestimmen, so bemerken wir: Wenn eine solche G_r einen Punkt in Ruhe lässt, so lässt jede dazu dualistische Gruppe eine Gerade in Ruhe. Kennt man also alle G_r, die eine Gerade in Ruhe lassen, so kennt man auch alle, die einen Punkt invariant lassen. Wir suchen also nur alle G_r $(r = 4, 3, 2)$, die eine Gerade oder einen Kegelschnitt invariant lassen.

Invarianter Kegelschn.

Der *Kegelschnitt* kommt, wie wir sahen, nur bei den G_3 in betracht. Er kann durch eine geeignete projective Variabelnänderung nach Satz 14, § 4 des 3. Kap., auf die Form

$$x^2 - 2y = 0$$

gebracht werden und gestattet alsdann, wie wir schon in § 4 des 4. Kap. bewiesen, die infinitesimalen Transformationen:

$$\boxed{p + xq \quad xp + 2yq \quad (x^2 - y)p + xyq}\,.$$

Hiermit ist der Typus aller G_3 bestimmt, die einen Kegelschnitt in sich überführen.

Zur Gruppe des Kegelschnitts.

Wir fügen die wichtige Bemerkung hinzu: Diese G_3 transformiert die Punkte des Kegelschnittes unter einander, und wir können x als einziges Bestimmungsstück dieser Punkte betrachten, sodass die infinitesimalen Transformationen sich wegen $2y = x^2$ auf p, xp, x^2p reducieren. Es ist dies die allgemeine projective Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit x. Aus Theorem 15, § 2 des 5. Kap., folgt also, dass jede höchstens *zwei*gliedrige projective Gruppe, die einen Kegelschnitt invariant lässt, auf ihm auch einen Punkt, daher auch die Tangente dieses Punktes in Ruhe lässt, während der obige *drei*gliedrige Typus selbst weder einen Punkt noch eine Gerade der Ebene invariant lässt. Offenbar ist obiger Typus auch zu sich selbst dualistisch, nach Satz 8, § 3 des 10. Kap.

Invariante Gerade.

Nun handelt es sich nur noch um die Bestimmung der projectiven G_4, G_3, G_2, die eine Gerade in sich überführen. Diese Gerade kann ins Unendliche verlegt werden, sodass die gesuchten Gruppen nach § 1 des 4. Kap. linear, also Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppen werden. Verkürzen wir dieselben, wie es in § 1 bei der Bestimmung der G_5 geschah, sodass wir nur noch lineare homogene Transformationen vor uns haben, so bilden diese für sich eine Gruppe, vgl. Satz 8 des § 1. Die Typen dieser Gruppen sind aber in § 4

des 5. Kap. bestimmt worden. Es sind nach Theorem 16 jenes Paragraphen diese:

$$\begin{aligned}
&A)\ xp \quad yp \quad xq \quad yq,\\
&B)\ xq \quad xp - yq \quad yp,\\
&C)\ xq \quad yq \quad xp,\\
&D)\ xp \quad yq,\\
&E)\ xq \quad axp + byq,\\
&F)\ xq + a(xp + yq),\\
&G)\ axp + byq.
\end{aligned}$$

Um unsere G_r zu erhalten, haben wir nun zu diesen Transformationen jedesmal additive Glieder Const. p + Const. q sowie 2, 1 oder keine infinitesimale Translation $\lambda p + \mu q$ derart hinzuzufügen, dass sich wieder eine Gruppe ergiebt. Die Hinzufügung von Const. p + Const. q können wir ohne Schaden der Allgemeinheit bei $xp + yq$ stets unterlassen, da

$$xp + yq + ap + bq$$

durch Einführung der neuen Veränderlichen $x + a$, $y + b$ in $xp + yq$ übergeht.

Ferner bemerken wir, dass aus dem Vorhandensein von $xp + yq$ in der Gruppe folgender Schluss gezogen werden kann: Enthält die Gruppe etwa

$$\alpha p + \beta q + (\gamma x + \delta y)p + (\varepsilon x + \zeta y)q,$$

so lehrt die Klammeroperation mit $xp + yq$, die ja dann nach dem Hauptsatze eine Transformation der Gruppe giebt, dass die Gruppe $\alpha p + \beta q$ enthält. Die Gruppe enthält also dann einzeln:

$$\alpha p + \beta q, \quad (\gamma x + \delta y)p + (\varepsilon x + \zeta y)q.$$

Diese Bemerkung werden wir öfters verwerten.

Die viergliedrigen Gruppen.

Bestimmen wir zunächst die *viergliedrigen* Gruppen G_4, indem wir die Fälle A) bis G) einzeln behandeln.

A) Hier haben wir:

$$xq + \alpha p + \beta q \quad yp + \gamma p + \delta q \quad xq + \varepsilon p + \zeta q \quad yq + \eta p + \vartheta q.$$

Jede Klammeroperation soll nach dem Hauptsatze eine infinitesimale Transformation ergeben, die sich aus diesen vieren linear ableiten lässt. Da es so eingerichtet werden kann, dass die Gruppe $xp + yq$ enthält, so folgt, dass xp, xq, yp, yq sämtlich ohne additive Glieder auftreten, weil sonst die Gruppe nach unserer allgemeinen Bemerkung noch Translationen enthielte, also mehr als viergliedrig wäre. Somit erhalten wir den Typus:

$$\boxed{xp \quad xq \quad yp \quad yq},$$

die allgemeine lineare homogene Gruppe. Man kann sie definieren als den Typus aller projectiven Gruppen, welche nur eine Gerade — hier die unendlich ferne — und nur einen nicht auf der Geraden liegenden Punkt — hier den Anfangspunkt — in Ruhe lassen. Hieraus folgt sofort, dass sie in jede mit ihr dualistische Gruppe durch projective Transformation überführbar ist.

B) Hier kommt, da die Gruppe viergliedrig sein soll, eine Translation selbständig vor:

$$xq + \cdot\cdot, \quad xp - yq + \cdot\cdot, \quad yp + \cdot\cdot, \quad \lambda p + \mu q.$$

Die nur angedeuteten Glieder sollen hier, wie in Folgendem, von der Form Const. p + Const. q sein. Aus

$$(xq + \cdot\cdot, \quad \lambda p + \mu q) = -\lambda q$$

folgt, dass, da nur eine Translation $\lambda p + \mu q$ auftritt, λ verschwindet. Ebenso folgt $\mu = 0$, sodass sich also keine viergliedrige Gruppe ergiebt.

C) Hier folgt zunächst, da $xp + yq$ vorkommt, aus der vorausgeschickten Bemerkung, dass die Gruppe die Form hat:

$$xq \quad yq \quad xp \quad \lambda p + \mu q.$$

Klammeroperation lehrt dann, dass $\lambda = 0$ ist, sodass die Gruppe hervorgeht:

$$1) \; xq \quad yq \quad xp \quad q.$$

D) und E) Hier kommen unmittelbar diese Gruppen:

$$2) \; xp \quad yq \quad p \quad q,$$

$$3) \; xq \quad axp + byq \quad p \quad q,$$

während F) und G) keine viergliedrige Gruppe liefern.

Es fragt sich, ob keiner der Typen 1), 2), 3) überzählig ist. Nur der erste lässt ausser der unendlich fernen Geraden noch eine zweite Gerade, die y-Axe, in Ruhe. Er ist demnach ein selbständiger Typus, den wir so schreiben können:

$$\boxed{q \quad yq \quad xq \quad xp}.$$

Er enthält alle projectiven Transformationen, welche zwei Geraden und ihren Schnittpunkt in Ruhe lassen. Eine dualistische Gruppe lässt daher zwei Punkte und ihre Gerade in Ruhe und ist ein besonderer Typus, der unter 2) oder 3) vorhanden sein muss. Es ist dies in der That die Gruppe 2):

$$\boxed{q \quad yq \quad p \quad xp}.$$

Die Gruppe 3) lässt nur eine Gerade — die unendlich ferne — und einen Punkt auf ihr — den Schnittpunkt mit der y-Axe — invariant und ist also ein neuer Typus, den wir so schreiben:

$$\boxed{p \quad q \quad xq \quad axp + byq}\,.$$

Da in diesem Fall das invariante Gebilde zu sich selbst dualistisch ist, so liegt die Vermutung nahe, dass jede hierzu dualistische Gruppe auch durch projective Transformation erhalten werden kann. Das ist aber bei allgemeiner Wahl des Verhältnisses $a:b$ nicht der Fall. Man findet ohne Mühe, dass der vorstehende Typus durch projective Transformation nur in solche Gruppen

$$p \quad q \quad xq \quad a_1 xp + b_1 yq$$

verwandelt werden kann, für die $a_1 : b_1 = a : b$ ist. Demnach ist die dualistische Gruppe:

$$\boxed{p \quad q \quad xq \quad (b-a)xp + byq}$$

ein besonderer Typus. Nur für $b = 2a$ oder $b = 0$ ist der Typus zu sich selbst dualistisch. Diese Gruppen sind also besonders zu bemerken:

$$\boxed{p \quad q \quad xq \quad xp + 2yq} \qquad \boxed{p \quad q \quad xp \quad yq}\,.$$

Die dreigliedrigen Gruppen.

Wir kommen nunmehr zur Berechnung der *dreigliedrigen* Gruppen G_3 in den Fällen A) bis G).

A) liefert keine dreigliedrige Gruppe.

B) giebt, wie die Klammerausdrücke sofort zeigen:

$$\boxed{xq \quad xp - yq \quad yp}\,.$$

Diese Gruppe lässt auf der unendlich fernen Geraden keinen Punkt und im Endlichen nur einen, den Anfangspunkt in Ruhe. Auch kommt ausser der unendlich fernen Geraden keine invariante Gerade vor. Offenbar ist die Gruppe nach der Tafel am Schluss von § 4 des 10. Kap. zu sich selbst dualistisch.

C) Hier lehrt die vorausgeschickte allgemeine Bemerkung unmittelbar, dass die Gruppe lautet:

$$\text{I)}\ xq \quad yq \quad xp.$$

D) Die allgemeine Bemerkung giebt zunächst:

$$xp \quad yq \quad \lambda p + \mu q.$$

Klammeroperation zwischen $xp - yq$ und $\lambda p + \mu q$ giebt $\lambda p - \mu q$,

sodass λ oder μ gleich Null ist, da nur eine Translation vorkommt. Da alles in x, y symmetrisch ist, so können wir $\lambda = 0$ setzen. Dies liefert:

$$\text{II)}\ xp,\quad yq,\quad q.$$

E) Hier haben wir zunächst:

$$xq + \cdots,\quad axp + byq + \cdots,\quad \lambda p + \mu q,$$

und Klammeroperation zwischen der ersten und letzten Transformation liefert $\lambda = 0$. Nun ist die Gruppe etwa diese:

$$xq + \alpha p \quad axp + byq + \beta p \quad q.$$

Ist $a \neq 0$, so kann, indem $x + \frac{\beta}{a}$ als neues x gewählt wird, $\beta = 0$ gemacht werden, und dann giebt Combination der beiden ersten

$$(b - a)xq + a\alpha p.$$

Daher ist

$$a\alpha = (b - a)\alpha.$$

Ist $2a \neq b$, so ist also $\alpha = 0$, und es kommt:

$$\text{III)}\ xq \quad axp + byq \quad q.$$

Ist jedoch $b = 2a$ und $a \neq 0$, so bleibt

$$xq + \alpha p \quad xp + 2yq \quad q.$$

Wäre $\alpha = 0$, so wäre diese Gruppe in III) enthalten. Daher setzen wir $\alpha \neq 0$ und können leicht $\alpha = 1$ machen, indem wir ein Vielfaches von y als neues y benutzen. So kommt:

$$\text{IV)}\ xq + p \quad xp + 2yq \quad q.$$

Wenn aber $a = 0$ ist, so haben wir:

$$xq + \alpha p \quad yq + \beta p \quad q$$

und Combination der beiden ersten giebt $\alpha = 0$. Alsdann lässt sich $\beta = 1$ machen, sobald es nicht Null ist, in welchem Falle eine in III) enthaltene Gruppe hervorgehen würde. So kommt nur:

$$\text{V)}\ xq \quad yq + p \quad q.$$

F) und G) liefern sofort:

$$\text{VI)}\ xq + a(xp + yq) \quad p \quad q,$$

$$\text{VII)}\ axp + byq \quad p \quad q.$$

Wir fragen uns nun, ob unter den sieben Gruppen I) $\cdot\cdot$ VII) überzählige vorhanden sind.

Die Gruppe I) und II) lassen zwei Geraden, ihren Schnittpunkt und noch einen Punkt auf einer der Geraden in Ruhe. Diese Figur kommt bei den anderen Gruppen nicht vor und ist zu sich selbst

dualistisch. Man sieht leicht, dass I) und II) durch projective Transformation oder durch Dualität in einander überführbar sind. Somit kommt nur ein zu sich selbst dualistischer Typus:

$$\boxed{q \quad yq \quad xp}.$$

Die Gruppe III) lässt, sobald $a \neq 0$ ist, also $a = 1$ gesetzt werden kann, zwei Geraden und ihren Schnittpunkt in Ruhe. Bei allen anderen Gruppen ist das invariante Gebilde ein anderes. VII) besitzt für $a \neq b$ das dualistische, zwei Punkte und ihre Gerade. Demnach sind III) und VII) zu einander dualistische Typen, die nicht durch projective Transformation in einander verwandelt werden können. In der That ergiebt sich zu

$$\boxed{q \quad xq \quad xp + ayq}$$

als dualistisch die Gruppe:

$$\boxed{p \quad q \quad (a-1)xp + ayq}.$$

Man sieht leicht ein, dass in diesem Typus die Constante a nicht weiter specialisiert werden kann. Er lässt sich nur durch Einführung passender neuer Variabeln a in $1 - a$ verwandeln.

Im Falle $a = 0$ lässt III) alle Geraden durch einen Punkt invariant, während VII) für $a = b$ das dualistische invariante Gebilde, alle Punkte auf einer Geraden, besitzt. Die betreffenden invarianten Gebilde treten sonst nicht auf. Wir erhalten also die beiden zu einander dualistischen Typen:

$$\boxed{q \quad xq \quad yq} \qquad \boxed{p \quad q \quad xp + yq}.$$

Es bleiben nun noch die Gruppen IV), V) und VI) zu untersuchen. Bei allen diesen bleibt dasselbe Gebilde, eine Gerade und ein Punkt auf ihr, invariant. Betrachten wir aber die Klammerausdrücke ihrer infinitesimalen Transformationen. Sie sind bei IV):

$$q \quad xq + p,$$

bei V)

$$q \quad xq,$$

bei VI) für $a \neq 0$:

$$p \quad q$$

und für $a = 0$:

$$q.$$

Da nun offenbar zwei Gruppen, die zum selben Typus gehören, auch bei der Klammeroperation gleichviele infinitesimale Transformationen

reproducieren, so folgt, dass VI) für $a = 0$ ein besonderer zu sich selbst dualistischer Typus ist:

$$\boxed{p \quad q \quad xq}.$$

Die durch Klammeroperation erhaltenen infinitesimalen Transformationen bei IV), V) und VI) für $a \neq 0$ bilden jedesmal eine zweigliedrige Gruppe, deren erste und letzte transitiv und die zweite intransitiv ist. (Vgl. Satz 3, § 2 des 8. Kap.) Daher ist V) weder in IV) noch in VI) projectiv überführbar. IV) aber ist zu sich selbst dualistisch, und V) und VI) sind zu einander dualistisch. Somit kommen, wenn VI) noch etwas umgeformt wird, die Typen:

$$\boxed{q \quad p + xq \quad xp + 2yq}$$

$$\boxed{q \quad xq \quad p + yq} \qquad \boxed{p \quad q \quad xp + (y - x)q}.$$

Die zweigliedrigen Gruppen.

Jetzt erübrigt nur noch die Bestimmung der *zweigliedrigen* Gruppen G_2. Wir betrachten wieder die einzelnen Fälle A) bis G), von denen aber offenbar A), B), C) nichts liefern.

D) giebt nach der oben gemachten allgemeinen Bemerkung sofort:

$$\text{a)} \; xp \quad yq.$$

E) Hier haben wir:

$$xq + \alpha p + \beta q \quad axp + byq + \gamma p + \delta q,$$

und Klammeroperation liefert:

$$(2a - b)\alpha = 0, \quad \gamma = a\beta.$$

Ausserdem ist zu beachten, dass durch Einführung eines neuen x die Constante γ, durch Einführung eines neuen y die Constante δ gleich Null gemacht werden kann, sobald a resp. $b \neq 0$ ist. Demnach ergeben sich die Fälle:

Ist $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und auch $2a - b \neq 0$, so sind α, β, γ, δ sämtlich Null:

$$\text{b)} \; xq \quad axp + byq.$$

Ist $a \neq 0$ und $b \neq 0$, aber $b = 2a$, so ist $\beta = \gamma = \delta = 0$. Ist dann auch $\alpha = 0$, so ist dieser Fall unter b) enthalten. Ist $\alpha \neq 0$, so kann es ohne Mühe gleich Eins gemacht werden:

$$\text{c)} \; xq + p \quad xp + 2yq.$$

Ist $a \neq 0$, $b = 0$, so ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und, da sonst wieder eine unter b) enthaltene Form hervorginge, $\delta \neq 0$, also leicht $a = 1$, $\delta = 1$ zu machen:

$$d)\ xq \quad xp + q.$$

Ist $a = 0$, $b \neq 0$, so ist $\alpha = \gamma = \delta = 0$, und es kommt, wenn $x + \beta$ als neues x benutzt wird, eine unter b) enthaltene Form.

F) Hier haben wir:

$$xq + a(xp + yq) + \cdots, \quad \lambda p + \mu q.$$

Klammeroperation lehrt, dass $\lambda = 0$ ist. Es kommt also:

$$xq + a(xp + yq) + \alpha p \quad q.$$

So lange $a \neq 0$ ist, können wir $x + \frac{\alpha}{a}$ als neues x und $-ay$ als neues y benutzen, sodass kommt:

$$e)\ xp + (y - x)q \quad q.$$

Wenn aber $a = 0$ ist, so ist entweder $\alpha \neq 0$, also:

$$f)\ xq + p \quad q$$

oder $\alpha = 0$, d. h.:

$$g)\ xq \quad q.$$

G) Die Gruppe:

$$axp + byq + \cdots, \quad \lambda p + \mu q$$

lässt sich, wenn a und b von Null verschieden sind, ohne weiteres auf die Form bringen:

$$h)\ axp + byq \quad q.$$

Ist etwa $a \neq 0$ und $b = 0$, so kann angenommen werden:

$$xp + \alpha q \quad \lambda p + \mu q$$

und Klammeroperation giebt λp, d. h. $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$. $\lambda = 0$ würde eine in h) enthaltene Gruppe liefern. Also ist $\mu = 0$ und die Gruppe hat, da $\alpha = 0$ eine unter k) enthaltene Gruppe liefert, die Form:

$$xp + q \quad p$$

oder auch, wie Vertauschung von x und y lehrt:

$$i)\ yq + p \quad q.$$

Schliesslich darf die Gruppe nicht vergessen werden, die aus lauter Translationen besteht:

$$k)\ p \quad q.$$

Wir haben jetzt zu untersuchen, welche der Gruppen a) bis k) überflüssig sind.

Von diesen Gruppen hat nur eine als Klammerausdruck Null und ist zugleich intransitiv, nämlich g). Diese bildet daher einen Typus für sich:

$$\boxed{q \quad xq}.$$

Diese Gruppe lässt nur die Geraden eines Büschels und den Mittelpunkt des Büschels in Ruhe. Jede dualistische Gruppe muss daher die Punkte einer Geraden in Ruhe lassen und als Klammerausdruck Null haben. Es findet sich nur eine solche, nämlich die Gruppe k):

$$\boxed{p \quad q}\,.$$

Dies ist also der Typus der zu jener dualistischen Gruppen.

Von den übrigen Gruppen haben den Klammerausdruck Null und sind transitiv die Gruppen a), b) für $a = b$, f) und h) für $b = 0$. Von diesen hat nur a) ein invariantes Dreieck, sonst keine. Diese invariante Figur ist zu sich selbst dualistisch. Die Gruppe:

$$\boxed{xp \quad yq}$$

ist daher ein zu sich selbst dualistischer Typus. Die Gruppe f) lässt nur eine Gerade und auf ihr einen Punkt in Ruhe. Da dies weder bei Gruppe b) für $a = b$ noch bei Gruppe h) für $b = 0$ eintritt, so ist f) ein zu sich selbst dualistischer Typus:

$$\boxed{q \quad p + xq}\,.$$

Die Gruppe b) für $a = b$ und h) für $b = 0$ lassen beide je zwei Geraden, ihren Schnittpunkt und je noch einen Punkt auf einer der Geraden in Ruhe. Die eine geht in die andere über, wenn $\frac{1}{x}$ und $\frac{y}{x}$ als neue Veränderliche eingeführt werden. Also ergiebt sich der zu sich selbst dualistische Typus:

$$\boxed{q \quad xp}\,.$$

Jetzt haben wir unser Augenmerk nur noch auf die Gruppen zu richten, bei denen der Klammerausdruck nicht Null ist.

Es sind unter diesen transitiv die Gruppen b) für $a \neq 0$, $b \neq a$, c), d), e), h) für $a \neq 0$, $b \neq 0$, i) und intransitiv die Gruppen b) für $a = 0$ und h) für $a = 0$. Die Gruppe c) lässt nur einen Punkt und nur eine Gerade durch ihn invariant. Da alle anderen Gruppen mehr als einen Punkt oder mehr als eine Gerade in Ruhe lassen, so stellt c) einen zu sich selbst dualistischen Typus dar:

$$\boxed{p + xq \quad xp + 2yq}\,.$$

Gerade zwei Punkte und ihre Verbindende, sowie noch eine zweite Gerade durch einen der Punkte lassen die Gruppen b) und h), beide für $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, in Ruhe. Wenn man

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{x}, \quad \bar{y} = \frac{\beta x + \gamma y}{x}$$

als neue Veränderliche in die erste, also in die Gruppe b):

$$xq \quad xp + byq \quad (b \neq 0 \;\; 1)$$

einführt, so erhält man

$$\bar{q} \quad \bar{x}\bar{p} + (1 - b)\bar{y}\bar{q},$$

also die Gruppe h). Also ist h) überzählig. Gruppe b) ist durch Dualität in

$$xq, \quad bxp + yq$$

überführbar. Wir erhalten also den Typus:

$$\boxed{xq \quad xp + ayq, \quad a \neq 0,\ 1}$$

und als dazu dualistisch den Typus:

$$\boxed{xq \quad axp + yq, \quad a \neq 0,\ 1}\,.$$

Man kann leicht nachweisen, dass der Parameter a wesentlich ist und verschiedenen Werten desselben stets Gruppen entsprechen, die nicht in einander überführbar sind.

Genau zwei Geraden und ihren Schnittpunkt lassen die Gruppen d) und e) invariant, während i) die dazu dualistische Figur, zwei Punkte und ihre Gerade, in Ruhe lässt. Die Transformation

$$\bar{x} = \frac{1}{x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x}$$

führt die erste in die zweite Gruppe über. Wir haben also

$$\boxed{xq \quad xp + q} \qquad \boxed{q \quad yq + p}$$

als zwei zu einander dualistische Typen.

Nun bleiben nur vier Gruppen übrig, die beiden transitiven:

$$xq \quad xp$$

und

$$xp + yq \quad q,$$

sowie die beiden intransitiven:

$$xq \quad yq$$

und

$$yq \quad q.$$

Die beiden ersteren lassen alle Punkte einer Geraden und ausserdem noch eine Gerade, die beiden letzteren die dazu dualistische Figur in Ruhe. Die erste Gruppe geht aus der zweiten, ebenso wie die dritte aus der vierten durch

$$\bar{x} = \frac{1}{x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{x}$$

hervor. Somit können

$q \quad xp + yq$		$q \quad yq$

als die beiden letzten zu einander dualistischen Typen benutzt werden.

Die eingliedrigen Gruppen.

Alle Typen von eingliedrigen projectiven Gruppen haben wir schon in Theorem 6, § 3 des 3. Kap., aufgestellt. Es waren diese:

$xp + ayq$	$p + yq$	$p + xq$	$xp + yq$	q

Sie sind alle zu sich selbst dualistisch.

§ 4. Tafel aller projectiven Gruppen der Ebene.

Das Problem, alle projectiven Gruppen der Ebene mit paarweis inversen Transformationen zu bestimmen*), ist hiermit erledigt, denn jede solche Gruppe ist durch Ausführung einer projectiven Transformation aus einem der gefundenen Typen — und zwar stets *aus nur einem* — abzuleiten.

Wir stellen die Typen in einer Tafel zusammen. *Dabei bedeutet eine doppelte Umrahmung, dass die betreffende Gruppe durch projective Transformation in die dualistische verwandelt werden kann,* d. h. dass sie zu sich selbst dualistisch ist.

Im übrigen sind zu einander dualistische Gruppen jedesmal durch eine Klammer verbunden.

Das Zeichen $\equiv$ besagt, dass die Gruppen durch projective Transformation in einander überführbar sind. Es ist dies da nötig, wo in den Typen eine willkürliche Constante auftritt, von der je mehrere in gewisser Beziehung stehende Werte Gruppen liefern, die in einander transformiert werden können.

Jedesmal ist angegeben, welche Punkte, Geraden und Curven die

*) Lie veröffentlichte seine schon im Jahre 1874 ausgeführte Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene im Jahre 1884 im Archiv for Mathematik („Untersuchungen über Transformationsgruppen I"). Doch findet sich seine Bestimmung aller projectiven Gruppen der Geraden schon 1880 in den Mathem. Annalen, Bd. 16.

betreffende Gruppe invariant lässt. *Dieses invariante Gebilde ist bei denjenigen Gruppen cursiv hervorgehoben, die durch Angabe des invarianten Gebildes völlig definiert sind.*

Zusammenstellung aller Typen von projectiven Gruppen der Ebene.

I. *Achtgliedrig:*

1) $p \quad q \quad xp \quad yp \quad xq \quad yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q$

II. *Sechsgliedrig.*

2) $p \quad q \quad xp \quad yp \quad xq \quad yq$ — *Invariante Gerade.*

3) $xp \quad yp \quad xq \quad yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q$ — *Invarianter Punkt.*

III. *Fünfgliedrig.*

4) $p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp$ — Invariante Gerade.

5) $xq \quad xp - yq \quad yp \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q$ — Invarianter Punkt.

6) $p \quad q \quad xp \quad xq \quad yq$ — *Invariantes Linienelement.*

IV. *Viergliedrig.*

7) $p \quad q \quad xq \quad axp + yq, \; a \neq \frac{1}{2}$ — Invariantes Linienelement.

$p \quad q \quad xq \quad (1-a)xp + yq, \; a \neq \frac{1}{2}$ — Desgl.

8) $p \quad q \quad xq \quad xp + 2yq$ — Desgl.

9) $p \quad q \quad xp \quad xq$ — Desgl.

10) $xp \quad yp \quad xq \quad yq$ — *Invarianter Punkt und invariante Gerade getrennt.*

11) $\boxed{p \quad q \quad xp \quad yq}$ *Invariante Gerade und zwei invariante Punkte auf ihr.*

12) $\boxed{q \quad yq \quad xq \quad xp}$ *Invarianter Punkt und zwei invariante Geraden durch ihn.*

V. *Dreigliedrig:*

13) $\boxed{p \quad q \quad xq}$ Invariantes Linienelement.

14) $\boxed{q \quad p + xq \quad xp + 2yq}$ Desgl.

15) $\boxed{q \quad xq \quad p + yq}$ Desgl.

16) $\boxed{p \quad q \quad xp + (y - x)q}$ Desgl.

17) $\boxed{xq \quad xp - yq \quad yp}$ Invarianter Punkt und invariante Gerade getrennt.

18) $\boxed{p \quad q \quad (a-1)xp + ayq} \equiv \boxed{p \quad q \quad axp + (a-1)yq}$

Invariante Gerade und zwei invariante Punkte auf ihr.

19) $\boxed{q \quad xq \quad xp + ayq} \equiv \boxed{q \quad xq \quad xp + (1-a)yq}$

Invarianter Punkt und zwei invariante Geraden durch ihn.

20) $\boxed{q \quad yq \quad xp}$ *Zwei invariante Punkte, ihre invariante Verbindende und noch eine invariante Gerade durch einen der Punkte.*

21) $\boxed{p \quad q \quad xp + yq}$ *Invariante Punkte einer Geraden.*

22) $\boxed{q \quad xq \quad yq}$ *Invariante Strahlen eines Büschels.*

23) $\boxed{p + xq \quad xp + 2yq \quad (x^2 - y)p + xyq}$ *Invarianter Kegelschnitt.*

VI. *Zweigliedrig:*

24) $\boxed{q \quad p + xq}$ Invariantes Linienelement.

25) $\boxed{q \quad yq + p}$ Invariante Gerade und zwei invariante Punkte auf ihr.

26) $\boxed{xq \quad xp + q}$ Invariante Punkte und zwei invariante Geraden durch ihn.

27) $\boxed{xq \quad xp + ayq, \quad a \neq 0, 1}$ $\boxed{xq \quad axp + yq, \quad a \neq 0, 1}$ Zwei invariante Punkte, ihre invariante Verbindende und noch eine invariante Gerade durch einen der Punkte.

28) $\boxed{\boxed{q \quad xp}}$ Desgl.

29) $\boxed{p \quad q}$ Invariante Punkte einer Geraden.

30) $\boxed{q \quad xq}$ Invariante Strahlen eines Büschels.

31) $\boxed{\boxed{xp \quad yq}}$ *Invariantes Dreieck.*

32) $\boxed{q \quad xp + yq}$ *Invariante Punkte einer Geraden und noch eine invariante Gerade.*

33) $\boxed{q \quad yq}$ *Invariante Strahlen eines Büschels und noch ein invarianter Punkt.*

34) $\boxed{\boxed{p + xq \quad xp + 2yq}}$ *Invarianter Kegelschnitt, ein invarianter Punkt darauf und dessen invariante Tangente.*

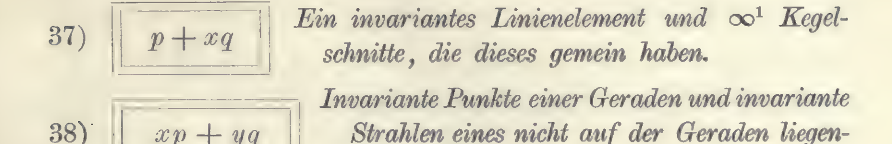
VII. *Eingliedrig.*

35) $\boxed{\boxed{xp + ayq, \quad a \neq 0, 1}} \equiv \boxed{\boxed{xp + \frac{1}{a} yq}} \equiv$

$\equiv \boxed{\boxed{xp + (1 - a)yq}} \equiv \boxed{\boxed{xp + \frac{1}{1 - a} yq}} \equiv$

$\equiv \boxed{\boxed{xp + \frac{a - 1}{a} yq}} \equiv \boxed{\boxed{xp + \frac{a}{a - 1} yq}}$ *Invariantes Dreieck und ∞^1 invariante Curven.*

36) $\boxed{\boxed{p + yq}}$ *Zwei invariante Punkte, ihre invariante Verbindende, noch eine invariante Gerade durch einen der Punkte und ∞^1 invariante Curven.*



37) $p + xq$ — *Ein invariantes Linienelement und ∞^1 Kegelschnitte, die dieses gemein haben.*

38) $xp + yq$ — *Invariante Punkte einer Geraden und invariante Strahlen eines nicht auf der Geraden liegenden Büschels.*

39) q — *Invariante Punkte einer Geraden und invariante Strahlen eines auf der Geraden liegenden Büschels.*

Wir bemerken noch, dass bei der Bestimmung dieser Gruppen immer nur die erste Hälfte des Hauptsatzes benutzt worden ist. Denn dass die gefundenen Typen wirklich Gruppen darstellen, kann man immer auch durch Aufstellung ihrer endlichen Gleichungen verificieren. Aber auch die erste Hälfte des Hauptsatzes, der Satz also, dass die $(U_i U_k)$ der Gruppe $U_1 f \,.\,. \,U_r f$ angehören und daher $(U_i U_k) = \Sigma c_{iks} U_s f$ ist, lässt sich durch verschiedene andere Methoden bei unserem Probleme ganz vermeiden. Zunächst kann man überall da, wo der Klammerausdruck (UV) berechnet wurde, statt dessen neue Veränderliche in Uf vermöge einer Transformation der eingliedrigen Gruppe Vf einführen. Der Leser kann sich in jedem einzelnen Fall davon überzeugen, dass beides zum selben Ziele führt. Ferner kann man z. B. auch bei Einführung der Begriffe „invariante Untergruppe“ und „Isomorphismus“ die Klammeroperationen vollständig vermeiden.

Der Hauptsatz ist somit bei der Bestimmung aller *projectiven* Gruppen der Ebene noch zu umgehen, während er bei späteren Problemen der Gruppentheorie unvermeidlich ist. Jedenfalls aber werden die Betrachtungen bei Benutzung des Hauptsatzes kürzer, übersichtlicher und freier von Kunstgriffen.

Abteilung III.

Die Gruppen der Ebene.

Nachdem wir in der vorigen Abteilung die Typen der *projectiven* Gruppen bestimmt haben, kommen wir jetzt zur Bestimmung *aller* endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene überhaupt und zur Zurückführung dieser Gruppen auf bestimmte typische Formen. Wir werden sehen, dass sich in der That eine Tafel aller dieser Gruppen der Ebene aufstellen lässt. Dabei werden auch alle endlichen continuierlichen Gruppen der Geraden, d. i. einer Variabeln bestimmt werden.

Kapitel 12.

Der Hauptsatz der Gruppentheorie für die endlichen Gruppen der Ebene.

In den Kapiteln 6, 7 und 8 wurden die wichtigeren Sätze über die endlichen continuierlichen Transformationsgruppen der Ebene aufstellt. Ein Satz jedoch und zwar gerade der Hauptsatz der Gruppentheorie wurde in Kapitel 9 nur für die projectiven Gruppen bewiesen. Die Ausdehnung des Hauptsatzes auf beliebige endliche continuierliche Gruppen der Ebene erfordert einige Vorbetrachtungen über Differentialgleichungen, die infinitesimale Punkttransformationen gestatten. Wie zu Beginn des 9. Kap. ist auch hier hervorzuheben, dass wir bei der Entwickelung des Beweises an dieser Stelle kein Gewicht auf Kürze legen. Später erst werden wir den Hauptsatz losgelöst von allen nicht unbedingt nötigen Nebenbetrachtungen für Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen in möglichster Kürze ableiten.

§ 1. Vorbereitende Bemerkungen.

Incremente der Differentialquotienten.

Liegt eine infinitesimale Punkttransformation

$$Uf \equiv \xi p + \eta q$$

der Ebene vor, so können wir ausser der Transformation der Coor-

dinaten x, y auch die Transformation der Differentialquotienten $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. ins Auge fassen. Wir haben schon an mehreren Stellen die Berechnung des Incrementes von y' durchgeführt (vgl. z. B. Kap. 2, § 3). Es ist:

$$\delta y' = \left(\frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}\right)\delta t.$$

Die Differentiation nach x ist hierbei als totale aufzufassen, es ist also dabei $\frac{dy}{dx} = y'$ zu setzen. Man sieht dann, dass sich $\delta y'$ als ganze Function *zweiten* Grades von y' darstellt. Wird das Increment von y' mit $\eta_1 \delta t$ bezeichnet, also

$$\delta y' = \eta_1 \delta t, \quad \eta_1 \equiv \frac{d\eta}{dx} - y'\frac{d\xi}{dx}$$

gesetzt, so kommt ferner:

$$\delta y'' = \left(\frac{d\eta_1}{dx} - y''\frac{d\xi}{dx}\right)\delta t \equiv \eta_2 \delta t,$$

$$\delta y''' = \left(\frac{d\eta_2}{dx} - y'''\frac{d\xi}{dx}\right)\delta t \equiv \eta_3 \delta t$$

u. s. w. Man bemerkt, dass $\delta y''$ in y'', $\delta y'''$ in y''' u. s. w. nur *linear* ist, denn $\frac{d\eta_1}{dx}$ ist in y'', $\frac{d\eta_2}{dx}$ in y''' u. s. w. linear.

So ist allgemein für $r > 1$ $\delta y^{(r)}$ eine ganze lineare Function von $y^{(r)}$, die ausserdem $x, y, y' \ldots y^{(r-1)}$ enthält. $\delta y'$ dagegen ist eine ganze quadratische Function von y'. Indem man die berechneten Incremente von $y', y'' \ldots y^{(r)}$ mit berücksichtigt, erhält man die sogenannte r-mal erweiterte infinitesimale Transformation:

$$U^r f \equiv \xi p + \eta q + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y''} + \cdots + \eta_r \frac{\partial f}{\partial y^{(r)}}.$$

Eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung zwischen x und y:

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \ldots y^{(r-1)}) = 0$$

gestattet nun nach Satz 2, § 1 des 9. Kap., die infinitesimale Punkttransformation Uf dann und nur dann, wenn

$$U^r(y^{(r)} - \omega) \equiv \varrho \cdot (y^{(r)} - \omega)$$

ist. Hierbei bedeutet ϱ einen von $y^{(r)}$ freien Factor. Wir können dies auch so auffassen: Die Gleichung $y^{(r)} - \omega = 0$ zeichnet aus der Schar aller ∞^{r+2} Wertsysteme $(x, y, y', y'' \ldots y^{(r)})$ gewisse ∞^{r+1} aus, und sie gestattet Uf dann und nur dann, wenn die Transformation $U^r f$, die ja $x, y, y' \ldots y^{(r)}$ Incremente erteilt, diese ∞^{r+1} Wertsysteme unter einander vertauscht. Bedeuten $U_1 f \ldots U_\varrho f$ mehrere infinitesimale Punkttransformationen, so ist

$$c_1 U_1^r f + \cdots + c_\varrho U_\varrho^r f$$

die r^{te} Erweiterung von

$$c_1 U_1 f + \cdots + c_\varrho U_\varrho f.$$

Daher ergiebt sich unmittelbar der zwar ziemlich selbverständliche Satz, der aber doch besonders ausgesprochen werden möge:

Satz 1: *Gestattet eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung in x, y die infinitesimalen Punkttransformationen $U_1 f \,.\,. U_\varrho f$, so gestattet sie auch jede Transformation $c_1 U_1 f + \cdots + c_\varrho U_\varrho f$, in der $c_1 \,.\,. c_\varrho$ irgend welche Constanten bedeuten.*

Anzahl der inf. Transf. einer Diffgl.

Eine Differentialgleichung *erster* Ordnung in x, y gestattet bekanntlich ∞^∞ von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen, d. h. in den allgemeinen Ausdruck einer solchen infinitesimalen Transformation geht stets eine willkürliche Function ein*).

Differentialgleichung 2. Ordnung.

Betrachten wir nun eine Differentialgleichung *zweiter* Ordnung in x, y. Dabei werden wir uns auf einen functionentheoretischen Hülfssatz stützen:

Ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - \omega(x, y, y') = 0$$

vorgelegt, so ist es immer möglich, in der (xy)-Ebene einen solchen Bereich abzugrenzen, dass durch zwei beliebige Punkte des Bereiches immer eine und nur eine Integralcurve hindurchgeht.

Der Beweis dieses Satzes gehört nicht hierher.

Bekanntlich gestattet die Differentialgleichung $y'' = 0$ gerade acht von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. (Siehe § 3 des 2. Kap.) Wir werden sehen, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' - \omega = 0$ überhaupt *höchstens* acht zulassen kann. Angenommen nämlich, sie gestatte wenigstens neun: $U_1 f \ldots U_9 f$. In dem im Hülfssatz erwähnten Bereich wählen wir vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4, von denen keine drei auf derselben Integralcurve der Differentialgleichung gelegen sind. Nach Satz 1 gestattet die Differentialgleichung jede Transformation

$$Uf \equiv c_1 U_1 f + \cdots + c_9 U_9 f.$$

Es lassen sich offenbar für $c_1 \,.\,. c_9$ solche nicht sämtlich verschwindende Werte angeben, dass diese infinitesimale Transformation die vier ausgewählten Punkte in Ruhe lässt, denn es ergeben sich $2 \cdot 4 = 8$ Bedingungsgleichungen für die 9 Grössen $c_1 \,.\,. c_9$. Es existiert also bei der gemachten Annahme eine infinitesimale Punkttransformation

*) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.“, Theorem 10, § 3 des 7. Kap.

Uf, welche die Integralcurven der Differentialgleichung unter einander vertauscht und die vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 in Ruhe lässt. Durch p_k und je einen der drei andern invarianten Punkte geht nach unserem Hülfssatz je eine Integralcurve. Also bleiben bei Uf diese drei Integralcurven in Ruhe (Fig. 30). Im Punkte p_k hat y' für diese drei Integralcurven drei bestimmte Werte und diese werden bei der einmal erweiterten infinitesimalen Transformation $U'f$ nicht geändert. Da nun nach dem Obigen $\delta y'$ sich quadratisch durch y' ausdrückt, so wird y' durch eine infinitesimale projective Transformation der einfachen Mannigfaltigkeit y' geändert. Bei einer solchen bleibt aber das Doppelverhältnis aus vier Werten y' invariant. Da nun in p_k drei Werte y' invariant sind, ist es also auch jeder Wert y' in p_k. (Vgl. Satz 2, § 1 des 5. Kap.) Denselben Schluss können wir für jeden den vier Punkte machen: In jedem dieser Punkte bleiben die Richtungen y' bei Uf ungeändert. Ist nun p ein beliebiger Punkt des Bereiches, so geht durch ihn und p_1 nach dem Hülfssatz gerade eine Integralcurve. Weil ferner zu zwei verschiedenen durch p_1 gehenden Integralcurven zwei verschiedene Richtungen y' in p_1 gehören und alle y' in p_1 in Ruhe bleiben, so folgt, dass diese Integralcurve durch p und p_1 bei Uf in sich übergeht. Ebenso geht die durch p und p_2 gelegte Integralcurve in sich über. Also bleibt p als Schnittpunkt beider Integralcurven fest. Eine infinitesimale Punkttransformation unserer Gleichung $y'' - \omega = 0$, die vier Punkte jenes Bereiches in Ruhe lässt, führt also überhaupt jeden Punkt des Bereiches in sich über, demnach auch — wie durch analytische Fortsetzung folgt — jeden Punkt der Ebene, d. h. sie ist die Identität. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass eine wirkliche infinitesimale Transformation Uf vorhanden sei, die $p_1 \,.\,.\, p_4$ invariant lässt. Diese Voraussetzung aber beruhte darauf, dass $y'' - \omega = 0$ mindestens neun von einander unabhängige infinitesimale Transformationen gestatte. Diese Annahme ist daher falsch.

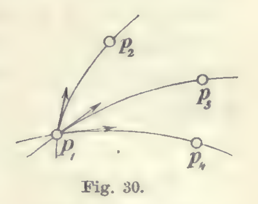


Fig. 30.

Satz 2: *Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y gestattet höchstens acht von einander unabhängige infinitesimale Transformationen in x, y*).*

Gehen wir zu Differentialgleichungen dritter Ordnung über. Für diese stellt sich die Betrachtung fast ebenso dar, wie für die Differen-

Diffgl. von höherer als 2. Ordnung.

---

*) Vgl. „Diffgn. m. inf. Trf.“, § 3 des 17. Kap.

tialgleichungen von *noch höherer* Ordnung. Hierbei machen wir Gebrauch von dem functionentheoretischen Hülfssatz, dessen Beweis nicht hierher gehört:

Ist eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung $(r > 2)$

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \cdots y^{(r-1)}) = 0$$

vorgelegt, so ist es immer möglich, in der (xy)*-Ebene einen solchen Bereich abzugrenzen, dass durch zwei beliebige Punkte des Bereiches immer eine und nur eine Integralcurve hindurchgeht, die in einem der beiden Punkte vorgeschriebene Werte von* $y', y'' \ldots y^{(r-2)}$ *hat.*

Wir verfahren nun so:

Angenommen, die vorgelegte Differentialgleichung r^{ter} Ordnung:

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \ldots y^{(r-1)}) = 0$$

gestatte ϱ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \ldots U_\varrho f$, so gestattet sie nach Satz 1 auch jede von der Form

$$Uf \equiv c_1 U_1 f + \cdots + c_\varrho U_\varrho f.$$

Festhalten zweier Punkte.

Unter diesen $\infty^{\varrho-1}$ infinitesimalen Transformationen sind nun mindestens $\infty^{\varrho-5}$ enthalten, die zwei beliebig ausgewählte Punkte p, q innerhalb jenes Bereiches in Ruhe lassen. Denn die Invarianz eines Punktes drückt sich durch höchstens zwei Bedingungen aus. Es giebt also mindestens $\varrho - 4$ von einander unabhängige infinitesimale Punkttransformationen $V_1 f \ldots V_{\varrho-4} f$ der Gleichung, welche die Punkte p und q in Ruhe lassen. Durch p und q gehen nun gerade ∞^{r-2} Integralcurven hindurch. Dieselben werden von $V_1 f \ldots V_{\varrho-4} f$ unter einander vertauscht, da p und q invariant sind. Diese ∞^{r-2} Integralcurven werden sich analytisch durch eine Gleichung mit $r - 2$ wesentlichen Parametern $a_1 \ldots a_{r-2}$ darstellen. $V_1 f \ldots V_{\varrho-4} f$ und allgemein

$$c_1 V_1 f + \cdots + c_{\varrho-4} V_{\varrho-4} f$$

vertauschen also die Wertsysteme $(a_1 \ldots a_{r-2})$ unter einander (vgl. § 1 des 10. Kap.). Verlangen wir, dass eines der Wertsysteme fest bleiben soll, so sind also dazu höchstens $r - 2$ Gleichungen nötig, die sich als Bedingungen zwischen $c_1 \ldots c_{\varrho-4}$ darstellen. Demnach giebt es mindestens $\sigma = \varrho - 4 - (r - 2)$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $W_1 f \ldots W_\sigma f$

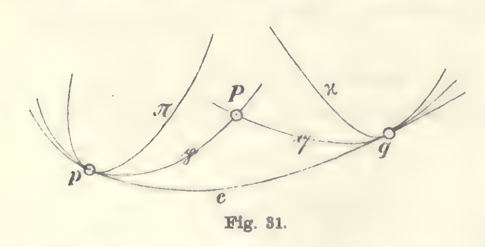


Fig. 31.

Festhalten einer Integralcurve.

der Gleichung, die p, q und eine Integralcurve c durch p, q in sich überführen. (Vgl. Fig. 31.) Es giebt nun ∞^1 Integralcurven, die durch

p gehen und mit c daselbst die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein haben. Die $W_1 f ... W_\sigma f$ transformieren diese ∞^1 Integralcurven unter sich, da sie alle diese Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ von c in p ungeändert lassen. Der analytische Ausdruck dieser ∞^1 Integralcurven ist eine Gleichung mit einem Parameter a. Dieser Parameter a erfährt also bei den

$$c_1 W_1 f + \cdots + c_\sigma W_\sigma f$$

gewisse Incremente. Die Forderung, dass ein Wert des Parameters ungeändert bleiben soll, führt also zu höchstens einer Bedingung zwischen $c_1 .. c_\sigma$.

Mithin giebt es mindestens $\sigma - 1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gleichung, die ausser p, q und c noch eine Integralcurve π invariant lassen, die durch p geht und hier mit c die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein hat.

Festhalten einer zweiten Integralcurve.

Ebenso schliessen wir, dass es mindestens $\sigma - 2$, also $\varrho - 4 - (r-2) - 2 = \varrho - r - 4$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gleichung giebt, die ausser p, q, c und π noch eine Integralcurve $\varkappa$ invariant lassen, welche durch q geht und dort mit c die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein hat. Wir bezeichnen diese infinitesimalen Transformationen mit Xf.

Ebenso einer dritten.

Wählen wir nun irgend einen Punkt P innerhalb unseres Bereiches. Durch ihn geht nach dem Hülfssatze eine Integralcurve $\mathfrak{p}$ nach p, die in p mit c die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein hat, und eine Integralcurve $\mathfrak{q}$ nach q, die in q mit c ebenfalls die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein hat.

Nun giebt es gerade ∞^1 Integralcurven durch p, die daselbst mit c die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein haben. Zu ihnen gehören verschiedene Werte von $y^{(r-1)}$. Aber $y^{(r-1)}$ erfährt bei den $(r-1)$-mal erweiterten $X^{r-1} f$ Incremente, die linear in $y^{(r-1)}$ sind, wie wir oben bemerkten. Zwei Werte $y^{(r-1)}$ an der Stelle p sind invariant bei den $X^{r-1} f$, nämlich die zu c und π gehörigen. Also bleibt jeder Wert von $y^{(r-1)}$ an dieser Stelle p invariant, sobald für $y', y'' .. y^{(r-2)}$ eben die zu c und π gehörigen Werte gesetzt werden (vgl. § 1 des 5. Kap.). Eine infinitesimale lineare Transformation der einfachen Mannigfaltigkeit $y^{(r-1)}$ lässt nämlich höchstens *einen* endlichen Wert von $y^{(r-1)}$ ungeändert, und wir dürfen ja annehmen, dass $y^{(r-1)}$ für c und für π an der Stelle p endlich sei.

Es folgt daher auch, dass die Xf *jede* Integralcurve durch p, welche in p mit c die Werte $y', y'' .. y^{(r-2)}$ gemein hat, in Ruhe lassen. Demnach ist die Curve $\mathfrak{p}$ invariant bei den Xf. Ebenso ist die Curve $\mathfrak{q}$ und mithin auch der Schnittpunkt P von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ invariant. Alle

Nachweis, dass nun Alles in Ruhe bleibt.

Punkte des Bereiches und also — wie durch analytische Fortsetzung folgt — alle Punkte der Ebene überhaupt bleiben bei den Xf invariant. Die Xf müssen sich daher auf die Identität reducieren.

Es ergaben sich aber mindestens $\varrho - r - 4$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen Xf. Diese Zahl darf also nicht grösser als Null sein. Daher ergiebt sich als ein Maximum für ϱ:

$$\varrho = r + 4.$$

Satz 3: *Eine gewöhnliche Differentialgleichung r^{ter} Ordnung $(r > 2)$ in x, y gestattet sicher nicht mehr als $r + 4$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen in x, y.*

Dass es andererseits Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung giebt, die wirklich $r + 4$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen zulassen, lehrt das Beispiel:

$$y^{(r)} = 0$$

mit den $r + 4$ Transformationen:

$$q, \quad xq, \quad x^2q \ldots x^{r-1}q, \quad yq, \quad p, \quad xp, \quad x^2p + rxyq,$$

die übrigens nach dem Späteren eine Gruppe erzeugen. Ist $r > 2$, so kann man, nebenbei gesagt, beweisen, dass jede Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, welche die Maximalzahl $r + 4$ von unabhängigen infinitesimalen Transformationen in sich besitzt, durch Einführung passender Variabeln auf die Form $y^{(r)} = 0$ gebracht werden kann*).

Der Unterschied des in Satz 3 ausgesprochenen Ergebnisses von dem Resultat für $r = 2$ beruht nach unseren Beweisen darauf, dass bei einer erweiterten infinitesimalen Punkttransformation y' ein in y' *quadratisches*, y'' aber ein in y'', entsprechend y''' ein in y''' u. s. w. *lineares* Increment erfährt.

Wir werden im nächsten Paragraphen unsere Sätze gebrauchen. Ausserdem müssen wir noch einige Hülfssätze vorausschicken.

Augenscheinlich gilt zunächst der

Gruppe der Transform. einer Differential-gleichung.

Satz 4: *Der Inbegriff aller Transformationen, die eine vorgelegte Differentialgleichung in x, y gestattet, bildet eine Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Denn gestattet die Differentialgleichung

$$(1) \qquad y^{(r)} - \omega(x, y, y' \ldots y^{(r-1)}) = 0$$

---

*) Vgl. für $r = 2$ die Schlussbemerkung in § 3 des 17. Kap. der „Diffgl. m. inf. Trf.“.

die beiden Transformationen S und T, deren erstere x, y in x_1, y_1, deren letztere x_1, y_1 in x_2, y_2 überführt, so geht die Gleichung bei S in

$$y_1^{(r)} - \omega(x_1, y_1, y_1' \cdot \cdot y_1^{(r-1)}) = 0 \tag{2}$$

und diese bei T in

$$y_2^{(r)} - \omega(x_2, y_2, y_2' \cdot \cdot y_2^{(r-1)}) = 0 \tag{3}$$

über, sodass also die Aufeinanderfolge $S\,T$ die Gleichung (1) in (3) verwandelt, d. h. die Differentialgleichung ebenfalls in sich überführt. Die Schar aller Transformationen der Gleichung (1) in sich ist mithin so beschaffen, dass die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Schar wieder der Schar angehört: Die Schar bildet eine Gruppe. Wenn ferner S die Gleichung (1) in (2) verwandelt, so führt S^{-1} die Gleichung (2) in (1) über. Also gehört auch S^{-1} der Gruppe an.

Die Gruppe braucht allerdings nicht continuierlich zu sein. Sobald man jedoch sich in einer gewissen Umgebung der identischen Transformation hält, kann man eine continuierliche Gruppe construieren, welche die Differentialgleichung invariant lässt. Erst durch analytische Fortsetzung dieser würde man eventuell zu einer nicht continuierlichen Gruppe gelangen. Auf diese functionentheoretischen Fragen gehen wir wie immer nicht näher ein.

Angenommen nun, die Differentialgleichung (1) gestatte eine ϱ-gliedrige Gruppe, so enthält diese Gruppe nach Theorem 18, § 3 des 6. Kap., gerade ϱ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. Nach Satz 2 und 3 ist alsdann ϱ an eine obere Grenze gebunden, sobald $r > 1$ ist. Daher:

Satz 5: *Gestattet eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung $(r > 1)$ in x, y eine ϱ-gliedrige Gruppe von Transformationen in x, y, so ist die Zahl ϱ an eine endliche obere Grenze gebunden.*

Weiter leuchtet der folgende Satz ein:

Gemeinsame Transform. zweier Gruppen.

Satz 6: *Haben zwei endliche continuierliche Gruppen mit paarweis inversen Transformationen eine continuierliche Schar von Transformationen gemein, so ist diese Schar wieder eine endliche continuierliche Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Denn sind $S_1, S_2 \, . \, .$ die Transformationen der einen, $T_1, T_2 \, . \, .$ die der andern Gruppe und gehören $\Sigma_1, \Sigma_2 \, . \, .$ sowohl zu den S als auch zu den T, so ist jede Aufeinanderfolge $\Sigma_i \Sigma_k$ eine S und auch eine T, daher eine Σ. Die Σ bilden folglich eine Gruppe. Ist Σ^{-1} zu Σ invers, so gehört Σ^{-1} sowohl zur ersten als auch zur zweiten Gruppe, da beide paarweis inverse Transformationen haben. Mithin ist Σ^{-1} wieder eine Σ.

Schliesslich ist noch von Wichtigkeit der

Ausführung von Transf. auf eine Curve.

Satz 7: *Sind $U_1 f \cdot \cdot U_r f$ r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Ebene und ist c eine Curve, die keine infinitesimale Transformation $e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f$ gestattet, so geht c bei allen von den $\Sigma e_i U_i f$ erzeugten endlichen Transformationen in ∞^r verschiedene Curven über.*

Es sei nämlich

$$y - \varphi(x) = 0 \tag{4}$$

die vorgelegte Curve, die keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_i U_i f$ gestattet. Die endlichen Gleichungen der von $\Sigma e_i U_i f$ erzeugten eingliedrigen Gruppe können nach Theorem 20, § 2 des 7. Kap., aufgestellt werden. Wir finden es bequemer, die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe $-\Sigma e_i U_i f$ aufzustellen, doch nicht in der gewohnten Form, in der x_1 und y_1 Functionen von x und y sind, sondern in nach x, y aufgelöster Form. Diese Gleichungen ergeben sich als die endlichen Gleichungen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma e_i U_i f$, wenn darin x, y mit x_1, y_1 vertauscht werden. So kommt nach Theorem 20:

$$x = x_1 + \Sigma e_i U_i^1 x_1 + \Sigma \Sigma e_i e_k U_i^1 U_k^1 x_1 + \cdot \cdot,$$
$$y = y_1 + \Sigma e_i U_i^1 y_1 + \Sigma \Sigma e_i e_k U_i^1 U_k^1 y_1 + \cdots.$$

Der Index 1 bei den U soll andeuten, dass überall x_1, y_1 statt x, y zu schreiben ist. Die Curve (4) geht bei allen von $U_1 f \,.\,. U_r f$ erzeugten endlichen Transformationen demnach über in die Schar:

$$y_1 + \Sigma e_i U_i^1 y_1 + \Sigma \Sigma e_i e_k U_i^1 U_k^1 y_1 + \cdots$$
$$- \varphi(x_1 + \Sigma e_i U_i^1 x_1 + \Sigma \Sigma e_i e_k U_i^1 U_k^1 x_1 + \cdot \cdot) = 0$$

oder, da wir bei genügend kleinen absoluten Beträgen von $e_1 \,.\,. e_r$ entwickeln dürfen, in die Schar:

$$F \equiv y_1 - \varphi(x_1) + \Sigma e_i (U_i^1 y_1 - \varphi'(x_1) U_i^1 x_1) + \cdots = 0.$$

Hierin sind die Glieder, in denen Producte der $e_1 \,.\,. e_r$ auftreten, durch Punkte angedeutet.

Diese Schar $F = 0$ enthält r Parameter $e_1 \,.\,. e_r$. Wir haben zu beweisen, dass sie wesentlich sind. Dies wäre dann und nur dann nicht der Fall, wenn F eine Function von x_1, y_1 und nur $r-1$ Functionen von $e_1 \,.\,. e_r$ wäre, wenn also F eine homogene lineare partielle Differentialgleichung in $e_1 \,.\,. e_r$ erfüllte. Es ist aber:

$$\frac{\partial F}{\partial e_i} \equiv U_i^1 y_1 - \varphi'(x_1) U_i^1 (x_1) + \cdots. \tag{5}$$

Hierin sind die $e_1 \,.\,. e_r$ enthaltenden Glieder nur angedeutet. Eine Gleichung:

$$(6) \qquad \chi_1(e_1 \,..\, e_r)\frac{\partial F}{\partial e_1} + \cdot\cdot + \chi_r(e_1 \,..\, e_r)\frac{\partial F}{\partial e_r} = 0$$

würde sich aber immer in der Form schreiben lassen:

$$c_1 \frac{\partial F}{\partial e_1} + \cdot\cdot + c_r \frac{\partial F}{\partial e_r} + \cdot\cdot \quad = 0,$$

in der die Glieder in $\frac{\partial F}{\partial e_1} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial e_r}$, deren Coefficienten die $e_1 \,..\, e_r$ und ihre Producte und Potenzen sind, nicht mitgeschrieben sind, während $c_1 \,..\, c_r$ von $e_1 \,..\, e_r$ unabhängige Constanten bedeuten, die nicht sämtlich Null sind. Für $e_1 = e_2 = \cdot\cdot = e_r = 0$ käme also:

$$c_1 \left(\frac{\partial F}{\partial e_1}\right)_0 + \cdot\cdot + c_r \left(\frac{\partial F}{\partial e_r}\right)_0 = 0.$$

Es ist jedoch nach (5) für $e_1 = \cdot\cdot = e_r = 0$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial e_i}\right)_0 \equiv U_i^1 y_1 - \varphi'(x_1) U_i^1 x_1 \equiv U_i^1(y_1 - \varphi(x_1)).$$

Also müsste sein:

$$\sum_1^r c_i U_i^1(y_1 - \varphi(x_1)) = 0,$$

d. h. die Curve $y_1 - \varphi(x_1) = 0$ oder also $y - \varphi(x) = 0$ müsste die infinitesimale Transformation $\Sigma c_i U_i f$ gestatten, was der Voraussetzung widerspricht. Die Annahme (6) ist demnach undenkbar: $e_1 \,..\, e_r$ sind in der Schar $F = 0$ sämtlich wesentlich.

Hiermit ist Satz 7 bewiesen. Von ihm wie von den übrigen Sätzen machen wir im nächsten Paragraphen Gebrauch.

§ 2. Beweis des Hauptsatzes.

Zunächst beweisen wir *den ersten Teil des Hauptsatzes:*

Erster Teil des Hauptsatzes.

Vorgelegt sei eine r-gliedrige Gruppe der Ebene mit paarweis inversen Transformationen:

$$(7) \qquad x_1 = \varphi(x, y, a_1 \,..\, a_r), \quad y_1 = \psi(x, y, a_1 \,..\, a_r).$$

Nach Theorem 18, § 3 des 6. Kap., besitzt die Gruppe gerade r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \cdots U_r f$ und enthält überhaupt alle aus ihnen linear ableitbaren:

$$c_1 U_1 f + \cdot\cdot + c_r U_r f$$

und keine weiteren. Wir werden jetzt zeigen, dass die Klammerausdrücke $(U_i U_k)$ auch der Gruppe angehören, d. h. also linear aus $U_1 f \ldots U_r f$ ableitbar sind.

Sei etwa $(U_1 U_2)$ nicht linear aus $U_1 f \dots U_r f$ ableitbar. Alsdann betrachten wir die ∞^r infinitesimalen Transformationen:

$$Vf \equiv c(U_1 U_2) + c_1 U_1 f + \cdots + c_r U_r f, \tag{8}$$

in denen $c, c_1 \dots c_r$ Constanten bedeuten. Sie besitzen je ∞^1 Bahncurven, denn jede einzelne erzeugt ja bekanntlich durch Wiederholung eine eingliedrige Gruppe. Insgesamt haben sie also höchstens ∞^{r+1} Bahncurven.

Gestattet eine Curve der Ebene eine dieser Transformationen Vf, so ist sie entweder eine Bahncurve derselben oder alle ihre Punkte bleiben bei der betreffenden Vf ungeändert. Solcher invarianter Punkte kann es aber nur eine beschränkte Anzahl geben insofern, als ihr Ort höchstens aus einer discreten Anzahl von Curven bestehen kann. Mithin giebt es in der Ebene höchstens ∞^{r+1} Curven, deren jede bei wenigstens einer infinitesimalen Transformation Vf in sich übergeführt wird.

Daher giebt es sicher Curven, die *keine* der ∞^r *infinitesimalen* Transformationen Vf zulassen. Es sei k eine solche Curve. Wenn wir auf diese alle ∞^r *endlichen* Transformationen unserer Gruppe (7) ausüben, so geht sie in eine Schar von Curven über. Nach Satz 7, § 4 des 9. Kap., besteht diese Schar gerade aus ∞^r Curven, deren Inbegriff bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt. Diese ∞^r Curven werden analytisch durch eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung in x, y definiert:

$$y^{(r)} - \omega(x, y, y' \dots y^{(r-1)}) = 0. \tag{9}$$

Diese Differentialgleichung gestattet also $U_1 f \dots U_r f$. Nach Satz 3, § 1 des 9. Kap., gestattet sie daher auch z. B. $(U_1 U_2)$. Nach Voraussetzung soll sich $(U_1 U_2)$ nicht linear aus $U_1 f \dots U_r f$ ableiten lassen. Die Differentialgleichung (9) gestattet also mindestens $r + 1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. Nach Satz 4, § 1 des 9. Kap., lässt sie daher auch alle von den ∞^r infinitesimalen Transformationen (8) erzeugten endlichen Transformationen zu. Die Zahl derselben ist aber nach Theorem 20, § 2 des 7. Kap., ∞^{r+1}. Mithin gestattet die durch (9) dargestellte Schar von ∞^r Curven diese ∞^{r+1} verschiedenen endlichen Transformationen. Aber nach Satz 7 des vorigen Paragraphen geht die Curve k bei Ausführung aller dieser Transformationen in ∞^{r+1} verschiedene Curven über. Wir sind also zu einem Widerspruch gekommen. Die Annahme, dass $(U_1 U_2)$ von $U_1 f \dots U_r f$ unabhängig sei, ist mithin falsch. Es ist daher $(U_1 U_2)$ linear aus $U_1 f \dots U_r f$ ableitbar. Dasselbe gilt natürlich von jedem Klammerausdrucke $(U_i U_k)$. Daher:

Satz 8: *Sind* $U_1 f \ldots U_r f$ *r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe der Ebene, so ist jeder Klammerausdruck* $(U_i U_k)$ *aus ihnen von der Form:*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \ldots r),$$

in der die c_{iks} *gewisse Constanten sind.*

Um nunmehr die *Umkehrung* zu beweisen, nehmen wir an, es seien r von einander unabhängige infinitesimale projective Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$ in x, y vorgelegt, zwischen denen $\frac{r(r-1)}{2}$ Relationen von der Form

Umkehrung.

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \cdots r) \tag{10}$$

bestehen, sodass also die Klammerausdrücke der $U_1 f \ldots U_r f$ aus $U_1 f \ldots U_r f$ selbst linear ableitbar sind. Wir werden nachweisen, dass $U_1 f \ldots U_r f$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Man wird bemerken, dass der Beweis einige Analogien zum Beweise in § 3 des 9. Kap. darbietet. Wir werden uns deshalb auch knapper fassen.

Zunächst erkennen wir wie damals, dass die $(r-1)$-mal erweiterten infinitesimalen Transformationen gleich Null gesetzt ein gerade r-gliedriges vollständiges System bilden:

$$U_i^{r-1} f = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots r). \tag{11}$$

An Stelle der damaligen Curve, die keine infinitesimale projective Transformation gestattet, tritt hier nur eine Curve k, die keine infinitesimale Transformation $\Sigma e_i U_i f$ zulässt. Da es höchstens ∞^r Curven giebt, die eine dieser infinitesimalen Transformationen gestatten, giebt es sicher eine Curve k, wie sie gebraucht wird. Integration von (11) giebt eine Lösung J_{r-1}, sodass jede andere Lösung Function von dieser ist. Nun folgt weiter wie früher, dass

$$U_i^r f = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots r) \tag{12}$$

auch ein r-gliedriges vollständiges System mit der Lösung J_{r-1} und einer neuen Lösung J_r ist, welch letztere sicher $y^{(r)}$ enthält.

Von hier an weichen wir merklicher von der Betrachtung in § 3 des 9. Kap. ab: Jede Gleichung

$$J_r - \Omega(J_{r-1}) = 0 \tag{13}$$

stellt eine Differentialgleichung von sicher r^{ter} Ordnung dar, die alle infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$ sowie nach Satz 4, § 1 des

9. Kap., die von ihnen erzeugten endlichen Transformationen zulässt. Wir können nun überhaupt alle infinitesimalen Transformationen Vf aufgesucht denken, welche (13) invariant lassen. Nach Satz 2, § 1 des 9. Kap., leuchtet ein, dass sie eine Schar von der Form Σ Const. Vf bilden, die nach Satz 4 und 5 des § 1 des gegenwärtigen Kapitels eine ϱ-gliedrige Gruppe erzeugen, in der ϱ an eine endliche Grenze gebunden ist. Denn der in Satz 5 ausgeschlossene Fall $r = 1$ tritt nicht ein, da wir es ja mit mehr als einer infinitesimalen Transformation Uf zu thun haben, denn der Hauptsatz verliert für eingliedrige Gruppen jede Bedeutung.

Die ϱ-gliedrige Gruppe kann nun eine andere sein für eine andere Wahl der Function Ω von J_{r-1}. Es könnten sich also sehr viele Gruppen ergeben. Aber nach Satz 6 des § 1 bildet die allen diesen Gruppen gemeinsame continuierliche Schar von Transformationen für sich eine gewisse σ-gliedrige Gruppe G_σ. Die Zahl σ ist an eine endliche Grenze gebunden. Sicher enthält diese G_σ die infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$ selbst. Es ist daher $\sigma \geqq r$. Es mögen $V_1 f \dots V_{\sigma-r} f$ $\sigma - r$ von $U_1 f \cdots U_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe G_σ sein.

Die Differentialgleichung r^{ter} Ordnung (13) gestattet dann alle infinitesimalen Transformationen

$$(14) \qquad e_1 U_1 f + \cdots + e_r U_r f + c_1 V_1 f + \cdots + c_{\sigma-r} f V_{\sigma-r} f$$

einer gewissen σ-gliedrigen Gruppe. Nun giebt es höchstens ∞^σ Curven, die bei wenigstens einer dieser $\infty^{\sigma-1}$ infinitesimalen Transformationen in Ruhe bleiben. (Vgl. einen analogen Schluss nach Gleichung (8)). Mithin giebt es sicher Curven k, die keine infinitesimale Transformation (14) gestatten. In (13) lässt sich aber Ω immer so wählen, dass die Differentialgleichung eine derartige Curve k

$$y - \varphi(x) = 0$$

als Integralcurve besitzt, denn man braucht dazu nur Ω so zu wählen, dass (13) erfüllt wird durch

$$y = \varphi(x), \quad y' = \varphi'(x), \quad \cdots y^{(r)} = \varphi^{(r)}(x).$$

Dies ist immer möglich, sobald die Curve k nicht etwa Integralcurve der Gleichung

$$J_{r-1} = 0$$

ist. Dies letztere ist aber leicht zu vermeiden.

Nunmehr stellt die Differentialgleichung (13) ∞^r verschiedene Curven dar, unter denen die Curve k enthalten ist. Diese Schar gestattet alle $\infty^{\sigma-1}$ infinitesimalen Transformationen (14) und die von

ihnen erzeugten ∞^σ endlichen Transformationen. Nach Satz 7 wird jedoch die Curve k durch diese ∞^σ endlichen Transformationen in ∞^σ verschiedene Curven übergeführt. Demnach kann σ nicht grösser als r sein. Es ist also $\sigma = r$, d. h. die Gruppe G_σ reduciert sich auf die Schar aller endlichen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$, die also eine Gruppe bilden müssen.

Satz 9: *Stehen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \cdots U_r f$ der Ebene paarweis in Beziehungen von der Form*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i,\, k = 1,\, 2 \,..\, r),$$

in der die c_{iks} Constanten sind, so bilden die von den ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$ erzeugten endlichen Transformationen eine r-gliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.

Satz 8 und 9 geben nun vereinigt den *Hauptsatz* für die Gruppen der Ebene: Hauptsatz.

Theorem 25: *r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$ der Ebene erzeugen dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe mit paarweis inversen Transformationen, wenn die $U_i f$ paarweis in Beziehungen stehen von der Form*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i,\, k = 1,\, 2 \cdot\cdot\, r),$$

in der die c_{iks} Constanten sind.

§ 3. Nachträgliche Bemerkungen zum Hauptsatze.

Die früher eingeführte Redeweise „Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$“ hat nach unserem Hauptsatz nunmehr dann und nur dann einen Sinn, wenn die $(U_i U_k)$ linear ableitbar aus $U_1 f \ldots U_r f$ sind.

Wir sind jetzt in der Lage, den Satz 8 des § 4, 9. Kap., ohne den damaligen Vorbehalt auszusprechen. Wir fassen ihn mit dem Satz 9 desselben Paragraphen zusammen in dem

Theorem 26: *Eine r-gliedrige Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$ der Ebene besitzt nur eine Differentialinvariante J_{r-1} von niederer als r^{ter} Ordnung und ferner je eine Differentialinvariante $J_r, J_{r+1} \ldots$ von gerade r^{ter}, $(r+1)^{ter} \ldots$ Ordnung derart, dass jede Differentialinvariante $(r+s)^{ter}$ Ordnung eine beliebige Function von* Differential-invarianten.

J_{r-1}, J_r, $J_{r+1} \ldots J_{r+s}$ ist. J_{r-1} kann von niederer als $(r-1)^{ter}$ Ordnung sein. Es darf gesetzt werden):*

$$J_{r+s} = \frac{\frac{d^s J_r}{dx^s}}{\frac{d^s J_{r-1}}{dx^s}}.$$

Nach Satz 2, § 1 des 8. Kap., ist J_{r-1} von nur nullter Ordnung, d. h. eine Function von x und y allein, sobald die Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$ intransitiv ist. Andernfalls ist J_{r-1} mindestens von erster Ordnung.

In den fundamentalen Formeln

$$(15) \qquad (U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f$$

für die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe treten r^3 gewisse Constanten c_{iks} auf. Kennt man diese Constanten, so weiss man auch, wie sich die Klammerausdrücke aus den infinitesimalen Transformationen der Gruppe zusammensetzen. Das System dieser Constanten c_{iks} bestimmt, sagen wir, die *Zusammensetzung der Gruppe $U_1 f \ldots U_r f$**)*.

Zusammensetzung einer Gruppe.

---

*) Gestatten überhaupt n gegebene Differentialausdrücke

$$J_k\left(x_1 \cdots x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1{}^2} \cdots\right)$$

gewisse bekannte Transformationen in $x_1 \cdots x_n$, so ist das Gleiche mit der Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \frac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial J_n}{\partial x_n}$$

der Fall. Folglich geben $n+1$ solche Ausdrücke $J_1 \cdots J_{n+1}$ eine *neue* Differentialinvariante:

$$\frac{\Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial J_n}{\partial x_n}}$$

oder

$$\frac{\begin{pmatrix} J_1 \cdots J_{n-1}\ J_{n+1} \\ x_1 \cdots x_{n-1}\ \ x_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} J_1 \cdots\cdots J_n \\ x_1 \cdots\cdots x_n \end{pmatrix}}$$

oder, wenn wir das Bilden der Functionaldeterminante von $J_1 \cdot J_{n-1}$ und J_s als einen Differentiationsprocess von J_s auffassen:

$$\frac{d J_{n+1}}{d J_n}.$$

**) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.“, § 1 des 21. Kap.

Zu ein und derselben Gruppe gehören unendlich viele Systeme der c_{iks}. Denn man kann anstatt $U_1 f \ldots U_r f$ r lineare Combinationen derselben benutzen:

$$\overline{U}_i f \equiv \sum_1^r {}_j \gamma_{ij} U_j f \quad (i = 1, 2 \ldots r),$$

in denen die γ_{ij} irgend welche Constanten bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet. Alsdann werden sich die $(\overline{U}_i \overline{U}_k)$ in anderer Weise durch die $\overline{U} f$ ausdrücken als die $(U_i U_k)$ durch die Uf. Es leuchtet aber ein, dass alle Wertsysteme c_{iks} einer Gruppe bekannt sind, sobald man nur eines kennt.

Liegt eine Gruppe vor, so kann man sich daher das Problem stellen, die infinitesimalen Transformationen der Gruppe so auszuwählen, dass das System der c_{iks} eine möglichst einfache Gestalt annimmt, dass also die $(U_i U_k)$ sich in möglichst einfacher Weise durch die $U_1 f \ldots U_r f$ ausdrücken lassen.

Für zweigliedrige Gruppen $U_1 f$, $U_2 f$ gilt in Bezug hierauf der

Satz 10: *Jede zweigliedrige Gruppe $U_1 f$, $U_2 f$ kann durch passende Auswahl der infinitesimalen Transformationen auf eine solche Form gebracht werden, dass entweder*

$$(U_1 U_2) \equiv 0$$

oder aber

$$(U_1 U_2) \equiv U_1 f$$

ist *).

Denn allgemein wird

$$(U_1 U_2) \equiv a U_1 f + b U_2 f$$

sein. Ist $a = b = 0$, so liegt der erste Fall vor. Ist etwa $a \neq 0$, so setzen wir

$$\overline{U}_1 f \equiv U_1 f + \frac{b}{a} U_2 f, \quad \overline{U}_2 f \equiv \frac{1}{a} U_2 f$$

und erhalten die zweite Form

$$(\overline{U}_1 f, \ \overline{U}_2 f) \equiv \overline{U}_1 f.$$

Zwischen den Zusammensetzungsconstanten c_{iks} in (15) bestehen gewisse Relationen, die aus der sogenannten *speciellen Jacobi'schen Identität* folgen.

Jacobi'sche Identität.

Es gilt nämlich zunächst der

Satz 11: *Drei beliebige infinitesimale Transformationen Uf, Vf, Wf erfüllen immer die Identität:*

$$((UV)W) + ((VW)U) + ((WU)V) \equiv 0.$$

*) Siehe „Diffgln. m. inf. Trf.", Satz 1, § 1 des 18. Kap.

Diese Jacobi'sche Identität kann man durch directe Ausrechnung der Klammerausdrücke verificieren. Einen kürzeren Beweis lieferten wir an einer anderen Stelle*).

Wir bemerken noch, dass diese Identität für infinitesimale Transformationen in beliebig vielen Veränderlichen gilt.

Nach diesem Satze ist nun für drei beliebige infinitesimale Transformationen $U_i f$, $U_k f$, $U_l f$ einer Gruppe $U_1 f \dots U_r f$:

$$(16) \qquad ((U_i U_k) U_l) + ((U_k U_l) U_i) + ((U_l U_i) U_k) \equiv 0.$$

Es ist aber nach (15):

$$((U_i U_k) U_l) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} (U_s U_l)$$

und nach derselben Formel:

$$(U_s U_l) \equiv \sum_1^r {}_t\, c_{slt} U_t f,$$

daher:

$$((U_i U_k) U_l) \equiv \sum_1^r {}_s \sum {}_t\, c_{iks} c_{slt} U_t f.$$

Vertauschen wir hierin i, k, l cyklisch, so ergeben sich im ganzen drei Identitäten. Ihre Addition liefert dann infolge der Identität (16):

$$\sum_1^r {}_s \sum {}_t (c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt}) U_t f \equiv 0.$$

Da aber $U_1 f \dots U_r f$ von einander unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur dann bestehen, wenn darin die Coefficienten von $U_1 f \dots U_r f$ einzeln Null sind. Dies führt zu dem

Relationen zwischen den c_{iks}.

Satz 12: *Ist in der Gruppe $U_1 f \dots U_r f$ allgemein*

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r),$$

so bestehen zwischen den Constanten c_{iks} die Relationen:

$$\sum_1^r {}_s (c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt}) = 0$$
$$(i, k, l, t = 1, 2 \dots r).$$

Später bei Betrachtung der Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen werden wir beweisen, dass sich zu einem System von r^3 Con-

*) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.", § 4 des 10. Kap.

stanten c_{iks}, welche die soeben angegebenen Relationen erfüllen, stets eine Gruppe construieren lässt, deren Zusammensetzung gerade von diesen c_{iks} gebildet wird*).

§ 4. Die Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit.

Wir kommen jetzt dazu, den Hauptsatz auch für die Gruppen der Geraden, für die Gruppen, bei denen nur eine Veränderliche transformiert wird, abzuleiten.

Hauptsatz für die Gruppen der Geraden.

Ist

$$x_1 = \varphi(x, a_1 \,.\,.\, a_r) \tag{17}$$

eine r-gliedrige continuierliche Gruppe der Geraden mit paarweis inversen Transformationen, so besitzt sie r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $U_1 f \ldots U_r f$, aus denen alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe linear ableitbar sind. (Nach Satz 2, § 3 des 7. Kap.) Dabei haben die $U_i f$ die Form:

$$U_i f \equiv \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ferner bilden die Gleichungen

$$x_1 = \varphi(x, a_1 \,.\,.\, a_r), \quad y_1 = y$$

eine r-gliedrige Gruppe der Ebene mit paarweis inversen Transformationen. Da bei ihr y nicht geändert wird, sind ihre infinitesimalen Transformationen identisch mit denen der Gruppe (17). Mithin gilt der erste Teil des Hauptsatzes, also Satz 8 des § 2, auch für die Gruppe (17).

Umgekehrt seien nun $U_1 f \ldots U_r f$ r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Variabeln x von der Form

$$U_i f \equiv \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x},$$

welche Relationen erfüllen von der Form:

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 \,.\,.\, r),$$

*) Aus diesem von Lie entdeckten Satze hat er eine Reihe wichtiger Sätze über die Zusammensetzung der Gruppen abgeleitet. Herr Killing, der später einige weitergehende Schlüsse aus diesem Satze gezogen hat, citiert bei der Benutzung desselben irrtümlicherweise fortwährend Jacobi, der weder die Summenformel des Satzes 12 noch die Lie'schen Fundamentalformeln $(U_i U_k) \equiv \Sigma c_{iks} U_s f$ kannte. Infolgedessen bemerkt ein Leser der Killing'schen Arbeiten nicht, dass seine *sämtlichen* gruppentheoretischen Folgerungen auf Lie's allgemeinen Theorien beruhen.

in denen die c_{iks} Constanten bedeuten. Alsdann lassen sich $U_1 f \ldots U_r f$ auch als infinitesimale Transformationen in zwei Veränderlichen x, y auffassen, bei denen allerdings y nicht geändert wird. Nach Satz 9 des § 2 erzeugen sie eine r-gliedrige Gruppe der Ebene mit paarweis inversen Transformationen. Da x bei ihnen nur von x abhängige Incremente und y stets das Increment Null erhält, so hat diese Gruppe die Form

$$x_1 = \varphi(x, a_1 \ldots a_r), \quad y_1 = y.$$

Es leuchtet dann ein, dass die Gleichung

$$x_1 = \varphi(x, a_1 \ldots a_r)$$

für sich eine r-gliedrige Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit x mit paarweis inversen Transformationen darstellt. Der zweite Teil des Hauptsatzes gilt daher auch für die Gruppen der Geraden. Wir sagen somit:

Satz 13: *Der Hauptsatz der Gruppentheorie gilt auch für die Gruppen der Geraden.*

Bestimmung aller Gruppen der Geraden.

Um nun alle continuierlichen Gruppen der Geraden mit paarweis inversen Transformationen zu bestimmen, wollen wir annehmen, es seien

$$U_i f \equiv \xi_i(x) p \quad (i = 1, 2 \ldots r)$$

r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer solchen r-gliedrigen Gruppe. Da wir, wie immer, die ξ_i als analytische Functionen voraussetzen, die sich an einer allgemein aber bestimmt gewählten Stelle (x^0) regulär verhalten, so lassen sich die ξ_i für hinreichend wenig von x^0 abweichende Werte von x nach ganzen Potenzen von $x - x^0$ entwickeln, sodass die $U_i f$ die Form haben:

Reihenentwickelung der inf. Transform.

$$U_i f \equiv (a_{i0} + a_{i1}(x - x^0) + a_{i2}(x - x^0)^2 + \cdots) p$$
$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

Hierin können gewisse der Constanten $a_{i0}, a_{i1} \ldots$ verschwinden. Wir wollen eine infinitesimale Transformation als eine von der ϱ^{ten} Ordnung bezeichnen, wenn ihre Reihenentwickelung erst mit $(x - x^0)^\varrho$ beginnt. Also ist $U_i f$ von ϱ^{ter} Ordnung, wenn $a_{i0} = a_{i1} = \cdots = a_{i\varrho - 1} = 0$, aber $a_{i\varrho} \neq 0$ ist. Sind

Inf. Transformation ϱter Ordng.

$$Vf \equiv (a(x - x^0)^\varrho + \cdots) p \quad (a \neq 0),$$
$$Wf \equiv (b(x - x^0)^\sigma + \cdots) p \quad (b \neq 0)$$

von ϱ^{ter} bez. σ^{ter} Ordnung, so giebt die Klammeroperation

$$(VW) \equiv a(x-x^0)^\varrho\big(\sigma b(x-x^0)^{\sigma-1}+\cdots\big)p+\cdots$$
$$-\,b(x-x^0)^\sigma\big(\varrho a(x-x^0)^{\varrho-1}+\cdots\big)p+\cdots$$
$$\equiv\big((\sigma-\varrho)ab(x-x^0)^{\varrho+\sigma-1}+\cdots\big)p,$$

d. h. eine infinitesimale Transformation von gerade $\varrho+\sigma-1^{\text{ter}}$ Ordnung und nicht etwa bloss Null, sobald $\varrho \neq \sigma$ ist. Von dieser Bemerkung werden wir sogleich Gebrauch machen.

Zunächst kann der Punkt (x^0) so gewählt werden, dass er nicht bei allen $U_i f$ invariant ist, d. h. dass sich nicht alle $U_i f$ für $x = x^0$ auf Null reducieren. Sei (x^0) etwa bei $U_1 f$ nicht invariant. Dann ist $a_{10} \neq 0$. Da es auf einen Zahlenfactor nicht ankommt, kann $U_1 f$ durch a_{10} dividiert werden. So ergiebt sich dann die infinitesimale Transformation

$$V_0 f \equiv (1 + a(x-x^0)+\cdots)p.$$

Existiert nun noch eine von $V_0 f$ unabhängige infinitesimale Transformation der Gruppe, die mit einem Gliede 0ter Ordnung anfängt, so kann man aus ihr und $V_0 f$ eine von $V_0 f$ unabhängige infinitesimale Transformation linear ableiten, die von erster Ordnung ist:

$$V_1 f \equiv ((x-x^0)+\cdots)p.$$

Wenn dagegen keine solche mehr vorhanden ist, so könnte doch eine von erster Ordnung da sein. Diese würden wir alsdann als $V_1 f$ benutzen. Ist auch keine von erster Ordnung da, so doch eine von etwa ϱ^{ter} Ordnung $(\varrho > 1)$, die mit Uf bezeichnet sei. Alsdann gehört nach dem Hauptsatze auch $(V_0 U)$ der Gruppe an. Sie ist aber nach der vorausgeschickten Bemerkung von $(\varrho-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese giebt mit $V_0 f$ durch Klammeroperation eine von $(\varrho-2)^{\text{ter}}$ Ordnung u. s. w. Schliesslich kommen wir also doch zu einer von erster Ordnung, die wir als $V_1 f$ verwerten. Genau so sieht man ein, dass auch eine infinitesimale Transformation der Gruppe von zweiter Ordnung vorhanden ist u. s. w. So finden wir, dass die Gruppe sicher r infinitesimale Transformationen von der Form

$$\begin{aligned}
V_0 f &\equiv (1 + a(x-x^0)+\cdots)p,\\
V_1 f &\equiv ((x-x^0)+\cdots)p,\\
V_2 f &\equiv ((x-x^0)^2+\cdots)p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
V_{r-1} f &\equiv ((x-x_0)^{r-1}+\cdots)p
\end{aligned}$$

enthält. Sie sind von einander unabhängig, denn wenn

$$c_0 V_0 f + c_1 V_1 f + \cdots + c_{r-1} V_{r-1} f = 0$$

wäre, so würde folgen, dass

$$c_0 + (c_1 + ac_0)(x - x^0) + (c_2 + \cdot\cdot)(x - x^0)^2 + \cdots$$
$$+ (c_{r-1} + \cdot\cdot)(x - x^0)^{r-1} + \cdot\cdot = 0,$$

also zunächst $c_0 = 0$, daher $c_1 = 0$, folglich $c_2 = 0$ u. s. w. wäre.

Mithin ist jede infinitesimale Transformation unserer Gruppe linear aus $V_0 f$, $V_1 f \ldots V_{r-1} f$ ableitbar. Offenbar lassen sich aus ihnen auch keine von höherer als $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung linear ableiten. Folglich sind die infinitesimalen Transformationen der Gruppe von höchstens $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Nun gehören $V_{r-2} f$ und $V_{r-1} f$ der Gruppe an, dasselbe gilt von ihrem nicht verschwindenden Klammerausdruck, der aber von der Ordnung $(r-2) + (r-1) - 1$ ist. Also ist:

$$(r-2) + (r-1) - 1 < r$$

oder

$$r < 4.$$

Somit kommen nur die Werte $r = 1, 2, 3$ in Betracht.

Maximalzahl $r = 3$.

Satz 14: *Eine endliche continuierliche Gruppe der Geraden mit paarweis inversen Transformationen enthält höchstens drei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.*

Dass die Maximalzahl $r = 3$ wirklich vorkommt, lehrt die dreigliedrige projective Gruppe der Geraden (siehe Kap. 5).

Eingliedrige Gruppen.

Ist zunächst $r = 1$, so liegt nur eine infinitesimale Transformation vor:

$$Uf \equiv \xi(x)p.$$

Führen wir $\int \frac{dx}{\xi}$ als neues x ein, so kommt einfach die Gruppe:

$$\boxed{p}\,.$$

Zweigliedrige Gruppen.

Ist die Gruppe zweigliedrig, $U_1 f$, $U_2 f$, so darf nach Satz 10 des § 2 gesetzt werden: entweder

$$(U_1 U_2) \equiv 0$$

oder

$$(U_1 U_2) \equiv U_1 f.$$

Im ersteren Fall dürfen wir wie vorher

$$U_1 f \equiv p$$

annehmen. Dann kommt, wenn

$$U_2 f \equiv \xi p$$

ist:

$$\frac{d\xi}{dx} p \equiv 0,$$

d. h. ξ ist eine Constante. Dann aber sind $U_1 f$ und $U_2 f$ nicht von einander unabhängig. Dieser Fall kommt also nicht in Betracht. Es ist vielmehr anzunehmen:

$$(U_1 U_2) \equiv U_1 f.$$

Zunächst kann

$$U_1 f \equiv p$$

angenommen werden. Dann ergiebt sich für

$$U_2 f \equiv \xi p$$

die Bedingung

$$\frac{d\xi}{dx} = 1, \text{ also } \xi = x + \text{Const.},$$

sodass $U_2 f \equiv xp + \text{Const.}\, p$ ist. Nun kann $U_2 f - \text{Const.}\, U_1 f$ als $U_2 f$ benutzt werden, sodass sich der Typus ergiebt:

$$\boxed{p \quad xp}.$$

Dreigliedrige Gruppen.

Ist die Gruppe dreigliedrig: $U_1 f$, $U_2 f$, $U_3 f$, so können wir voraussetzen, $U_1 f$ sei von nullter, $U_2 f$ von erster und $U_3 f$ von zweiter Ordnung. Dann ist $(U_1 U_2)$ von nullter, $(U_1 U_3)$ von erster und $(U_2 U_3)$ von zweiter Ordnung nach der oben gemachten Bemerkung. Demnach ist:

$$(U_1 U_2) \equiv a U_1 f,$$
$$(U_1 U_3) \equiv b U_1 f + c U_2 f,$$
$$(U_2 U_3) \equiv e U_1 f + g U_2 f + h U_3 f.$$

Hierin bedeuten a, b, c, e, g, h Constanten. Wir sehen, dass $U_1 f$ und $U_2 f$ für sich eine zweigliedrige Gruppe erzeugen, die bei passender Wahl der Veränderlichen x auf die obige Form p, xp gebracht werden kann:

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv xp.$$

Sei nun

$$U_3 f \equiv \xi p,$$

so kommt:

$$(U_1 U_3) \equiv \frac{d\xi}{dx} p \equiv bp + cxp,$$

$$(U_2 U_3) \equiv \left(x \frac{d\xi}{dx} - \xi\right) p \equiv ep + gxp + h\xi p,$$

sodass

$$\frac{d\xi}{dx} = b + cx,$$

$$x \frac{d\xi}{dx} = e + gx + (h+1)\xi$$

wird. Hiernach muss ξ die Form haben:

$$\xi = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

in der α, β, γ gewisse Constanten bedeuten. Dann ist

$$U_3 f - \alpha U_1 f - \beta U_2 f \equiv \gamma x^2 p.$$

Sonach dürfen wir die Gruppe in der Form annehmen:

$$\boxed{p \quad xp \quad x^2p}.$$

Also sagen wir:

Zusammenstellung aller Gruppen der Geraden.

Theorem 27: *Eine endliche continuierliche Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit mit paarweis inversen Transformationen ist höchstens dreigliedrig. Sie lässt sich durch Einführung einer passenden Veränderlichen stets auf eine der drei Formen bringen:*

$$\boxed{p} \quad \boxed{p \quad xp} \quad \boxed{p \quad xp \quad x^2p}.$$

Dieses Theorem ist deshalb besonders merkwürdig, weil es zeigt, dass sich jede solche Gruppe der Geraden auf eine *projective* Gruppe zurückführen lässt. Vgl. Theorem 15, § 2 des 5. Kap. Man darf aber nicht in den Irrtum verfallen, auch sonst in Theorem 15 Gesagtes auf das jetzige Ergebnis auszudehnen. Eine zweigliedrige Gruppe z. B. kann sehr wohl mehr als einen Punkt in Ruhe lassen, obwohl ihr Typus p, xp nur einen invarianten Punkt hat. Es kommt dies daher, dass bei der Einführung einer passenden neuen Veränderlichen mehrdeutige Functionen benutzt werden können. Wenn etwa $\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ als neues x benutzt wird, so geht die Gruppe p, xp in

$$\frac{1 - x^2}{2x} p, \quad \frac{(1 - x^2)^2}{2x} p$$

über und lässt die *beiden* Punkte $x = \pm 1$ in Ruhe. Es können sogar nach passender Substitution der neuen Veränderlichen unendlich viele discrete Punkte in Ruhe bleiben. Doch sind dies functionentheoretische Fragen, auf die wir nicht weiter eingehen. Es sollte eben nur vor einem hier naheliegenden Irrtum gewarnt werden.

Kapitel 13.

Bestimmung der imprimitiven Gruppen der Ebene.

Wir greifen nunmehr das Problem an, *alle endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene mit paarweis inversen Transformationen zu bestimmen.* Dabei ist es zweckmässig, die Bestimmung der *imprimitiven* von der der *primitiven* Gruppen zu trennen, weil diese beiden Klassen verschiedene Behandlungsweisen erfordern. Zunächst bestimmen wir alle imprimitiven Gruppen.

§ 1. Vorbemerkungen.

Als wir im 11. Kapitel alle projectiven Gruppen der Ebene bestimmten und auf typische Formen brachten, bedienten wir uns zweier Hülfsmittel zur Vereinfachung der Gruppen. Einerseits suchten wir durch Einführung passender linearer Combinationen der infinitesimalen Transformationen der Gruppen ihre Zusammensetzung, andererseits durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge passender *projectiver* Transformationen die Gestalt ihrer infinitesimalen Transformationen möglichst zu vereinfachen. Das erstere Mittel werden wir ebenso bei der Bestimmung aller Gruppen der Ebene anwenden, das zweite dagegen mit einer Abänderung. Wir werden nämlich jetzt, wo es auf projective Eigenschaften nicht ankommt, *zwei solche Gruppen als gleichberechtigt bezeichnen, die vermöge irgend welcher Transformation in einander überführbar sind,* indem wir Satz 4, § 4 des 6. Kap., benutzen. Demnach werden wir die infinitesimalen Transformationen dadurch zu vereinfachen suchen, dass wir nicht gerade durch projective, sondern durch irgendwelche passende Transformation neue Veränderliche einführen. Alsdann rechnen wir alle Gruppen zu demselben *Typus*, die dadurch in einander verwandelt werden können.

Zur Bestimmung der imprimitiv. Gruppen.

Wir beginnen mit der *Bestimmung der imprimitiven Gruppen.* Eine r-gliedrige derartige Gruppe $U_1 f \dots U_r f$ lässt nach § 3 des 8. Kap. eine Schar von ∞^1 Curven

$$\varphi(x, y) = \text{Const.}$$

invariant, indem sie diese Curven in einander überführt. Benutzen wir $\varphi(x, y)$ als neues x und eine davon unabhängige Function als neues y, so folgt: Wir können annehmen, dass die gesuchte Gruppe $U_1 f \dots U_r f$ die Geraden

Invariante Geradenschar. $x = \text{Const.}$

$$x = \text{Const.}$$

unter einander transformiert, d. h. dass mit $x = $ Const. auch das Increment von x constant ist, *dass also in* $U_1 f \dots U_r f$ *die Coefficienten von* p *nur von* x *abhängen.* Die Uf haben dann die Form:

$$U_i f \equiv \xi_i(x) p + \eta_i(x, y) q. \tag{1}$$

Da die Uf eine Gruppe erzeugen, so ist nach dem Hauptsatz

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} U_s f. \tag{2}$$

Es kommt aber nach (1):

$$(U_i U_k) \equiv \left(\xi_i \frac{d\xi_k}{dx} - \xi_k \frac{d\xi_i}{dx}\right) p + (\cdots) q,$$

d. h. der Coefficient von p in $(U_i U_k)$ ist derselbe wie der von p in der Combination von

$$\xi_i(x) p \text{ und } \xi_k(x) p$$

allein. Setzen wir

$$X_i f \equiv \xi_i(x) p \quad (i = 1, 2 \dots r),$$

so sehen wir also, dass nach (2) auch

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f$$

ist. Die $X_1 f \dots X_r f$ transformieren nur x und erzeugen nach dieser Formel und nach Satz 13, § 4 des vorigen Kap., *eine Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit* x.

Die $X_i f$ geben an, wie die Geraden $x = $ Const. bei den $U_i f$ unter einander transformiert werden. Sie erzeugen diejenige Gruppe in x, vermöge deren die Gruppe $U_1 f \dots U_r f$ die Geraden $x = $ Const. in einander überführt. Wir nennen die $X_i f$ die *verkürzten* infinitesimalen Transformationen und ihre Gruppe *die verkürzte Gruppe.*

Verkürzte Gruppe.

Nach Theorem 27, § 4 des 12. Kap., ist diese verkürzte Gruppe höchstens dreigliedrig. Hierdurch bietet sich eine naturgemässe Teilung unseres Problems in vier einzelne dar, je nachdem x nullgliedrig, eingliedrig, zwei- oder dreigliedrig transformiert wird.

Teilung des Problems.

§ 2. Erster Fall: Die Curvenschar wird nullgliedrig transformiert.

Wenn wir annehmen, dass die verkürzte Gruppe nullgliedrig sei, so heisst dies: Jede der Geraden $x = $ Const. bleibt für sich invariant, ihre Punkte werden unter sich vertauscht. Dann sind alle $X_i f \equiv 0$, d. h. alle $\xi_i \equiv 0$, sodass die gesuchte Gruppe zunächst die Form hat:

$$U_i f \equiv \eta_i(x, y) q \quad (i = 1, 2 \ldots r).$$

Geben wir hierin x einen bestimmten Wert, so erzeugen die $U_i f$ immer noch eine Gruppe. Einmal folgt dies begrifflich daraus, dass eine solche Annahme $x = x^0$ besagt, dass nur die Punkte einer bestimmten der invarianten Geraden ins Auge gefasst werden sollen. Andererseits aber erkennt man, da jetzt

Festhalten einer Geraden. $x = x^0$.

$$(U_i U_k) \equiv \left(\eta_i \frac{\partial \eta_k}{\partial y} - \eta_k \frac{\partial \eta_i}{\partial y}\right) q$$

ist, dass die $(U_i U_k)$ genau ebenso zu bilden sind, ob nun x allgemein oder speciell angenommen wird, sodass auch für $x = x^0$

$$(U_i^0 U_k^0) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} U_s^0 f$$

ist. Der Index 0 soll hierin die Substitution $x = x^0$ andeuten.

Aber die Gruppe $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ der Punkte (y) der Geraden $x = x^0$ braucht nicht auch r-gliedrig zu sein, vielmehr können zwischen $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, indem die Coefficienten ja x^0 enthalten können. Ja wir wissen, dass die Gruppe $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ nach Theorem 27 in § 4 des letzten Kap. höchstens dreigliedrig ist, da sie nur die einfache Mannigfaltigkeit y transformiert. Also besteht zwischen je vieren der $U_i^0 f$ sicher eine Relation mit nur von x^0 abhängigen Coefficienten, demnach auch zwischen je vieren der $\eta_i(x^0, y)$:

$$\varphi_i(x^0)\eta_i(x^0, y) + \varphi_j(x^0)\eta_j(x^0, y) + \varphi_k(x^0)\eta_k(x^0, y) + \varphi_l(x^0)\eta_l(x^0, y) \equiv 0.$$

Da dies für jede Gerade (x^0) gilt, so folgt, dass zwischen je vieren der $\eta(x, y)$ sicher eine Relation mit nur von x abhängigen Coefficienten besteht:

$$\varphi_i(x)\eta_i(x, y) + \varphi_j(x)\eta_j(x, y) + \varphi_k(x)\eta_k(x, y) + \varphi_l(x)\eta_l(x, y) \equiv 0.$$

Nun können aber solche Relationen schon zwischen je zweien oder wenigstens schon zwischen je dreien der y bestehen. Somit liegen drei Fälle vor, die wir auch so charakterisieren können: Die Gruppe $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ auf der Geraden (x^0) ist eingliedrig, zweigliedrig oder dreigliedrig bei beliebiger, aber bestimmter Wahl von x^0. Wäre sie nullgliedrig, so würden alle Punkte der Ebene in Ruhe bleiben.

Drei Fälle.

I. *Die Gruppe $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ sei eingliedrig.* Alsdann ist also etwa:

Erster Fall.

$$\eta_2 \equiv \varphi_2(x)\eta_1, \quad \eta_3 \equiv \varphi_3(x)\eta_1, \quad \ldots \eta_r \equiv \varphi_r(x)\eta_1,$$

während $\eta_1 \not\equiv 0$ ist, sodass die gesuchte Gruppe die Form annimmt:

$$\eta_1 q, \quad \varphi_2(x)\eta_1 q, \quad \varphi_3(x)\eta_1 q \ldots \varphi_r(x)\eta_1 q.$$

Aber $\eta_1 q$ kann dadurch, dass man als neues y eine Function benutzt, deren Differentialquotient nach y gleich $\frac{1}{\eta_1}$ ist, auf die Form q gebracht werden. Dann haben wir

$$\boxed{q \quad \varphi_2(x)q \quad \varphi_3(x)q \;..\; \varphi_r(x)q}\,.$$

In der That ist dies eine Gruppe, denn die Klammeroperationen geben stets Null.

Zweiter Fall.

II. *Die Gruppe* $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ *sei zweigliedrig*, sodass zwischen je dreien der η eine Relation besteht. Hier können wir setzen:

$$\eta_k \equiv \varphi_k(x)\eta_1 + \psi_k(x)\eta_2$$
$$(k = 3,\ 4\, ..\, r),$$

sodass

(3) $U_1 f \equiv \eta_1 q, \quad U_2 f \equiv \eta_2 q, \quad U_k f \equiv \varphi_k U_1 f + \psi_k U_2 f \quad (k = 3,\ 4\, ..\, r)$

ist. Dabei darf keine Relation zwischen η_1 und η_2 allein bestehen, d. h. es muss $\eta_1 : \eta_2$ die Grösse y wirklich enthalten, denn sonst läge die vorige Annahme vor. Nach dem Hauptsatze ist $(U_1 U_2)$ linear aus $U_1 f \ldots U_r f$ ableitbar. Hier kommt also nach (3) eine solche Gleichung:

$$(U_1 U_2) \equiv \omega_1(x) U_1 f + \omega_2(x) U_2 f.$$

Wären ω_1 und ω_2 beide Null, so käme

$$\eta_1 \frac{d\eta_2}{dy} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{dy} = 0,$$

d. h. $\eta_1 : \eta_2$ wäre frei von y. Wir dürfen also etwa $\omega_1 \not\equiv 0$ annehmen. Betrachten wir nun die beiden infinitesimalen Transformationen

$$V_1 f \equiv U_1 f + \frac{\omega_2(x)}{\omega_1(x)} U_2 f, \quad V_2 f \equiv \frac{1}{\omega_1(x)} U_2 f.$$

Sie gehören natürlich im allgemeinen der Gruppe nicht an, denn sie sind nicht mit *constanten* Coefficienten aus $U_1 f \ldots U_r f$ ableitbar. Aber wir werden doch aus ihnen Nutzen ziehen. Es ist nämlich

$$(V_1 V_2) \equiv V_1 f.$$

Wir können durch Einführung einer passenden von y nicht freien Function von x und y als neues y erreichen, dass

$$V_1 f \equiv q$$

wird. Alsdann folgt aus $(V_1 V_2) \equiv V_1 f$ ohne Mühe, dass $V_2 f$ die Form hat

$$V_2 f \equiv (y + \chi(x))q.$$

Benutzen wir endlich $y + \chi(x)$ als neues y, so wird

$$V_1 f \equiv q, \quad V_2 f \equiv yq.$$

Durch diese Einführung einer neuen Veränderlichen y wird die Form der Ausdrücke (3), soweit sie für uns wesentlich ist, nicht gestört. Wir dürfen also annehmen, diese Substitution wäre schon zu Anfang vollzogen. Wegen

$$V_1 f \equiv U_1 f + \frac{\omega_2}{\omega_1} U_2 f, \quad V_2 f \equiv \frac{1}{\omega_1} U_2 f,$$

kommt dann umgekehrt:

$$U_1 f \equiv V_1 f - \omega_2 V_2 f, \quad U_2 f \equiv \omega_1 V_2 f$$

oder

$$U_1 f \equiv (1 - \omega_2 y) q, \quad U_2 f \equiv \omega_1 yq.$$

Hierin sind ω_1 und ω_2 Functionen von y allein. Jetzt kommt:

$$(U_1 U_2) \equiv \omega_1 q, \quad (\omega_1 q, U_2) \equiv \omega_1^2 q, \quad (\omega_1^2 q, U_2) \equiv \omega_1^3 q$$

u. s. w. Alle diese Klammerausdrücke gehören aber nach dem Hauptsatze der Gruppe an. Wenn aber ω_1 keine Constante ist, so sind alle diese Transformationen $\omega_1 q$, $\omega_1^2 q$, $\omega_1^3 q \ldots$, deren Zahl beliebig weit ausgedehnt werden kann, von einander unabhängig. Da die Gruppe aber nur eine endliche Anzahl von unabhängigen infinitesimalen Transformationen enthalten darf, so muss also ω_1 eine Constante sein. Daher darf $U_2 f \equiv yq$ gesetzt werden, während die Gruppe auch $\omega_1 q$, also auch q enthält. Wir dürfen daher jetzt annehmen:

$$U_1 f \equiv q, \quad U_2 f \equiv yq,$$

sowie:

$$U_k f \equiv \varphi_k(x) q + \psi_k(x) yq$$
$$(k = 3, 4 \ldots r).$$

Nun ist

$$(U_1 U_k) \equiv \psi_k U_1 f,$$
$$(\psi_k U_1 f, \ U_k) \equiv \psi_k^2 U_1 f$$

u. s. w. Also gehören $\psi_k q$, $\psi_k^2 q$, $\psi_k^3 q \ldots$ der Gruppe an. Ähnlich wie vorhin für ω_1 folgern wir hieraus für ψ_k, dass es eine Constante c_k sein muss. Alsdann können wir statt der $U_k f$ die $U_k f - c_k U_2 f$ als Symbole benutzen und haben die Gruppe:

$$\boxed{q \quad yq \quad \varphi_3(x) q \quad \varphi_4(x) q \cdot\cdot \varphi_r(x) q \atop r > 1}.$$

Wie auch die $\varphi_3, \varphi_4 \ldots \varphi_r$ als Functionen der x gewählt sein mögen, immer ist dies offenbar nach dem Hauptsatze eine Gruppe.

Dritter Fall.

III. *Die Gruppe $U_1^0 f \ldots U_r^0 f$ sei dreigliedrig.* Hier werden die Punkte jeder Geraden $x = \text{Const.}$ dreigliedrig transformiert. Wir

wissen, dass jede dreigliedrige Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit y auf die Form

$$q, \quad yq, \quad y^2 q$$

gebracht werden kann, nach Theorem 27, § 4 des 12. Kap. Aber in unserem Falle enthält die Gruppe noch x, ohne jedoch diese Variabele zu transformieren. Daraus folgt, dass sich die allgemeinen infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe durch passende Wahl der Variabeln y auf die Form

$$U_k f \equiv \varphi_k(x) q + \psi_k(x) y q + \chi_k(x) y^2 q$$

bringen lassen. Nun ist:

$$(4) \quad \begin{aligned} (U_i U_k) &\equiv (\varphi_i \psi_k - \psi_i \varphi_k) q + 2(\varphi_i \chi_k - \chi_i \varphi_k) y q + (\psi_i \chi_k - \chi_i \psi_k) y^2 q, \\ (U_i U_j) &\equiv (\varphi_i \psi_j - \psi_i \varphi_j) q + 2(\varphi_i \chi_j - \chi_i \varphi_j) y q + (\psi_i \chi_j - \chi_i \psi_j) y^2 q. \end{aligned}$$

Die Coefficienten hierin sind also die Determinanten von je zweien der φ, ψ, χ. Combinieren wir nochmals, indem wir $((U_i U_k)(U_i U_j))$ bilden, so erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck. Insbesondere hat darin q den Coefficienten:

$$2 \begin{vmatrix} \varphi_i \psi_k - \psi_i \varphi_k & \varphi_i \chi_k - \chi_i \varphi_k \\ \varphi_i \psi_j - \psi_i \varphi_j & \varphi_i \chi_j - \chi_i \varphi_j \end{vmatrix},$$

yq den Coefficienten

$$2 \begin{vmatrix} \varphi_i \psi_k - \psi_i \varphi_k & \psi_i \chi_k - \chi_i \psi_k \\ \varphi_i \psi_j - \psi_i \varphi_j & \psi_i \chi_j - \chi_i \psi_j \end{vmatrix}$$

und $y^2 q$ den Coefficienten:

$$2 \begin{vmatrix} \varphi_i \chi_k - \chi_i \varphi_k & \psi_i \chi_k - \chi_i \psi_k \\ \varphi_i \chi_j - \chi_i \varphi_j & \psi_i \chi_j - \chi_i \psi_j \end{vmatrix}.$$

Aus der ersten Determinante lässt sich φ_i, aus der zweiten ψ_i und aus der dritten χ_i als Factor absondern, sodass sich schliesslich ergiebt:

$$((U_i U_k)\,(U_i U_j)) \equiv 2 \begin{vmatrix} \varphi_i & \varphi_k & \varphi_j \\ \psi_i & \psi_k & \psi_j \\ \chi_i & \chi_k & \chi_j \end{vmatrix} \cdot U_i f.$$

Bezeichnen wir die Determinante $\Sigma \pm \varphi_i \psi_k \chi_j$ mit Δ_{ikj}, so haben wir also:

$$(5) \qquad ((U_i U_k)\,(U_i U_j)) \equiv 2 \Delta_{ikj} U_i f.$$

Geometrische Deutung.

Dass eine solche Relation besteht, sieht man am ungezwungensten ein, wenn man von einer naheliegenden geometrischen Deutung Gebrauch macht. Wir fassen in

$$U_i f \equiv \varphi_i q + \psi_i y q + \chi_i y^2 q$$

φ_i, ψ_i und χ_i als homogene Punktcoordinaten in der Ebene auf, sodass jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe ein Punkt der Ebene entspricht, während umgekehrt zu einem Punkte der Ebene allerdings unendlich viele infinitesimale Transformationen gehören können, von denen sich aber je zwei nur um einen Factor, der von x abhängt, unterscheiden können. Die Combinationsformel (4) sagt dann aus, dass dem Klammerausdruck $(U_i U_k)$ als Bildpunkt der Pol der Geraden zugehört, welche die Bildpunkte von $U_i f$ und $U_k f$ verbindet, und zwar hinsichtlich eines Kegelschnittes mit der Gleichung in homogenen Coordinaten:

$$4\varphi\chi - \psi^2 = 0.$$

Alsdann ist der Bildpunkt von $(U_i U_j)$ der Pol der Geraden, welche die Bildpunkte von $U_i f$ und $U_j f$ verbindet. Die Verbindende der Bildpunkte von $(U_i U_k)$ und $(U_i U_j)$ ist demnach die Polare von $U_i f$, d. h. der Bildpunkt von $((U_i U_k)(U_i U_j))$ ist der von $U_i f$ selbst. (Fig. 32.) Mithin kann sich $((U_i U_k)(U_i U_j))$ nur um einen von x allein abhängigen Factor von $U_i f$ unterscheiden:

$$((U_i U_k)(U_i U_j)) \equiv \omega(x) U_i f.$$

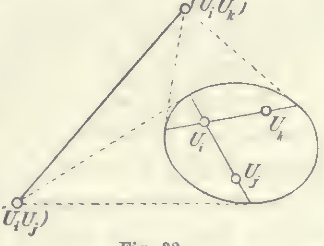


Fig. 32.

Oben fanden wir rechnerisch, dass $\omega(x)$ gleich $2\Delta_{ikj}$ ist.

Da alle durch Klammeroperation hervorgehenden infinitesimalen Transformationen nach dem Hauptsatze ebenfalls der Gruppe angehören, so gehört nach (5) auch $\Delta_{ikj} U_i f$ der Gruppe an. Indem wir sie anstatt $U_i f$ benutzen und die obige Betrachtung wiederholen, erhalten wir die infinitesimale Transformation der Gruppe:

$$((\Delta_{ikj} U_i,\ U_k)(\Delta_{ikj} U_i,\ U_j)) \equiv 2\Delta_{ikj}^3 U_i f$$

u. s. w. Demnach gehören

$$\Delta_{ikj} U_i f, \quad \Delta_{ikj}^3 U_i f, \quad \Delta_{ikj}^7 U_i f \ldots$$

sämtlich der Gruppe an. Da die Gruppe nur eine endliche Anzahl von einander unabhängiger infinitesimaler Transformationen besitzt, so folgt, dass Δ_{ikj} eine Constante sein muss — analog wie im Falle II die Grösse ω_1. Daraus ergiebt sich nun, dass die Gruppe gerade dreigliedrig ist. Denn wenn wenigstens vier infinitesimale Transformationen:

$$U_i f \equiv \varphi_i q + \psi_i y q + \chi_i y^2 q$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

vorliegen, so kommt:

$$\begin{vmatrix} U_1f & \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ U_2f & \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ U_3f & \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \\ U_4f & \varphi_4 & \psi_4 & \chi_4 \end{vmatrix} \equiv 0$$

oder

$$\Delta_{234} U_1 f + \Delta_{341} U_2 f + \Delta_{412} U_3 f + \Delta_{123} U_4 f \equiv 0.$$

Da aber die Δ Constanten sind, so würden $U_1 f \dots U_4 f$ hiernach nicht von einander unabhängig sein, wenn nicht jedes $\Delta \equiv 0$ wäre. Wäre aber jedes $\Delta_{ikj} \equiv 0$, so würde schon zwischen $U_i f$, $U_k f$, $U_j f$ eine Relation bestehen, deren Coefficienten Functionen von x sind. Dies aber würde zur Annahme des Falles II führen, ist also ausgeschlossen. Somit sind je vier infinitesimale Transformationen der Gruppe von einander abhängig; die Gruppe ist deshalb höchstens dreigliedrig. Wäre sie weniger-gliedrig, so würde Fall II oder gar Fall I vorliegen. Sie ist also gerade dreigliedrig.

Sicher besitzt sie zweigliedrige Untergruppen. Denn alle Transformationen der Gruppe, die einen bestimmten Punkt (x^0, y^0) der Ebene in Ruhe lassen, bilden offenbar für sich eine Gruppe, da die Aufeinanderfolge zweier solcher Transformationen auch den Punkt invariant lässt. Da aber x bei der gesuchten Gruppe überhaupt nicht transformiert wird, so giebt das Festhalten eines Punktes (x^0, y^0) nur eine Bedingung: Es giebt also wenigstens eine zweigliedrige Untergruppe unserer gesuchten Gruppe. In der That haben wir, um aus drei von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe

$$U_i f \equiv \varphi_i(x) q + \psi_i(x) y q + \chi_i(x) y^2 q$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

die infinitesimalen Transformationen dieser Untergruppe abzuleiten, nur in

$$c_1 U_1 f + c_2 U_2 f + c_3 U_3 f$$

die Constanten c_1, c_2, c_3 so zu wählen, dass

$$\sum_1^3 c_i(\varphi_i(x^0) + \psi_i(x^0) y^0 + \chi_i(x^0) y^{0\,2}) = 0$$

wird.

Es mögen also etwa gerade $U_1 f$ und $U_2 f$ diese zweigliedrige Untergruppe erzeugen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist. Dieselbe gehört einem der schon unter I oder II gefundenen Typen an. Wie werden sogleich ermitteln, welchem von beiden. Wäre schon eine Relation

$$\omega_1(x) U_1 f + \omega_2(x) U_2 f \equiv 0$$

zwischen $U_1 f$ und $U_2 f$ allein vorhanden, so wären alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \end{vmatrix}$$

identisch Null, sodass auch die dreireihige Determinante Δ_{123} identisch Null wäre, d. h. zwischen $U_1 f$, $U_2 f$ und $U_3 f$ bestände eine Relation mit von x abhängigen Coefficienten. Diese Annahme würde jedoch zum Fall II gehören und ist hier also unstatthaft. Daher besteht bei der Untergruppe $U_1 f$, $U_2 f$ keine Relation zwischen $U_1 f$ und $U_2 f$ mit von x abhängigen Coefficienten. Diese Untergruppe gehört demnach zu dem unter II bestimmten Typus und kann durch passende Wahl der Veränderlichen, bei der $U_3 f$ nicht wesentlich geändert wird, auf die dort bestimmte Form

$$U_1 f \equiv q, \quad U_2 f \equiv yq$$

gebracht werden. Jetzt ist noch

$$U_3 f \equiv \varphi(x) q + \psi(x) yq + \chi(x) y^2 q$$

zu normieren. Sicher ist hierin $\chi \not\equiv 0$, weil sonst zwischen $U_1 f, U_2 f, U_3 f$ eine Relation mit von x abhängigen Coefficienten vorhanden wäre. Nun ist

$$(U_1 U_3) \equiv (\psi + 2\chi y) q.$$

Da $U_3 f$ auch $y^2 q$ enthält, so kann diese infinitesimale Transformation $(\psi + 2\chi y) q$ nur aus $U_1 f$ und $U_2 f$ linear ableitbar sein, d. h. ψ und χ sind Constanten a und b. Nun kann statt

$$U_3 f \equiv \varphi q + ayq + by^2 q$$

auch

$$U_3 f - a U_2 f \equiv \varphi q + by^2 q \quad (b \neq 0)$$

als $U_3 f$ benutzt werden. Alsdann haben wir

$$(U_2 U_3) \equiv (-\varphi + by^2) q.$$

Dies muss linear aus $U_1 f$ und $U_3 f$ ableitbar sein, sodass

$$-\varphi + by^2 = \alpha + \beta(\varphi + by^2)$$

ist, wenn α und β Constanten bedeuten. Hiernach ist $\beta = 1$ und $\varphi =$ Const. Alsdann kann statt $U_3 f$ auch $U_3 f -$ Const. $U_1 f$ benutzt werden, sodass $U_3 f \equiv by^2 q$ oder also $U_3 f \equiv y^2 q$ verbleibt.

Die gesuchte Gruppe lautet also einfach:

$$\boxed{q \quad yq \quad y^2 q}.$$

Hiermit sind alle Typen von imprimitiven Gruppen bestimmt, bei denen die Curven der invarianten Schar einzeln invariant bleiben.

§ 3. Zweiter Fall: Die Curvenschar wird eingliedrig transformiert.

Jetzt liegt der Fall vor, dass in den infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe

$$U_i f \equiv \xi_i(x)p + \eta_i(x, y)q$$
$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

x gerade eingliedrig transformiert wird, also zwischen je zweien der ξ eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, sodass etwa

$$\xi_2 = a_2 \xi_1, \quad \ldots \xi_r = a_r \xi_1 \quad (a_2 \ldots a_r = \text{Const.})$$

ist, während ξ_1 nicht Null ist, denn sonst läge die Annahme des vorigen Paragraphen vor. Wir können anstatt $U_2 f \ldots U_r f$ nun auch $U_2 f - a_2 U_1 f, \ldots U_r f - a_r U_1 f$ als infinitesimale Transformationen benutzen, da sie der Gruppe angehören, weil $a_2 \ldots a_r$ Constanten sind. Alsdann kann noch $U_1 f$ durch Einführung einer passenden Function von x als neues x auf die Form gebracht werden, dass $\xi_1 \equiv 1$ ist, sodass wir haben:

$$\begin{aligned} U_1 f &\equiv p + \eta_1(x, y)q, \\ U_2 f &\equiv \quad\;\; \eta_2(x, y)q, \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ U_r f &\equiv \quad\;\; \eta_r(x, y)q. \end{aligned}$$

Hier ist offenbar $(U_i U_k)$ frei von p. Also sind diese $(U_i U_k)$ linear aus $U_2 f \ldots U_r f$ allein ableitbar, d. h. nach dem Hauptsatze erzeugen $U_2 f \ldots U_r f$ für sich eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe. Bei ihr wird jede Gerade $x = \text{Const.}$ in Ruhe gelassen. Diese Untergruppe gehört deshalb einem der im vorigen Paragraphen bestimmten drei Typen an, indem wir bemerken, dass bei Aufstellung dieser Typen keine neue Variabele x eingeführt wurde, wodurch die Form von $U_1 f$ eine Änderung erlitte. Deshalb dürfen wir direct $U_2 f \ldots U_r f$ als einen jener Typen wählen, zu denen dann noch $U_1 f \equiv p + \eta_1 q$ hinzutritt, sodass die drei Fälle vorliegen:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & q \quad \varphi_2(x)q \quad \varphi_3(x)q \quad \ldots \varphi_{r-1}(x)q \quad p + \eta(x, y)q, \\ \text{II.} & q \quad yq \quad \varphi_3(x)q \quad \ldots \varphi_{r-1}(x)q \quad p + \eta(x, y)q, \\ \text{III.} & q \quad yq \quad y^2 q \quad p + \eta(x, y)q. \end{array}$$

Der Fall, dass zu $p + \eta q$ keine infinitesimalen Transformationen hinzutreten, ist auszuschliessen, denn dann könnte die Gruppe auf die Form q gebracht werden, die zu den im vorigen Paragraphen bestimmten Typen gehört. Wir behandeln nun die Fälle I, II, III nach einander, indem wir die Klammerausdrücke prüfen.

I. Es ist

Erster Fall.

$$(\varphi_k(x)q,\ p + \eta q) \equiv \left(\varphi_k \frac{\partial \eta}{\partial y} - \varphi_k'\right) q.$$

Diese Transformation muss der Gruppe angehören. Da sie frei von p ist, muss sie also linear aus q, $\varphi_2 q \ldots \varphi_{r-1} q$ ableitbar sein. Also ist $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ frei von y, da $\varphi_1 \equiv 1$ zu setzen, also nicht Null ist. Wir haben also anzunehmen:

$$\eta = \psi(x) y + \chi(x).$$

Indem wir als neues y die Grösse

$$A(x) y + B(x)$$

einführen, können wir bei passender Wahl der Functionen A und B erreichen, dass $p + \eta q$ die Form p annimmt, während die $\varphi_k(x) q$ nicht wesentlich gestört werden, sodass die Gruppe lautet:

$$\varphi_1(x) q \quad \varphi_2(x) q \ \ldots \ \varphi_{r-1}(x) q \quad p.$$

Combinieren wir, so kommt:

$$(p,\ \varphi_k(x) q) \equiv \varphi_k' q.$$

Also müssen $\varphi_1' \ldots \varphi_{r-1}'$ nach dem Hauptsatze lineare homogene Functionen von $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ mit constanten Coefficienten sein:

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = a_{k1} \varphi_1 + \cdot + a_{k\,r-1} \varphi_{r-1}$$
$$(k = 1, 2 \cdots r).$$

Die Theorie dieser Differentialgleichungen, die ja ein d'Alembert'sches System bilden, lehrt bekanntlich, dass $\varphi_1 \ldots \varphi_{r-1}$ linear mit constanten Coefficienten aus gewissen $r - 1$ Functionen linear und homogen zusammensetzbar sind. Diese $r - 1$ Functionen haben die Form:

$$e^{\alpha_1 x}, \quad x e^{\alpha_1 x} \ldots x^{\varrho_1} e^{\alpha_1 x},$$
$$e^{\alpha_2 x}, \quad x e^{\alpha_2 x} \ldots x^{\varrho_2} e^{\alpha_2 x},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Da statt der $r - 1$ infinitesimalen Transformationen $\varphi_1 q \ldots \varphi_{r-1} q$ irgend welche $r - 1$ von einander unabhängige aus ihnen linear ableitbare gesetzt werden dürfen, so folgt, dass wir $\varphi_1 \ldots \varphi_{r-1}$ direct mit den obenstehenden Functionen identificieren dürfen. Sonach ergiebt sich die typische Form:

$$\boxed{\begin{array}{c} e^{\alpha_k x} q \quad x e^{\alpha_k x} q \ \cdots \ x^{\varrho_k} e^{\alpha_k x} q \quad p \\ {\scriptstyle k = 1, 2 \ldots m,} \\ \alpha_k = \text{Const.},\ \Sigma \varrho_k + m = r - 1,\ r > 1 \end{array}}.$$

Man überzeugt sich durch Bildung der Klammerausdrücke davon, dass diese infinitesimalen Transformationen stets eine Gruppe erzeugen, wie auch die Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ und die ganzen Zahlen $\varrho_1 \ldots \varrho_m$ und m gewählt werden.

Zweiter Fall.

II. Im zweiten Fall

$$q \quad yq \quad \varphi_3(x)q \ldots \varphi_{r-1}(x)q \quad p + \eta(x, y)q$$

giebt die Klammeroperation zunächst wieder:

$$(\varphi_k(x)q, p + \eta q) \equiv \left(\varphi_k \frac{\partial \eta}{\partial y} - \varphi_k'\right) q.$$

Da diese infinitesimale Transformation von p frei ist, muss sie linear aus q, yq und den $\varphi_i q$ ableitbar sein. Da q selbst auftritt, also sicher ein φ nicht Null ist, so folgt also, dass $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ linear in y ist, d. h.:

$$\eta \equiv \omega(x) y^2 + \psi(x) y + \chi(x).$$

Ferner kommt:

$$(yq, p + \eta q) \equiv \left(y \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right) q \equiv (\omega y^2 - \chi) q.$$

Da diese Transformation p nicht enthält, muss sie sich aus den $r - 1$ ersten infinitesimalen Transformationen der Gruppe linear ableiten lassen, d. h. es ist $\omega \equiv 0$, während χ die Form Σ Const. $\varphi_i +$ Const. hat, sodass wir in

$$p + \eta q \equiv p + (\psi(x) y + \chi(x)) q$$

das Glied $\chi(x)q$ streichen können, da es eine schon vorhandene infinitesimale Transformation ist. Also lautet die letzte Transformation:

$$p + \psi(x) yq.$$

Durch Einführung einer Function $A(x) \cdot y$ als neues y können wir sie auf die Form p bringen, indem die Gruppe die Form enthält:

$$\omega_1(x)q \ \ldots \ \omega_{r-2}(x)q \quad yq \quad p.$$

Lassen wir hierin yq fort, so bildet der Rest für sich eine Gruppe, da die übrigen unter sich combiniert nie Glieder mit yq liefern. Diese Untergruppe wurde unter I bestimmt. Danach kommt der Typus:

$$\boxed{\begin{gathered} e^{\alpha_k x} q \quad x e^{\alpha_k x} q \ \cdots \ x^{\varrho_k} e^{\alpha_k x} q \quad yq \quad p \\ k = 1, 2 \ldots m, \\ \alpha_k = \text{Const.}, \quad \Sigma \varrho_k + m = r - 2, \quad r > 2 \end{gathered}}.$$

Dies ist nach dem Hauptsatze stets eine Gruppe.

III. Wir kommen zu der Form:

$$q \quad yq \quad y^2q \quad p + \eta q$$

und finden durch Combination:

$$(q, p + \eta q) \equiv \frac{\partial \eta}{\partial y} q.$$

Mithin ist $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, da rechts p nicht auftritt, quadratisch in y und frei von x; wir dürfen also setzen:

$$\eta \equiv \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \psi(x),$$

indem wir unter α, β, γ Constanten verstehen. Da yq, y^2q besonders auftreten, darf sogar

$$\eta \equiv \alpha y^3 + \psi(x), \text{ d. h. } p + \eta q \equiv p + (\alpha y^3 + \psi) q$$

gewählt werden. Nun gehört der Gruppe an:

$$(yq, p + (\alpha y^3 + \psi) q) \equiv (2\alpha y^3 - \psi) q,$$

d. h. es ist $\alpha = 0$ und ψ eine Constante, die gleich Null gesetzt werden darf, weil q besonders auftritt. Somit kommt:

$$\boxed{q \quad yq \quad y^2q \quad p}\,.$$

Offenbar ist dies wirklich nach dem Hauptsatze eine Gruppe.

Wir bemerkten zwar oben, dass sich der Fall, dass nur $p + \eta q$ auftritt, auf die Annahme des vorigen Paragraphen zurückführen lässt. Dabei bedarf es jedoch der Einführung einer Function von x und y als neues x. Da wir nun im nächsten Paragraphen von den jetzigen Ergebnissen Gebrauch machen müssen und zwar von den Ergebnissen, die hervorgehen, wenn wir statt x höchstens eine Function von x selbst einführen, so müssen wir die Annahme $p + \eta(x, y) q$ gesondert aufstellen. Indem wir hierin eine passende, y wirklich enthaltende Function von x und y als neues y einführen, können wir diese eingliedrige Gruppe auf die Form bringen:

$$\boxed{p}\,.$$

§ 4. Dritter Fall: Die Curvenschar wird zweigliedrig transformiert.

Wir kommen nunmehr zur Annahme, dass die Geradenschar $x =$ Const. bei der gesuchten Gruppe zweigliedrig in sich transformiert wird. Die Gruppe hat zunächst wieder die Form

$$U_i f \equiv \xi_i(x) p + \eta_i(x, y) q$$
$$(i = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Es besteht aber jetzt zwischen je dreien der ξ_i eine lineare Relation mit constanten Coefficienten. Die verkürzte Gruppe $\xi_i(x)p$ $(i=1, 2 \, .. \, r)$, die jetzt also gerade zweigliedrig ist, lässt sich durch Einführung einer passenden Function von x als neues x nach Theorem 27, § 4 des 12. Kap., auf die Form p, xp bringen. Hieraus folgt, dass die gesuchte Gruppe durch Einführung dieses neuen x die Form annimmt:

$$U_i f \equiv (a_i x + b_i)p + \eta_i(x, y)q$$
$$(i = 1, 2 \, .. \, r),$$

in der die a_i und b_i Constanten bedeuten. Durch lineare Combination mit constanten Coefficienten erreichen wir nun, dass die Gruppe so erscheint:

$$\eta_1(x, y)q \quad .. \quad \eta_{r-2}(x, y)q \quad p + \eta_{r-1}(x, y)q \quad xp + \eta(x, y)q.$$

Die $r-1$ ersten infinitesimalen Transformationen geben bei der Klammeroperation mit einander nie Glieder mit xp. Diese Klammerausdrücke müssen sich also linear aus den $r-1$ ersten ableiten lassen, d. h. die $r-1$ ersten erzeugen eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe. Diese Untergruppe lässt sich, wie wir sahen, durch Einführung einer passenden, y wirklich enthaltenden Function von x, y als neues y, wodurch $xp + \eta q$ nicht wesentlich geändert wird, auf eine der im vorigen Paragraphen bestimmten vier typischen Formen bringen. Es handelt sich also darum, zu jenen drei Typen noch eine solche infinitesimale Transformation $xp + \eta(x, y)q$ hinzuzufügen, dass sich wieder Gruppen ergeben.

Erster Fall. I. Zunächst haben wir:

$$e^{\alpha_k x}q \quad xe^{\alpha_k x}q \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad x^{\varrho_k}e^{\alpha_k x}q \quad p \quad xp + \eta(x, y)q$$
$$k = 1, 2 \, .. \, m, \quad \Sigma\varrho_k + m = r - 2, \quad r > 2.$$

Es ist

$$(e^{\alpha_k x}q, \, xp + \eta q) \equiv \left(e^{\alpha_k x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \alpha_k x e^{\alpha_k x}\right)q.$$

Diese infinitesimale Transformation muss sich aus denen der Gruppe linear ableiten lassen, offenbar aus den $r-2$ ersten. Dies zeigt, dass $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ eine Function von x allein ist, sodass

$$\eta \equiv \psi(x)y + \chi(x)$$

zu setzen ist. Nun ist

$$(p, \, xp + \eta q) \equiv p + \frac{\partial \eta}{\partial x}q.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ nur x enthalten darf, da er sich linear

aus den $r-1$ ersten infinitesimalen Transformationen ableiten lassen muss. Somit ist ψ constant, etwa gleich a und $\eta \equiv ay + \chi(x)$.

Nunmehr bilden wir

$$(x^{\varrho_k} e^{\alpha_k x} q,\ xp + (ay + \chi)q) \equiv ((a - \varrho_k) x^{\varrho_k} e^{\alpha_k x} - \alpha_k x^{\varrho_k + 1} e^{\alpha_k x}) q.$$

$e^{\alpha_k x} q$ kommt in der Gruppe höchstens mit dem Factor x^{ϱ_k} vor. Hier aber tritt $\alpha_k x^{\varrho_k + 1}$ auf. Also ist $\alpha_k = 0$. Folglich reduciert sich die Gruppe, indem nun $m = k = 1$ sein muss, einfach auf:

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad . \quad . \quad x^{r-3} q \quad p \quad xp + (ay + \chi(x))q.$$

Combination der beiden letzten infinitesimalen Transformationen giebt $p + \chi' q$. Daher ist

$$\chi'(x) \equiv \text{Const.} + \text{Const.}\, x + \cdots + \text{Const.}\, x^{r-3},$$

d. h.

$$\chi(x) \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-3} x^{r-3} + b x^{r-2},$$

sodass, wenn man von der letzten infinitesimalen Transformation die in der Gruppe enthaltene:

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-3} x^{r-3}) q$$

abzieht, einfach als letzte bleibt:

$$xp + (ay + b x^{r-2}) q.$$

Führen wir $y + c x^{r-2}$ als neues y ein, so werden die $r-2$ ersten infinitesimalen Transformationen nicht geändert, während die vorletzte übergeht in

$$p + (r-2) c x^{r-3} q,$$

die wir durch p ersetzen können, da $x^{r-3} q$ schon auftritt. Die letzte ferner geht über in:

$$xp + ((r-2-a)c + b) x^{r-2} q + ayq.$$

Ist $r - 2 \neq a$, so lässt sich

$$c = \frac{-b}{r-2-a}$$

wählen, sodass sich $xp + ayq$ ergiebt und die Gruppe lautet:

$$\boxed{q \quad xq \quad x^2 q \cdot \cdot x^{r-3} q \quad p \quad xp + ayq}\,.$$

Wenn aber $r - 2 = a$ ist, so lautet die letzte infinitesimale Transformation vor Einführung jenes neuen y:

$$xp + ((r-2)y + b x^{r-2}) q.$$

Ist $b = 0$, so würden wir einen Specialfall der soeben bestimmten Form erhalten. Daher nehmen wir $b \neq 0$ an und führen $\frac{1}{b} y$ als neues y ein, sodass sich

$$xp + ((r-2)y + x^{r-2})q$$

ergiebt, während die übrigen infinitesimalen Transformationen nur um Zahlenfactoren geändert werden, die gestrichen werden dürfen. Somit gelangen wir zum Typus

$$\boxed{q \quad xq \quad x^2q \cdot\cdot x^{r-3}q \quad p \quad xp + ((r-2)y + x^{r-2})q \quad r > 2}.$$

Die beiden Typen stellen in der That Gruppen dar, wovon man sich durch Bilden der Klammerausdrücke überzeugen möge.

Zweiter Fall.

II. Wir haben nunmehr anzunehmen:

$$e^{\alpha_k x}q \quad xe^{\alpha_k x}q \quad \cdots \quad x^{\varrho_k}e^{\alpha_k x}q \quad yq \quad p \quad xp + \eta q$$
$$k = 1, 2 \ldots m, \quad \Sigma\varrho_k + m = r - 3, \quad r > 3.$$

Wir combinieren $e^{\alpha_k x}q$ mit $xp + \eta q$, wie im Falle I, und finden hierdurch im Gegensatz zu Fall I, dass $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ linear in y ist:

$$\eta \equiv \omega(x)y^2 + \psi(x)y + \chi(x).$$

Nun ist

$$(yq, xp + \eta q) \equiv \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right)q \equiv (\omega y^2 - \chi)q.$$

Da y^2q gar nicht in der Gruppe vorkommt, so muss also erstens $\omega \equiv 0$ sein, sodass bleibt:

$$\eta \equiv \psi(x)y + \chi(x),$$

und zweitens die Gruppe χq enthalten. χq muss sich daher linear aus den $r-3$ ersten infinitesimalen Transformationen ableiten lassen und kann in $xp + \eta q$ gestrichen werden, sodass die letzte infinitesimale Transformation lautet:

$$xp + \psi(x)yq.$$

Combination mit p liefert $p + \psi' yq$. Es ist demnach ψ' eine Constante, sodass wir als letzte infinitesimale Transformation haben:

$$xp + (ax + b)yq$$

oder, da yq besonders auftritt:

$$xp + axyq.$$

Die Klammeroperation mit $x^{\varrho_k}e^{\alpha_k x}q$ liefert:

$$((a - \alpha_k)x^{\varrho_k+1}e^{\alpha_k x} - \varrho_k x^{\varrho_k}e^{\alpha_k x})q.$$

Da aber in der Gruppe $e^{\alpha_k x}q$ höchstens mit dem Factor x^{ϱ_k} auftritt, linear muss $\alpha_k = a$ sein, sodass sich die Gruppe reduciert auf:

$$e^{ax}q \quad xe^{ax}q \cdots x^{r-4}e^{ax}q \quad yq \quad p \quad xp + axyq.$$

Indem wir nun ye^{-ax} als neues y benutzen, erhalten wir

$$q \quad xq \cdots x^{r-4}q \quad yq \quad p - ayq \quad xp.$$

Da yq besonders auftritt, so kann ohne weiteres $a = 0$ gesetzt werden. Dadurch geht die Gruppe hervor:

$$\boxed{q \quad xq \cdots x^{r-4}q \quad yq \quad p \quad xp \quad (r > 3)}.$$

III. Wir kommen zur Bestimmung einer Gruppe von der Form: Dritter Fall.

$$q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp + \eta q.$$

Es ist

$$(q, xp + \eta q) \equiv \frac{\partial \eta}{\partial y} q.$$

Daher ist $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ quadratisch in y und frei von x, denn $\frac{\partial \eta}{\partial y} q$ muss wieder der Gruppe angehören. Wir setzen daher, unter α, β, γ Constanten verstehend,

$$\eta \equiv \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \psi(x).$$

Weil die Gruppe schon yq, y^2q selbständig enthält, so können diese Glieder in

$$xp + (\alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \psi(x))q$$

gestrichen werden, sodass bleibt

$$xp + (\alpha y^3 + \psi)q.$$

Nun ist

$$(yq, xp + (\alpha y^3 + \psi)q) \equiv (2\alpha y^3 - \psi)q.$$

Also muss auch $2\alpha y^3 - \psi$ quadratisch in y und frei von x sein. Somit ist $\alpha = 0$ und ψ eine Constante, die, weil q selbständig auftritt, gleich Null gesetzt werden darf. Die Gruppe lautet nun:

$$\boxed{q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp}.$$

Man überzeuge sich davon, dass dies in der That eine Gruppe ist.

IV. Jetzt bleibt die Annahme übrig: Vierter Fall.

$$p \quad xp + \eta q.$$

Klammeroperation liefert $p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q$. Also ist $\frac{\partial \eta}{\partial x} \equiv 0$, daher η eine Function von y allein. Ist sie verschieden von Null, so kann sie

durch Einführung einer passenden Function von y als neues y gleich 1 gemacht werden, sodass sich die beiden Gruppen ergeben:

$$\boxed{p \quad xp} \qquad \boxed{p \quad xp + q}.$$

§ 5. Vierter Fall: Die Curvenschar wird dreigliedrig transformiert.

Wir nehmen nunmehr an, dass die Geraden $x = \text{Const.}$ bei der gesuchten Gruppe dreigliedrig unter einander transformiert werden. Die verkürzte Gruppe kann durch Einführung einer Function von x als neues x nach Theorem 27, § 4 des 12. Kap., auf die Form p, xp, x^2p gebracht werden. Eine Überlegung wie zu Beginn des vorigen Paragraphen lehrt, dass wir daher die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe vorerst so wählen können:

$$\eta_1(x, y)q \quad \cdots \quad \eta_{r-3}(x, y)q \quad p + \eta_{r-2}(x, y)q \quad xp + \eta_{r-1}(x, y)q$$
$$x^2p + \eta(x, y)q.$$

Die Klammerausdrücke der $r - 1$ ersten geben nie Glieder mit x^2p. Sie müssen also für sich eine $(r-1)$-gliedrige Untergruppe bilden, die in Form eines der in § 4 bestimmten Typen angenommen werden darf, da bei der Normierung dieser Typen nur für y eine neue Variabele eingeführt wird, wodurch $x^2p + \eta q$ nicht wesentlich geändert wird. Es liegt uns also jetzt ob, zu den in § 4 bestimmten sechs Typen eine solche infinitesimale Transformation $x^2p + \eta(x, y)q$ hinzuzufügen, dass sich wieder eine Gruppe ergiebt. Dabei dürfen wir uns jetzt sprachlich kürzer fassen, da es sich immer um Wiederholungen gleichartiger Überlegungen handelt.

Erster Fall. I. $\quad q \quad xq \quad x^2q \cdot\cdot x^{r-4}q \quad p \quad xp + ayq \quad x^2p + \eta q.$

Es kommt hier

$$(q, x^2p + \eta q) \equiv \frac{\partial \eta}{\partial y} q, \text{ daher } \eta \equiv (a_0 + a_1 x + \cdot\cdot + a_{r-4}x^{r-4})y + \psi(x).$$

$$(x^{r-4}q, x^2p + \eta q) \equiv \left(x^{r-4}\frac{\partial \eta}{\partial y} - (r-4)x^{r-3}\right)q \equiv$$
$$\equiv (a_0x^{r-4} + a_1x^{r-3} + \cdot\cdot + a_{r-4}x^{2r-8} - (r-4)x^{r-3})q,$$

d. h. $a_1 = r - 4, \ a_2 = 0, \ \cdots a_{r-4} = 0$. Die letzte infinitesimale Transformation lautet nun:

$$x^2p + (a_0y + (r-4)xy + \psi(x))q.$$

Combination mit p giebt:

$$2xp + ((r-4)y + \psi')q,$$

d. h. $r - 4 = 2a, \ \psi' \equiv b_0 + b_1x + \cdot\cdot + b_{r-4}x^{r-4}$, sodass

$$\psi \equiv b_0 x + \frac{b_1}{2} x^2 + \cdot \cdot + \frac{b_{r-4}}{r-4} x^{r-3} + b$$

wird. Da $q, xq \cdot \cdot x^{r-4}q$ selbständig auftreten, so darf sogar

$$\psi \equiv c x^{r-3}$$

gesetzt werden, sodass die beiden letzten infinitesimalen Transformationen diese sind:

$$xp + \frac{r-4}{2} yq, \quad x^2 p + (a_0 y + (r-4)xy + cx^{r-3})q.$$

Ihre Combination giebt:

$$x^2 p - \left((r-4)xy + \frac{r-2}{2} c x^{r-3}\right) q.$$

Dies muss gleich der letzten infinitesimalen Transformation sein. Daher ist:

$$a_0 = 0, \quad (r-4)c = 0.$$

Ist zunächst $c = 0$, so lautet der Typus, wenn die vorletzte Transformation noch mit 2 multipliciert wird:

$$\boxed{q \quad xq \quad x^2 q \cdot \cdot x^{r-4} q \quad p \quad 2xp + (r-4)yq \quad x^2 p + (r-4)xyq}_{\;r > 3}.$$

Wenn aber $c \neq 0$ und also $r = 4$ ist, so kommt:

$$q \quad p \quad xp \quad x^2 p + cxq.$$

Da $c \neq 0$ ist, können wir $e^{\frac{y}{c}}$ als neues y einführen. Alsdann kommt:

$$\boxed{yq \quad p \quad xp \quad x^2 p + xyq}.$$

Beide Typen stellen wirklich Gruppen dar.

Zweiter Fall.

II. Wir betrachten nun den Fall:

$$q \quad xq \quad \cdot \cdot \quad x^{r-4} q \quad p \quad xp + ((r-4)y + x^{r-3})q \quad x^2 p + \eta q.$$

Wie im vorigen Fall ergiebt sich zunächst, dass die letzte infinitesimale Transformation in der speciellen Form angenommen werden darf:

$$x^2 p + (ay + (r-4)xy + \psi(x))q.$$

Combination mit p giebt:

$$2xp + ((r-4)y + \psi')q.$$

Diese infinitesimale Transformation lässt sich aber unmöglich aus denen der Gruppe linear ableiten, da hier yq den Coefficienten $r-4$ hat, also

$$r - 4 = 2(r - 3)$$

sein müsste, was für $r > 2$ unmöglich ist. Hier ergiebt sich demnach keine Gruppe.

Dritter Fall.

III. $$q \quad xq \cdot\cdot x^{r-5}q \quad yq \quad p \quad xp \quad x^2p + \eta q.$$

Wir bilden:

$$(q,\ x^2p + \eta q) \equiv \frac{\partial \eta}{\partial y} q,$$

d. h.

$$\eta \equiv (a_0 + a_1 x + \cdot\cdot + a_{r-5}x^{r-5})y + ay^2 + \psi(x).$$

Ferner

$$(yq,\ x^2p + \eta q) \equiv \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right)q \equiv (ay^2 - \psi)q,$$

also $a = 0$, sodass $\psi(x)q$ selbständig auftritt und in $x^2p + \eta q$ gestrichen werden darf. Die letzte infinitesimale Transformation lautet folglich

$$x^2p + (a_0 + a_1 x + \cdot\cdot + a_{r-5}x^{r-5})yq.$$

Combination mit p liefert:

$$2xp + (a_1 + 2a_2 x + \cdot\cdot + (r-5)a_{r-5}x^{r-6})yq.$$

Daher ist $a_2 = 0, \cdot\cdot\, a_{r-5} = 0$. Die letzte Transformation ist also:

$$x^2p + (a_0 + a_1 x)yq.$$

Hierin kann $a_0 = 0$ gesetzt werden, da yq besonders auftritt. Somit bleibt:

$$x^2p + axyq.$$

Nun ist

$$(x^{r-5}q,\ x^2p + axyq) \equiv (a - r + 5)x^{r-4}q,$$

d. h. $a = r - 5$. Der Typus lautet also:

$$\boxed{q \quad xq \cdot\cdot x^{r-5}q \quad yq \quad p \quad xp \quad x^2p + (r-5)xyq \qquad r > 4}.$$

Man überzeuge sich davon, dass dies wirklich eine Gruppe ist.

Vierter Fall.

IV. $$q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp \quad x^2p + \eta q.$$

Hier ergiebt sich ohne Mühe $\eta \equiv 0$, sodass die Gruppe hervorgeht:

$$\boxed{q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp \quad x^2p}.$$

Fünfter Fall.

V. $$p \quad xp \quad x^2p + \eta q.$$

Auch hier ergiebt sich leicht $\eta \equiv 0$. Wir bekommen also die Gruppe

$$\boxed{p \quad xp \quad x^2p}.$$

Sechster Fall.

VI. $$p \quad xp + q \quad x^2p + \eta q.$$

Es ist hier:

$$(p,\, x^2p + \eta q) \equiv 2xp + \frac{\partial \eta}{\partial x} q,$$

also

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} \equiv 2, \quad \eta \equiv 2x + \psi(y),$$

ferner

$$(xp + q,\, x^2p + \eta q) \equiv x^2p + \left(x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) q \equiv x^2p + (2x + \psi')q,$$

sodass

$$2x + \psi' \equiv 2x + \psi,$$

also

$$\psi = ae^y$$

sein muss. Führen wir, wenn $a \neq 0$ ist, $x + ae^y$ als neues y ein, so kommt:

$$\boxed{p + q \quad xp + yq \quad x^2p + y^2q}.$$

Wenn dagegen $a = 0$ ist, so haben wir

$$p \quad xp + q \quad x^2p + 2xq.$$

Benutzen wir $e^{\frac{y}{2}}$ als neues y, so kommt die Form:

$$\boxed{p \quad 2xp + yq \quad x^2p + xyq},$$

in der die Gruppe projectiv erscheint. Auch die vorige Gruppe lässt sich durch Einführung neuer Variabeln auf eine projective Form bringen. Führt man nämlich

$$\frac{x + y}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad xy$$

als neue Veränderliche x und y ein, so kommt zunächst:

$$\sqrt{2}(p + xq) \quad xp + 2yq \quad \sqrt{2}(x^2 - y)p + \sqrt{2}xyq.$$

Der Factor $\sqrt{2}$ kann gestrichen werden. So ergiebt sich die bekannte dreigliedrige projective Gruppe, die den Kegelschnitt $x^2 - 2y = 0$ invariant lässt (vgl. § 4 des 4. Kap.):

$$p + xq \quad xp + 2yq \quad (x^2 - y)p + xyq.$$

Wir sind nun zu Ende mit der Bestimmung aller imprimitiven Gruppen der Ebene. Unter den gefundenen Typen kommen allerdings überzählige vor. Doch wollen wir, ehe wir auf diesen Punkt eingehen, das zweite Problem in Angriff nehmen, alle primitiven Gruppen der Ebene zu bestimmen.

Kapitel 14.

Bestimmung der primitiven Gruppen und Classification aller endlichen Gruppen der Ebene.

Um die primitiven endlichen Gruppen der Ebene zu bestimmen, schlagen wir einen wesentlich anderen Weg ein als zur Bestimmung der imprimitiven. Wir machen dabei Gebrauch von ähnlichen Reihenentwickelungen der infinitesimalen Transformationen wie in § 4 des 12. Kapitels bei den Gruppen der Geraden, und besonders benutzen wir die Transformationen, welche die Richtungen durch einen festgehaltenen Punkt bei der gesuchten Gruppe erfahren. Dadurch gelingt es, das Problem in drei einzelne zu teilen, deren Behandlung keine besonderen Schwierigkeiten macht. Die in § 3 des 12. Kapitels aufgestellte specielle Jacobi'sche Identität wird hierbei öfters verwertet.

Schliesslich stellen wir alle endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene mit paarweis inversen Transformationen in einer Tafel zusammen, indem wir sie in geeigneter Weise einteilen.

§ 1. Transformation der Linienelemente durch einen festgehaltenen Punkt.

Zunächst haben wir einige Betrachtungen anzustellen, die nicht nur für die primitiven, sondern auch für die imprimitiven Gruppen gültig sind. Wir ziehen es daher vor, bis auf weiteres überhaupt von einer beliebigen r-gliedrigen Gruppe $U_1f\,..\,U_rf$ der Ebene zu sprechen.

Festhalten eines Punktes bei einer Gruppe.

Eine r-gliedrige Gruppe der Ebene enthält eine Schar von Transformationen, die einen beliebig aber bestimmt gewählten Punkt (x^0, y^0) in Ruhe lassen. Natürlich bilden alle diese Transformationen für sich eine Gruppe, da auch die Aufeinanderfolge zweier dieser Transformationen den Punkt (x^0, y^0) in Ruhe lässt und daher einer Transformation eben dieser Schar äquivalent ist. Auch ist klar, dass diese Gruppe zu jeder ihrer Transformationen die inverse enthält.

Ist die r-gliedrige Gruppe transitiv, so lassen sich ihre Gleichungen nach Satz 1, § 1 des 8. Kap., nach zweien ihrer Parameter auflösen; wenn man in diesen aufgelösten Gleichungen die ursprünglichen und die neuen Veränderlichen gleich x^0, y^0 setzt, so erhält man also für jene zwei Parameter bestimmte von den übrigen $r-2$ Parametern abhängige Werte. In einer transitiven Gruppe lassen also gerade ∞^{r-2} Transformationen einen bestimmten Punkt allgemeiner Lage (x^0, y^0) in Ruhe.

Ist die r-gliedrige Gruppe intransitiv, so hat sie eine Invariante $\Omega(x, y)$ nach Satz 2, § 1 des 8. Kap., und ist nach nur einem der Parameter auflösbar. Daher lässt sie sich so schreiben:

$$\Omega(x_1, y_1) = \Omega(x, y), \quad a_1 = \Phi(x_1, y_1, x, y, a_2 \dots a_r),$$

wenn $a_1 \dots a_r$ ihre Parameter sind. Setzt man hierin $x = x_1 = x^0$, $y = y_1 = y^0$, so wird die erste Gleichung identisch erfüllt, während die zweite a_1 als Function der übrigen $r - 1$ Parameter bestimmt. In einer intransitiven Gruppe lassen also gerade ∞^{r-1} Transformationen einen bestimmten Punkt allgemeiner Lage (x^0, y^0) in Ruhe.

Satz 1: *In einer r-gliedrigen Gruppe der Ebene giebt es gerade ∞^{r-2} bez. ∞^{r-1} Transformationen, die einen bestimmt gewählten Punkt allgemeiner Lage in Ruhe lassen, je nachdem die Gruppe transitiv oder intransitiv ist. Diese Transformationen bilden für sich eine Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Durch die Bezeichnung des Punktes (x^0, y^0) als Punkt allgemeiner Lage werden gewisse singuläre Punkte ausgeschlossen, die bei mehr als diesen Transformationen invariant bleiben. Bei einer Gruppe kann es z. B. sehr wohl gewisse Punkte geben, die bei allen Transformationen der Gruppe in Ruhe bleiben. Solche Punkte sollen aber bei der Wahl des Punktes (x^0, y^0) ausgeschlossen werden.

Inf. Transf. der Gruppe, die einen Punkt invariant lässt.

Insbesondere kann man, ausgehend von den infinitesimalen Transformationen $U_1f \dots U_rf$ der r-gliedrigen Gruppe, die $(r-2)$-gliedrige bez. $(r-1)$-gliedrige continuierliche Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen construieren, bei der ein Punkt allgemeiner, aber bestimmter Lage (x^0, y^0) invariant ist. Man hat zu dem Zwecke, wenn

$$U_if \equiv \xi_i(x, y)p + \eta_i(x, y)q \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

ist, die Constanten $e_1 \dots e_r$ den beiden Bedingungen zu unterwerfen:

$$\sum_1^r e_i\xi_i(x^0, y^0) = 0, \qquad \sum_1^r e_i\eta_i(x^0, y^0) = 0.$$

Alsdann lassen alle infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i U_i f$ den Punkt (x^0, y^0) in Ruhe.

Unter ihnen sind gerade $r - 2$ von einander unabhängige, wenn keine der beiden Bedingungsgleichungen Folge der andern ist. Die eine ist nun Folge der andern, wenn — da (x^0, y^0) von allgemeiner Lage sein soll — alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \\ \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, d. h. wenn die Gruppe intransitiv ist, nach Satz 5, § 2 des 8. Kap.

Wir erhalten also $r-2$ bez. $r-1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen, je nachdem die Gruppe transitiv oder intransitiv ist.

Reihenentwickelung der inf. Transform.

Denken wir uns nun alle infinitesimalen Transformationen der r-gliedrigen Gruppe nach Potenzen von $x-x^0$ und $y-y^0$ entwickelt, was bei hinreichend wenig von x^0, y^0 abweichenden Werten von x, y geschehen darf, so haben sie zunächst allgemein die Form:

$$(a+b(x-x^0)+c(y-y^0)+d(x-x^0)^2+\cdots)p+$$
$$+(\alpha+\beta(x-x^0)+\gamma(y-y^0)+\delta(x-x^0)^2+\cdots)q.$$

Der Punkt (x^0, y^0) bleibt hierbei in Ruhe, wenn die Coefficienten von p und q für $x=x^0$, $y=y^0$ verschwinden, wenn also $a=\alpha=0$ ist. Er bleibt dagegen nicht in Ruhe, wenn wenigstens einer der Coefficienten a, α nicht Null ist. Nach dem Obigen wissen wir also, dass, sagen wir gerade ϱ, von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe die Form haben:

$$V_i f \equiv (b_i(x-x^0)+c_i(y-y^0)+\cdot\cdot)p+(\beta_i(x-x^0)+\gamma_i(y-y^0)+\cdot\cdot)q$$
$$(i=1,\ 2\,.\,.\,\varrho),$$

in der die Glieder höherer Ordnung in $x-x^0$ und $y-y^0$ nur angedeutet sind. Ausserdem enthält die Gruppe noch $r-\varrho$, also zwei oder eine, von diesen und von einander unabhängige infinitesimale Transformationen von der Form

$$(a+b(x-x^0)+c(y-y^0)+\cdot\cdot)p+(\alpha+\beta(x-x^0)+\gamma(y-y^0)+\cdot\cdot)q,$$

in denen a und α nicht beide Null sind.

Wir wollen künftig in einer infinitesimalen Transformation immer nur die wirklich vorkommenden Glieder niedrigster Ordnung wirklich angeben und die höherer Ordnung durch Punkte andeuten. Eine infinitesimale Transformation, in der der niedrigste Grad, den die Coefficienten von p und q in $x-x^0$, $y-y^0$ haben, gleich s ist, nennen wir eine *infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung.*

Inf. Transf. $s$ter Ord.

Alsdann können wir sagen: Die Gruppe enthält ϱ infinitesimale Transformationen erster oder höherer Ordnung. Dieselben erzeugen

in der That für sich eine Gruppe. Setzen wir nämlich

Gruppe der Transf., die einen Punkt invariant lassen.

$$\overline{V}_i f \equiv (b_i(x - x^0) + c_i(y - y^0))p + (\beta_i(x - x^0) + \gamma_i(y - y^0))q$$
$$(i = 1, 2 \,..\, \varrho),$$

so ist

$$V_i f \equiv \overline{V}_i f + \cdots,$$

wenn die Glieder von zweiter und höherer Ordnung nur angedeutet werden. Alsdann giebt die Klammeroperation:

$$(\overline{V}_i \overline{V}_k) \equiv (B_{ik}(x - x^0) + C_{ik}(y - y^0))p + (\mathsf{B}_{ik}(x - x^0) + \Gamma_{ik}(y - y^0)q),$$

wo

$$\begin{aligned} B_{ik} &= \beta_i c_k - \beta_k c_i, \\ C_{ik} &= \gamma_i c_k - \gamma_k c_i + c_i b_k - c_k b_i, \\ \mathsf{B}_{ik} &= b_i \beta_k - b_k \beta_i + \beta_i \gamma_k - \beta_k \gamma_i, \\ \Gamma_{ik} &= c_i \beta_k - c_k \beta_i \end{aligned}$$

ist. Offenbar drücken sich auch die Coefficienten der Glieder erster Ordnung in $(V_i V_k)$ allein durch die Coefficienten der Glieder erster Ordnung in $V_i f$ und $V_k f$ aus, d. h. es ist:

$$(V_i V_k) \equiv (\overline{V}_i \overline{V}_k) + \cdots$$

oder auch

$$(1) \qquad \begin{aligned} (V_i V_k) \equiv (B_{ik}(x - x^0) + C_{ik}(y - y^0) + \cdot\cdot)p + \\ + (\mathsf{B}_{ik}(x - x^0) + \Gamma_{ik}(y - y^0) + \cdot\cdot)q. \end{aligned}$$

Für $x = x^0$, $y = y^0$ sind nun die $(\overline{V}_i \overline{V}_k)$ Null, also auch die $(V_i V_k)$. Mithin lässt jeder Klammerausdruck $(V_i V_k)$ den Punkt (x^0, y^0) in Ruhe. Daher ist er, da er auch der r-gliedrigen Gruppe angehört, linear aus $V_1 f \ldots V_\varrho f$ allein ableitbar:

$$(2) \qquad (V_i V_k) = \sum_1^\varrho {}_s \gamma_{iks} V_s f$$
$$(i, k = 1, 2 \,..\, \varrho).$$

Nach dem Hauptsatze ergiebt sich hieraus:

Satz 2: *Alle infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe der Ebene, die einen Punkt allgemeiner Lage in Ruhe lassen, erzeugen eine Gruppe. Diese Gruppe ist $(r - 2)$-gliedrig oder $(r - 1)$-gliedrig, je nachdem die r-gliedrige Gruppe transitiv oder intransitiv ist.*

Erweitern wir nun die infinitesimalen Transformationen $V_1 f \ldots V_\varrho f$, indem wir die Transformationen von y' oder $\frac{dy}{dx}$ mitberücksichtigen. (Vgl. § 1 des 9. Kap.) Wir erhalten dadurch gewisse infinitesimale Trans-

Erweiterung der inf. Transform.

formationen $V_1'f \ldots V_\varrho'f$ in x, y, y', für die infolge von (1) die Relationen bestehen:

$$(3) \qquad (V_i' V_k') \equiv \sum_1^\varrho {}_s \gamma_{iks} V_s' f$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots r),$$

da $(V_i' V_k') \equiv (V_i V_k)'$ ist. (Siehe Formel (3) in § 1 des 9. Kap.) Bei $V_i f$ ist:

$$\delta x = \xi \delta t \equiv (b_i(x - x^0) + c_i(y - y^0) + \cdots) \delta t,$$
$$\delta y = \eta \delta t \equiv (\beta_i(x - x^0) + \gamma_i(y - y^0) + \cdots) \delta t,$$

also nach bekannter Formel

$$(4) \qquad \begin{cases} \delta y' = \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial y} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi_i}{\partial y} y'^2\right) \delta t \equiv \\ \equiv (\beta_i + (\gamma_i - b_i) y' - c_i y'^2 + \cdots) \delta t. \end{cases}$$

Die nicht geschriebenen Glieder enthalten $x - x^0$ und $y - y^0$ als Factoren. Man sieht, dass sich die Coefficienten der hingeschriebenen Glieder allein durch die Coefficienten der Glieder erster Ordnung in $V_i f$ oder also durch die Coefficienten in $\overline{V}_i f$ ausdrücken.

Wenn wir $(V_i V_k)$ um das Increment von y' erweitern, so erhalten wir hiernach und nach (1) das Increment:

$$\delta y' = (\mathsf{B}_{ik} + (\Gamma_{ik} - B_{ik}) y' - C_{ik} y'^2 + \cdots) \delta t.$$

Da ferner $(V_i V_k)' \equiv (V_i' V_k')$ ist, so folgt also:

$$(5) \qquad \begin{cases} (V_i' V_k') \equiv (B_{ik}(x - x^0) + C_{ik}(y - y^0) + \cdots) p + \\ \quad + (\mathsf{B}_{ik}(x - x^0) + \Gamma_{ik}(y - y^0) + \cdots) q + \\ \quad + (\mathsf{B}_{ik} + (\Gamma_{ik} - B_{ik}) y' - C_{ik} y'^2 + \cdots) \frac{\partial f}{\partial y'}. \end{cases}$$

Hierbei bedeuten die Punkte in den beiden ersten fetten Klammern Glieder zweiter und höherer Ordnung in $x - x^0$ und $y - y^0$, in der letzten Klammer Glieder erster und höherer Ordnung in diesen Grössen. Die von $x - x^0$ und $y - y^0$ freien Factoren von $\frac{\partial f}{\partial y'}$ haben hiernach in $(V_i' V_k')$ nur solche Coefficienten, die von den entsprechenden Coefficienten in $V_i' f$ und $V_k' f$ allein abhängen, da die B_{ik}, $\Gamma_{ik} - B_{ik}$, C_{ik} sich durch die β_i, $\gamma_i - b_i$, c_i, β_k, $\gamma_k - b_k$, c_k allein ausdrücken. Nach (3) und (5) kommt nun:

$$(6) \qquad \begin{cases} (\mathsf{B}_{ik} + (\Gamma_{ik} - B_{ik}) y' - C_{ik} y'^2 + \cdots) \frac{\partial f}{\partial y'} \equiv \\ \equiv \sum_1^\varrho {}_s \gamma_{iks} (\beta_s + (\gamma_s - b_s) y' - c_s y'^2 + \cdots) \frac{\partial f}{\partial y'}. \end{cases}$$

Transf. der Richtungen durch festgehaltene Punkte.

Wir wollen nunmehr nur die Transformationen der durch den Punkt (x^0, y^0) gehenden Richtungen y' betrachten. Zu dem Zweck haben wir in den $V_i'f$ überall $x = x^0$, $y = y^0$ zu setzen, sodass die Glieder, die $x - x^0$ und $y - y^0$ enthalten, sämtlich fortfallen. Dann erkennen wir, dass die Richtungen y' durch den festgehaltenen Punkt (x^0, y^0) vermöge der infinitesimalen Transformationen

$$W_i f \equiv (\beta_i + (\gamma_i - b_i)y' - c_i y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} \tag{7}$$
$$(i = 1, 2 \,.\,.\, \varrho)$$

und der aus ihnen linear ableitbaren unter einander vertauscht werden. Die Klammerausdrücke der Wf nehmen nach (5) die Form an:

$$(W_i W_k) \equiv (\mathsf{B}_{ik} + (\Gamma_{ik} - B_{ik})y' - C_{ik}y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'},$$

während nach (6) die rechte Seite hierin gleich

$$\sum_1^{\varrho} {}_s\, \gamma_{iks}(\beta_s + (\gamma_s - b_s)y' - c_s y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'}$$

ist, sodass nach (7) folgt:

$$(W_i W_k) = \sum_1^{\varrho} {}_s\, \gamma_{iks} W_s f$$
$$(i, k = 1, 2 \,.\,.\, r - 2).$$

Diese Relationen haben eine begriffliche Deutung: die Wf sind infinitesimale Transformationen der Veränderlichen y' allein. Ihre Klammerausdrücke sind nach der letzten Formel linear aus ihnen selbst ableitbar, die Wf erzeugen mithin nach dem Hauptsatz für Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit y' (Satz 13 in § 4 des 12. Kap.) eine Gruppe in y' und zwar, wie die Form (7) der Wf lehrt, eine projective Gruppe in y'. Wie in § 1 des 11. Kap. wollen wir unter einem *Linienelement* den Inbegriff eines Punktes und einer durch ihn gehenden Geraden oder, besser gesagt, einer durch ihn gehenden Richtung verstehen. Es werden die Linienelemente (x^0, y^0, y') durch den festgehaltenen Punkt (x^0, y^0) wieder in Linienelemente durch ihn übergeführt, sodass y' als Coordinate dieser ∞^1 Linienelemente dienen kann. Man beachte, dass die Form der $W_1 f \ldots W_\varrho f$ nur von den Gliedern *erster* Ordnung in $V_1 f \ldots V_\varrho f$ abhängt. Diese Glieder erster Ordnung nennen wir die *verkürzten* infinitesimalen Transformationen erster Ordnung:

$$\overline{V}_i f \equiv (b_i(x - x^0) + c_i(y - y^0))\,p + (\beta_i(x - x^0) + \gamma_i(y - y^0))q.$$

Auch bemerkt man, dass die Wf sich genau so combinieren wie die

$\overline{V}f$, und dass zwischen diesen $\overline{V}f$ und den Wf genau derselbe Zusammenhang besteht wie zwischen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe der Ebene und der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden. (Vgl. § 4 des 5. Kap.) Man erhält nämlich die Form der zugehörigen Wf auch dadurch, dass man nicht y', sondern

$$u \equiv \frac{y - y^0}{x - x^0}$$

als Veränderliche benutzt. Es kommt dann aus jedem $\overline{V}_i f$ eine infinitesimale Transformation

$$(\beta_i + (\gamma_i - b_i)u - c_i u^2)\frac{\partial f}{\partial u},$$

also eine von derselben Form wie $W_i f$.

Wir sagen:

Satz 3: *Alle diejenigen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe der Ebene, die einen Punkt (x^0, y^0) invariant lassen, transformieren die durch diesen Punkt gehenden Linienelemente (x^0, y^0, y') vermöge einer projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit y'.*

Ferner ist zu bemerken, dass die $W_1 f \dots W_\varrho f$ im allgemeinen nicht sämtlich von einander unabhängig sein werden, denn eine projective Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit ist ja höchstens dreigliedrig. Es sind nach Theorem 15, § 2 des 5. Kap., mithin diese Fälle denkbar:

Vier Fälle.

Erstens: Die Gruppe in y' ist die allgemeine dreigliedrige projective Gruppe. Dann bleibt kein Linienelement durch (x^0, y^0) mit diesem Punkte invariant. Die r-gliedrige Gruppe kann dann offenbar auch keine Curvenschar $\varphi(x^0, y^0) = \text{Const.}$ invariant lassen, denn sonst müsste ja, wenn der Punkt (x^0, y^0) festgehalten wird, auch die Curve

$$\varphi(x, y) = \varphi(x^0, y^0)$$

der Schar invariant bleiben, mithin auch das Linienelement, das ihre Tangente im Punkte (x^0, y^0) bestimmt. In diesem Falle ist also die r-gliedrige Gruppe sicher *primitiv*.

Zweitens: Die Gruppe in y' ist zweigliedrig. Alsdann ist ein Linienelement y' durch den Punkt (x^0, y^0) bei der Gruppe der Transformationen, die (x^0, y^0) in Ruhe lassen, ebenfalls invariant. Wir werden bald sehen, dass dann die r-gliedrige Gruppe eine und nur eine Schar von ∞^1 Curven $\varphi(x, y) = \text{Const.}$ in sich überführt, sobald die Gruppe transitiv ist.

Drittens: Die Gruppe in y' ist eingliedrig. Mit (x^0, y^0) bleiben dann ein oder zwei Linienelemente durch diesen Punkt fest. In diesem Falle lässt die r-gliedrige Gruppe, wie wir erkennen werden, gerade

eine bez. zwei Scharen $\varphi(x, y) = \text{Const.}$ invariant, sobald sie transitiv ist.

Viertens: Die Gruppe in y' ist nullgliedrig, d. h. alle Linienelemente durch den Punkt (x^0, y^0) bleiben mit ihm in Ruhe. In diesem Falle werden wir zeigen, dass die r-gliedrige Gruppe, wenn sie transitiv ist, unendlich viele Scharen $\varphi(x, y) = \text{Const.}$ invariant lässt.

Wir werden also nachweisen, dass die r-gliedrige Gruppe in den drei letzten Fällen *imprimitiv* ist, sobald sie *transitiv* ist. Intransitive Gruppen muss man ja überhaupt zu den imprimitiven rechnen (vgl. § 3 des 8. Kap.).

Invariante Verknüpfg. von Punkt u. Linienelement.

Der Beweis ist schnell geführt, da er sich nicht wesentlich von der Betrachtung unterscheidet, die in § 2 des 11. Kap. zum Satz 10 führte. Wo dort das Wort Gerade gebraucht wurde, ist hier nur das Wort Richtung zu benutzen. In jedem unserer drei letzten Fälle giebt es ja mindestens eine Richtung durch den Punkt p_0 oder (x^0, y^0), die in Ruhe bleibt, sobald p_0 festgehalten wird. Da die r-gliedrige Gruppe auch die Linienelemente unter einander transformiert — wie die Mitberücksichtigung der Transformationen von y' lehrt —, so sehen wir also: Es giebt in jenen Fällen mindestens eine Richtung g_0 durch den Punkt p^0, für die

$$(g_0)S_0 = (g_0)$$

ist, sobald S_0 eine solche Transformation der r-gliedrigen Gruppe ist, die p_0 in Ruhe lässt:

$$(p_0)S_0 = (p_0).$$

Dies gilt entsprechend, wenn der Punkt p_0 vermöge einer Transformation T der Gruppe in einen Punkt p übergeführt wird:

$$(p_0)T = (p),$$

für die Richtung g durch p, für welche

$$(g_0)T = (g)$$

ist, und man sieht ein, dass alle T, die p_0 nach p führen, auch g_0 in g überführen. Der Beweis ist genau so wie früher an der angegebenen Stelle. Der Inbegriff von p und g ist ein Linienelement l, und wir finden somit den Satz:

Satz 4: *Bleibt bei allen den Transformationen einer Gruppe, die einen bestimmten Punkt p allgemeiner Lage in Ruhe lassen, ein Linienelement l durch diesen Punkt in Ruhe, so ist mit allen Punkten p', in die p bei der Gruppe übergehen kann, ein Linienelement l' invariant verknüpft, d. h. jede Transformation der Gruppe, die p in p' überführt, bringt l nach l'; jede, die p' in Ruhe lässt, lässt auch l' in Ruhe.*

Annahme einer trans. Gruppe.

Ist nun die Gruppe transitiv, so kann p in alle Punkte p' übergeführt werden — wenigstens innerhalb eines gewissen Bereiches. Wir erhalten dann in allen diesen Punkten p' je ein Linienelement l', und offenbar führt jede Transformation der Gruppe die Schar dieser ∞^1 Linienelemente in sich über. Denn ist

$$(p')T_c = (p'')$$

und

$$(p)T_d = (p''),\ (l)T_d = (l''),$$

wenn l'' das mit p'' invariant verknüpfte Linienelement bedeutet, so ist wegen $(p') = (p)T_a$ auch:

$$(p)T_aT_c = (p'')$$

und also nach Satz 4, da T_aT_c einer Transformation der Gruppe äquivalent ist:

$$(l)T_aT_c = (l''),$$

d. h., da $(l)T_a = (l')$ ist:

$$(l')T_c = (l'').$$

Invariante Differentialgleichung 1. Ordnung.

Diese invariante Schar von Linienelementen wird dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$y' = \omega(x, y),$$

die jedesmal das zu einem Punkte (x, y) gehörige Linienelement (x, y, y') giebt. Es ist dies aber eine Differentialgleichung erster Ordnung mit ∞^1 Integralcurven. Mithin lässt die Gruppe die Schar dieser ∞^1 Integralcurven, die von jenen ∞^1 Linienelementen eingehüllt werden, invariant.

Anzahl inv. Scharen v. ∞^1 Curven.

Sind mit p mehrere Linienelemente invariant verknüpft, so führt jedes zu einer invarianten Schar von ∞^1 Linienelementen, indem man auf jedes alle Transformationen der Gruppe ausübt. Demnach lässt die Gruppe in dem dritten der obigen Fälle gerade eine bez. zwei und im vierten sogar unendlich viele Scharen von ∞^1 Curven in Ruhe. Im zweiten Falle dagegen existiert nur eine Schar. Denn es ist einleuchtend, dass umgekehrt jede invariante Schar von ∞^1 Curven mit jedem Punkte ein Linienelement invariant verknüpft.

Mithin ist die r-gliedrige Gruppe im zweiten, dritten und vierten Falle *imprimitiv*. Daher folgt:

Satz 5: *Bei allen denjenigen Transformationen einer primitiven r-gliedrigen Gruppe der Ebene, welche einen Punkt (x^0, y^0) allgemeiner Lage invariant lassen, werden die durch diesen Punkt gehenden Linienelemente (x^0, y^0, y') vermöge der allgemeinen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit y' transformiert. Ist dagegen die r-gliedrige*

Gruppe imprimitiv, so ist diese projective Gruppe in y' höchstens zweigliedrig.

Oder kürzer:

Satz 6: *Eine Gruppe der Ebene ist dann und nur dann primitiv, wenn sie die Linienelemente durch einen festgehaltenen Punkt allgemeiner Lage gerade dreigliedrig transformiert.*

Und ausserdem:

Satz 7: *Es giebt gerade so viele Scharen von ∞^1 Curven $\varphi(x, y) = Const.$, die bei einer transitiven Gruppe invariant bleiben, als es bei der Gruppe mit einem Punkte allgemeiner Lage invariant verbundene Linienelemente giebt.*

§ 2. Ansatz zur Bestimmung der primitiven Gruppen der Ebene.

Wir werden die Ergebnisse des vorigen Paragraphen zur Bestimmung aller endlichen primitiven Gruppen der Ebene verwerten.

Ist die r-gliedrige Gruppe, von der im vorigen Paragraphen die Rede war, primitiv, so ist sie auch transitiv, und daher ist die damals vorgekommene Zahl $\varrho = r - 2$. Die Gruppe enthält also gerade $r - 2$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen erster oder höherer Ordnung, sowie zwei von nullter Ordnung. Aus den beiden letzteren kann man durch lineare Vereinigung immer zwei von der besonderen Form ableiten:

$$U_1 f \equiv p + \cdots, \quad U_2 f \equiv q + \cdots,$$

während also $U_3 f \ldots U_r f$ von erster oder höherer Ordnung in $x - x^0$ und $y - y^0$ angenommen werden können. Wie oben, werden wir nur die Glieder niedrigster Ordnung jedesmal hinschreiben.

Nun gilt der folgende Satz, von dem wir schon in § 4 des 12. Kapitels einen Specialfall kennen lernten:

Satz 8: *Der Klammerausdruck aus einer infinitesimalen Transformation μ^{ter} und einer ν^{ter} Ordnung ist von der Ordnung $\mu + \nu - 1$ oder von höherer Ordnung.* Klammerausdruck inf. Transf. von gegeb. Ordnung.

Ist nämlich Uf von μ^{ter}, Vf von ν^{ter} Ordnung, so ist in

$$(UV) \equiv U(Vf) - V(Uf)$$

das erste Glied $U(Vf)$ von der Ordnung $\mu + (\nu - 1)$, da die Ordnung von Vf durch die in $U(Vf)$ vorkommende Differentiation um Eins erniedrigt wird. Entsprechend ist $V(Uf)$ von der Ordnung $\nu + (\mu - 1)$. (UV) hat demnach auch die Ordnung $\mu + \nu - 1$ oder — wenn die Glieder dieser Ordnung sich gerade fortheben — eine höhere Ordnung.

Wenn insbesondere die infinitesimalen Transformationen nullter Ordnung

$$p + \cdots, \quad q + \cdots$$

mit einer von μ^{ter} Ordnung Uf combiniert werden, so ist nach unserem Satze die Ordnung des Klammerausdruckes mindestens $\mu - 1$. Insbesondere ist $(p + \cdot\cdot, Uf)$ von höherer als $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung nur dann, wenn in Uf die Glieder μ^{ter} Ordnung von x frei sind. Alsdann enthalten sie aber sicher y, sobald nur $\mu > 0$ ist. Mithin ist in diesem Falle $(q + \cdot\cdot, Uf)$ von gerade $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Satz 9: *Ist Uf eine infinitesimale Transformation μ^{ter} Ordnung und ist $\mu > 0$, so ist wenigstens eine der beiden infinitesimalen Transformationen*

$$(p + \cdot\cdot, Uf) \quad \textit{und} \quad (q + \cdot\cdot, Uf)$$

von gerade $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Nehmen wir an, unsere r-gliedrige primitive Gruppe enthalte eine infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung, in der $s > 0$ sei, so folgt, da die Gruppe $p + \cdot\cdot$ und $q + \cdot\cdot$ enthält, dass sie nach diesem Satze auch eine von gerade $(s - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung enthält. Ist $s - 1 > 0$, so enthält sie ferner auch eine von gerade $(s - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung u. s. w. Sie enthält also ausser den beiden von nullter Ordnung sicher eine von erster, eine von zweiter, ... eine von s^{ter} Ordnung. Diese $s + 1$ infinitesimalen Transformationen sind offenbar von einander unabhängig. Da die Gruppe nur r von einander unabhängige enthält, so ist

Maximal-ordnung.

$$s + 1 \leqq r,$$

also s an eine endliche obere Grenze gebunden. Wir werden nachher sehen, dass s sogar höchstens gleich 2 sein kann.

Anordnung der inf. Trf. einer prim. Gruppe.

Wir ordnen nun die infinitesimalen Transformationen der Gruppe in eine Reihe nach ihren Ordnungszahlen: Zunächst haben wir zwei von nullter Ordnung $p + \cdot\cdot$ und $q + \cdot\cdot$. Aus den $r - 2$ übrigen von erster oder höherer Ordnung und den aus ihnen linear ableitbaren wählen wir so viele wie möglich von einander unabhängige von erster Ordnung aus, derart dass sich aus ihnen keine von höherer Ordnung linear ableiten lassen. So ergeben sich gewisse r_1 infinitesimale Transformationen erster Ordnung. Die übrigen $r - r_1 - 2$ infinitesimalen Transformationen lassen sich dann durch passende additive Hinzufügung jener von erster Ordnung mit constanten Coefficienten sämtlich als solche von zweiter oder höherer Ordnung darstellen. Wäre dies nicht möglich, so hätten wir eben nicht alle jene obigen von

erster Ordnung schon abgesondert. Aus diesen $r - r_1 - 2$ Transformationen und den aus ihnen linear ableitbaren, die ja auch von zweiter oder höherer Ordnung sind, wählen wir so viele wie möglich von einander unabhängige von zweiter Ordnung aus, der Art, dass sich aus ihnen keine von höherer als zweiter Ordnung linear ableiten lässt, u. s. w. Dieser Process muss einmal ein Ende haben bei gewissen Transformationen s^{ter} Ordnung, da s an eine endliche obere Grenze gebunden ist.

Bei dieser Anordnung erhalten wir sicher gerade r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe. Aus den $r - 2$ letzten unter ihnen sind alle diejenigen linear ableitbar, die den Punkt (x^0, y^0) in Ruhe lassen und eine $(r-2)$-gliedrige Untergruppe erzeugen.

Nach Satz 5 des vorigen Paragraphen müssen die Transformationen dieser $(r-2)$-gliedrigen Untergruppe die Linienelemente durch den Punkt (x^0, y^0) gerade dreigliedrig transformieren. Nach den im Anschluss an Satz 3 im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkungen kommen ferner hierbei nur die infinitesimalen Transformationen *erster* Ordnung, insbesondere von diesen nur die Glieder erster Ordnung in Betracht, die wir als die *verkürzten* infinitesimalen Transformationen erster Ordnung bezeichneten.

Nun können wir voraussetzen, dass der Anfangspunkt ein Punkt allgemeiner Lage für die gesuchte primitive Gruppe ist. Denn wäre er das nicht, so könnten wir durch Einführung neuer Veränderlicher irgend einen anderen Punkt in den Anfangspunkt verlegen. Dabei würde die Gruppe nach Satz 5 in § 4 des 6. Kap. wieder in eine Gruppe übergeführt.

Demnach dürfen wir $x^0 = y^0 = 0$ annehmen. Alsdann müssen also die verkürzten infinitesimalen Transformationen erster Ordnung die Linienelemente durch den Anfangspunkt, folglich auch — da die verkürzten Transformationen projectiv, insbesondere linear und homogen sind — die Strahlen durch den Anfangspunkt gerade dreigliedrig transformieren. Dies geschieht aber nach § 4 des 5. Kap. nur bei der allgemeinen und bei der speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y. Somit liegen zwei Möglichkeiten vor: Die infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung der gesuchten Gruppe haben entweder die Form:

Verkürzte Gruppe.

$$\text{I.}\quad p + \cdots,\quad q + \cdots,\quad xq + \cdots,\quad xp - yq + \cdots,\quad yp + \cdots$$

Zwei Möglichkeiten

oder die Form:

$$\text{II.}\quad p + \cdots, q + \cdots, xq + \cdots, xp - yq + \cdots, yp + \cdots, xp + yq + \cdots.$$

Hinzu treten noch Transformationen höherer Ordnung. Die Ordnung ist, wie wir sahen, an eine endliche obere Grenze gebunden. Wir werden jetzt sehen, dass höchstens Transformationen *zweiter* Ordnung vorkommen.

Es sei nämlich

$$\xi_s p + \eta_s q + \cdots$$

eine in der Gruppe enthaltene infinitesimale Transformation von der Maximalordnung s; es sollen also auch ξ_s und η_s gewisse homogene ganze Functionen s^{ten} Grades von x, y sein, die nicht beide verschwinden. Sei also, da bisher x und y gleichberechtigt aufgetreten sind, etwa $\xi_s \not\equiv 0$. Die höchste in ξ_s auftretende Potenz von y sei die k^{te} $(k \leqq s)$. Combinieren wir $\xi_s p + \eta_s q + \cdots$ mit $xq + \cdots$, die ja in der Gruppe in beiden Fällen vorkommt, durch Klammeroperation, so erhalten wir eine Transformation der Gruppe von mindestens $(s + 1 - 1)^{\text{ter}}$, also s^{ter} Ordnung, nach Satz 8. Da s die Maximalordnung ist, so ist der Klammerausdruck *gerade* von s^{ter} Ordnung oder aber Null. Es kommt:

$$x\frac{\partial \xi_s}{\partial y}p + \left(x\frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \xi_s\right)q + \cdots$$

$\frac{\partial \xi_s}{\partial y}$ ist in y von $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn y überhaupt in ξ_s auftritt, also $k \neq 0$ ist. Die Gruppe enthält also hiernach eine Transformation s^{ter} Ordnung, in der y in Coefficienten s^{ter} Ordnung von p nur in $(k-1)^{\text{ter}}$ Potenz auftritt. Denselben Schluss können wir wiederholen. Dadurch finden wir endlich, dass die Gruppe auch eine gewisse infinitesimale Transformation s^{ter} Ordnung

$$\xi_s p + \eta_s q + \cdots$$

enthält, in der $\xi_s \not\equiv 0$ und *frei von* y ist. Sie muss daher in der Form angenommen werden:

$$x^s p + \eta_s q + \cdots.$$

Klammeroperation mit $p + \cdots$, die ja in beiden Fällen zur Gruppe gehört, giebt eine Transformation von $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$s x^{s-1} p + \eta_{s-1} q + \cdots,$$

deren Combination mit $x^s p + \eta_s q + \cdots$ nach Satz 8 eine von mindestens $(s + s - 1 - 1)^{\text{ter}}$, also $(2s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liefert, nämlich diese:

$$-s x^{2s-2} p + \eta_{2s-2} q + \cdots,$$

die nicht identisch verschwindet. Nun aber ist s die Maximalordnung in der Gruppe, daher:

$$2s - 2 \leqq s,$$

also

$$s \leqq 2.$$

Maximal-ordnung $s \leqq 2$.

Satz 10: *Eine primitive Gruppe der Ebene enthält bei passender Wahl der Veränderlichen nur infinitesimale Transformationen nullter, erster und höchstens zweiter Ordnung.*

Inf. Transf. 2. Ordnung.

Enthält die Gruppe wirklich solche von zweiter Ordnung, so dürfen wir eine von diesen nach dem obigen in der Form annehmen:

$$V_1 f \equiv x^2 p + (ax^2 + bxy + cy^2)q + \cdots.$$

Ihre Combination mit $xp - yq + \cdots$, die in beiden Fällen I und II in der Gruppe vorkommt, liefert

$$V_2 f \equiv x^2 p + (3ax^2 + bxy - cy^2)q + \cdots.$$

Folglich enthält die Gruppe auch die aus $V_1 f$ und $V_2 f$ linear ableitbare:

$$V_3 f \equiv \frac{1}{2}(V_1 f - V_2 f) \equiv (-ax^2 + cy^2)q + \cdots,$$

die mit $xp - yq + \cdots$ combiniert liefert:

$$V_4 f \equiv (-3ax^2 - cy^2)q + \cdots,$$

sodass die Gruppe auch die aus $V_3 f$ und $V_4 f$ linear ableitbaren enthält:

$$ax^2 q + \cdots, \quad cy^2 q + \cdots,$$

also auch die aus diesen und $V_1 f$ linear ableitbare:

$$V_5 f \equiv x^2 p + bxyq + \cdots.$$

Bilden wir ihren Klammerausdruck mit der in der Gruppe enthaltenen $yp + \cdots$, so kommt:

$$V_6 f \equiv (2 - b)xyp + by^2 q + \cdots,$$

und, wenn diese mit $V_5 f$ combiniert wird:

$$(1 - b)(2 - b)x^2 yp + b(1 - b)xy^2 q + \cdots.$$

Diese infinitesimale Transformation ist von dritter Ordnung. Weil die Gruppe nach Satz 10 keine von dritter Ordnung enthält, so ist folglich:

$$(1 - b)(2 - b) = 0, \quad b(1 - b) = 0,$$

daher $b = 1$.

Jetzt ist

$$V_5 f \equiv x^2 p + xyq + \cdots.$$

Dann wird auch:

$$V_6 f \equiv xyp + y^2 q + \cdots.$$

Combination von $V_5 f$ mit $p + \cdots$, die der Gruppe auch zugehört, liefert

$$2xp + yq + \cdots.$$

Da die Gruppe in beiden Fällen $xp - yq + \cdots$ enthält, so enthält sie folglich auch die aus den beiden letzten linear ableitbare

$$xp + yq + \cdots,$$

d. h. es liegt gerade der Fall II vor.

Wir haben also gefunden:

Nur im Falle II können noch infinitesimale Transformationen zweiter Ordnung auftreten, nämlich die beiden:

$$V_5 f \equiv x^2 p + xyq + \cdots, \quad V_6 f \equiv xyp + y^2 q + \cdots.$$

Wir können nun einsehen, dass in diesem Falle weiter keine infinitesimalen Transformationen zweiter Ordnung vorkommen. Denn käme:

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)p + (Dx^2 + Exy + Fy^2)q + \cdots$$

vor, so könnten wir aus ihr, aus $V_5 f$ und $V_6 f$ linear ableiten:

$$Cy^2 p + (Dx^2 + Exy + Fy^2)q + \cdots,$$

sie also durch diese ersetzen. Ihre Combination mit $V_5 f$ und $V_6 f$ muss nach Satz 8 und 10 Null ergeben. Bildet man diese Klammerausdrücke, so findet man, dass C, D, E, F Null sind, wie der Leser selbst ausrechnen möge.

Drei Fälle.

Nach allem Diesen haben wir nunmehr *drei* Fälle zu unterscheiden. Die Gruppe enthält entweder:

A) $p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad xq + \cdots, \quad xp - yq + \cdots, \quad yp + \cdots$

und keine weiteren, oder aber:

B) $p + \cdots, \; q + \cdots, \; xq + \cdots, \; xp - yq + \cdots, \; yp + \cdots, \; xp + yq + \cdots$

und keine weiteren, oder endlich:

C) $p + \cdots, \quad q + \cdots, \quad xq + \cdots, \quad xp - yq + \cdots, \quad yp + \cdots,$
$xp + yq + \cdots, \quad x^2 p + xyq + \cdots, \quad xyp + y^2 q + \cdots$

und keine weiteren von diesen unabhängigen infinitesimalen Transformationen, sie ist also 5-, 6- oder 8-gliedrig.

Wenn wir die durch Punkte angedeuteten Glieder überall fortlassen, so liegen offenbar drei uns schon bekannte Gruppen vor. Es giebt folglich in der That in jedem der drei Fälle wenigstens eine primitive Gruppe. Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen, dass

sich alle primitiven Gruppen durch Einführung zweckmässiger Variabeln gerade auf die so erhaltenen Gruppen zurückführen lassen.

Zunächst aber hat sich ergeben:

Satz 11: *Es giebt in der Ebene nur 5-, 6- und 8-gliedrige primitive Gruppen.*

§ 3. Bestimmung der primitiven Gruppen.

Ehe wir an die Erledigung der drei Fälle A, B, C gehen, schicken wir einen Satz voraus, der dabei gebraucht werden wird:

Hülfssatz.

Satz 12: *Stehen zwei infinitesimale Transformationen $U_1 f$ und $U_2 f$ der Ebene mit verschiedenen Fortschreitungsrichtungen in der Beziehung*

$$(U_1 U_2) \equiv 0,$$

so lässt sich die Gruppe $U_1 f$, $U_2 f$ durch Einführung passender Variabeln auf die Form

$$p, \quad q$$

bringen).*

Zunächst nämlich lassen sich bekanntlich solche Veränderliche einführen, dass

$$U_1 f \equiv p$$

wird. Ist dann

$$U_2 f \equiv \xi p + \eta q,$$

so soll also sein:

$$(U_1 U_2) \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x} p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q \equiv 0,$$

sodass ξ und η von x frei sind. Auch ist $\eta \not\equiv 0$, da sonst $U_1 f$ und $U_2 f$ dieselbe Fortschreitungsrichtung hätten. Wir können folglich $\int \frac{dy}{\eta}$ als neues y einführen. Dann wird

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv \omega(y) p + q.$$

Wenn wir schliesslich $x - \int \omega dy$ als neues x benutzen, so kommt, wie gewünscht:

$$U_1 f \equiv p, \quad U_2 f \equiv q.$$

Eine zweite Vorbemerkung ist diese: Eine infinitesimale Transformation ϱ^{ter} Ordnung bleibt von ϱ^{ter} Ordnung, wenn man additiv mit constanten Coefficienten solche von höherer Ordnung hinzufügt. Wir werden dies öfters in der Folge thun: Zu den infinitesimalen Transformationen der Gruppe fügen wir öfters additiv mit constanten Coeffi-

*) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.", § 2 des 18. Kap.

cienten infinitesimale Transformationen der Gruppe von höherer Ordnung hinzu, wodurch ja wieder Transformationen hervorgehen, die der Gruppe angehören.

Symbolische Bezeichnungsweise.

Endlich wollen wir noch, um die Betrachtungen übersichtlicher zu gestalten, eine eigenartige Bezeichnung der infinitesimalen Transformationen, von denen uns nur die Glieder niedrigster Ordnung bekannt sind, einführen. Z. B. im Falle A des vorigen Paragraphen enthält die gesuchte Gruppe gerade fünf infinitesimale Transformationen:

$$p + \cdot\cdot, \quad q + \cdot\cdot, \quad xq + \cdot\cdot, \quad xp - yq + \cdot\cdot, \quad yp + \cdot\cdot.$$

Hierin sind die nicht geschriebenen und durch Punkte angedeuteten Glieder als ganz bestimmte, uns freilich noch unbekannte Potenzreihen zu denken. Wollten wir diese infinitesimalen Transformationen etwa mit $U_1 f \,..\, U_5 f$ bezeichnen, so würde jede $(U_i U_k)$ mit einem ganz bestimmten Gliede niederster Ordnung beginnen. Um dieses zu kennen, müssten wir auf die obige Bedeutung der U_i und U_k zurückschauen, nämlich auf ihre Anfangsglieder. Übersichtlicher ist es daher, die fünf infinitesimalen Transformationen der Gruppe in dieser Weise symbolisch zu bezeichnen:

$$P, \quad Q, \quad XQ, \quad XP - YQ, \quad YP.$$

Wie gesagt sind diese Bezeichnungen rein symbolisch zu verstehen. Sie haben den Vorteil, dass man aus ihnen sofort die Anfangsglieder der Klammerausdrücke ablesen kann, indem man X, Y, P, Q für den Augenblick als x, y, p, q auffasst und die Klammern berechnet. So giebt die dritte und vierte combiniert:

$$(XQ,\ XP - YQ) \equiv -2xq + \cdots$$

oder also, da der Klammerausdruck der Gruppe angehört, es aber in der Gruppe nur eine ganz bestimmte mit xq beginnende infinitesimale Transformation giebt, nämlich die mit XQ bezeichnete:

$$(XQ,\ XP - YQ) \equiv -2XQ.$$

Combinieren wir P mit $XP - YQ$, so kommt:

$$(P,\ XP - YQ) \equiv p + \cdots.$$

Jede infinitesimale Transformation der Gruppe aber, die mit p beginnt, hat offenbar die Form:

$$P + \text{Const.}\, XQ + \text{Const.}\, (XP - YQ) + \text{Const.}\, YP.$$

Es ergiebt sich also, da $(P,\ XP - YQ)$ der Gruppe angehören muss:

$$(P,\ XP - YQ) \equiv P + \text{Const.}\, XQ + \text{Const.}\, (XP - YQ) + \text{Const.}\, YP.$$

Die Klammerausdrücke vereinfachen sich oft dadurch, dass man passende lineare Combinationen der infinitesimalen Transformationen als neue infinitesimale Transformationen benutzt, sowie dadurch, dass vermöge der zwischen den Klammerausdrücken bestehenden Jacobi'schen Identitäten noch auftretende unbekannte Constanten bestimmte Werte erhalten. Die Ausführung dieser Vereinfachungen nennen wir das *Normieren der infinitesimalen Transformationen.*

Normieren.

Wir gehen nun zur Einzelbehandlung unserer drei Fälle A, B, C des vorigen Paragraphen über:

Fünfgliedrige Gruppe.

A. $$P, \quad Q, \quad XQ, \quad XP - YQ, \quad YP.$$

Zunächst ist, wie bemerkt:

$$(XQ,\ XP - YQ) \equiv -2XQ.$$

Analog kommt:

$$(XQ,\ YP) \equiv XP - YQ, \quad (XP - YQ,\ YP) \equiv -2YP.$$

Ferner ist, wie bemerkt, zu setzen:

$$(P,\ XP - YQ) \equiv P + \alpha_1 XQ + \alpha_2(XP - YQ) + \alpha_3 YP.$$

α_1, α_2, α_3 bedeuten unbekannte Constanten. Dasselbe gilt von den später mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichneten. Dem gegenüber bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben a_1, a_2, a_3 u. s. w. gewisse willkürliche Constanten. Statt P dürfen wir offenbar

$$\overline{P} \equiv P + a_1 XQ + a_2(XP - YQ) + a_3 YP$$

als infinitesimale Transformation der Gruppe einführen. Nun ist:

$$\begin{aligned}(\overline{P},\ XP - YQ) &\equiv P + \alpha_1 XQ + \alpha_2(XP - YQ) + \alpha_3 YP \\ &\quad - 2a_1 XQ + 2a_3 YP \\ &\equiv \overline{P} + (\alpha_1 - 3a_1)XQ + (\alpha_2 - a_2)(XP - YQ) + \\ &\quad + (\alpha_3 + a_3)YP.\end{aligned}$$

Setzen wir $a_1 = \frac{1}{3}\alpha_1$, $a_2 = \alpha_2$, $a_3 = -\alpha_3$, so wird

$$(\overline{P},\ XP - YQ) \equiv \overline{P}.$$

Von nun ab wollen wir unter P die neue infinitesimale Transformation nullter Ordnung $\overline{P}$ verstehen. Dann ist also

$$(P,\ XP - YQ) \equiv P.$$

Entsprechend führen wir ein neues Q ein, sodass

$$(Q,\ XP - YQ) \equiv -Q$$

wird. Nun hat (P, YP) kein Glied nullter Ordnung, also ist zu setzen:

$$(P, YP) \equiv \beta_1 XQ + \beta_2(XP - YQ) + \beta_3 YP.$$

Mit Hülfe der in § 3 des 12. Kap. abgeleiteten Jacobi'schen Identität können wir nachweisen, dass $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ ist. Bilden wir nämlich die sicher bestehende Identität:

$$((P, YP) XP - YQ) + ((YP, XP - YQ) P) + ((XP - YQ, P) YP) \equiv 0$$

unter Benutzung der obigen Klammerausdrücke, so ergiebt sich die Bedingung:

$$-2\beta_1 XQ + 2\beta_3 YP - 3\beta_1 XQ - 3\beta_2(XP - YQ) - 3\beta_3 YQ = 0,$$

also $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, sodass wir haben:

$$(P, YP) \equiv 0.$$

Entsprechend kommt:

$$(Q, XQ) \equiv 0.$$

Ferner ist zunächst:

$$(P, XQ) \equiv Q + \gamma_1 XQ + \gamma_2(XP - YQ) + \gamma_3 YP.$$

Die Identität zwischen P, XQ, $XP - YQ$ giebt ohne weiteres $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Somit ist:

$$(P, XQ) \equiv Q$$

und analog

$$(Q, YP) \equiv P.$$

Schliesslich ist noch (P, Q) zu normieren. Vorerst haben wir allgemein anzunehmen:

$$(PQ) \equiv \delta_1 P + \delta_2 Q + \delta_3 XQ + \delta_4(XP - YQ) + \delta_5 YP.$$

Die Identität zwischen P, Q und $XP - YQ$ liefert $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ und die zwischen P, Q und XQ noch $\delta_4 = 0$, also:

$$(P, Q) \equiv 0.$$

Hiermit ist die Normierung beendet. Man sieht, dass die infinitesimalen Transformationen der Gruppe sich gerade so combinieren wie die verkürzten p, q, xq, $xp - yq$, yp. Wir werden zeigen, dass sie durch Einführung passender Variabeln auch gerade auf diese verkürzten reduciert werden können:

P und Q haben die Formen $p + \cdot\cdot$, $q + \cdot\cdot$, also im Anfangspunkt und daher überhaupt in Punkten allgemeiner Lage verschiedene Fortschreitungsrichtungen. Überdies ist $(P, Q) \equiv 0$. Nach Satz 12 lassen sich also neue Veränderliche $\bar{x}$, $\bar{y}$ derart einführen, dass

$$P \equiv \bar{p}, \quad Q \equiv \bar{q}$$

wird. Hier bedeuten $\bar{p}$ und $\bar{q}$ natürlich $\frac{\partial f}{\partial \bar{x}}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}$. In x, $\bar{y}$ habe $XP - YQ$ etwa die Form:

$$XP - YQ \equiv \bar{\xi}\bar{p} + \bar{\eta}\bar{q},$$

in der $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ gewisse Functionen von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bedeuten. Weil nun

$$(P,\ XP - YQ) \equiv P, \quad (Q,\ XP - YQ) \equiv -Q$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}}\bar{p} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}\bar{q} \equiv \bar{p},$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}}\bar{p} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}}\bar{q} \equiv -\bar{q},$$

also:

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} \equiv 1, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{y}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{y}} \equiv -1$$

oder:

$$\bar{\xi} \equiv \bar{x} + \alpha, \quad \bar{\eta} \equiv -\bar{y} - \beta,$$

sodass

$$XP - YQ \equiv (\bar{x} + \alpha)\bar{p} - (\bar{y} + \beta)q$$

wird. Ähnlich wird

$$XQ \equiv \gamma\bar{p} + (\bar{x} + \delta)\bar{q},$$

$$YP \equiv (\bar{y} + \varepsilon)\bar{p} + \varkappa\bar{q}.$$

Weil die gesuchte Gruppe schon $\bar{p}$ und $\bar{q}$ selbst enthält, so dürfen die mit Constanten behafteten Glieder $\bar{p}$ und $\bar{q}$ in diesen letzten drei infinitesimalen Transformationen gestrichen werden. Wenn wir schliesslich $\bar{x}$, $\bar{y}$ mit x, y bezeichnen, so kommen wir also in der That zu dem Typus:

$$\boxed{p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp}\,.$$

B. $P,\ Q,\ XQ,\ XP - YQ,\ YP,\ XP + YQ.$

Sechsgliedrige Gruppe.

Bekanntlich giebt $xp + yq$ mit xq, $xp - yq$, yp combiniert stets Null. Also sind, da $XP + YQ$ mit $xp + yq$ beginnt, die Klammerausdrücke von XQ, $XP - YQ$, YP mit $XP + YQ$ sämtlich frei von Gliedern erster Ordnung und selbstverständlich frei von solchen nullter Ordnung. Da sie der Gruppe angehören müssen, diese aber keine infinitesimalen Transformationen höherer Ordnung enthält, so folgt:

$$(XQ, XP + YQ) \equiv 0, \quad (XP - YQ, XP + YQ) \equiv 0, \quad (YP, XP + YQ) \equiv 0.$$

Nun wird ferner sein:

$$(P,\ XP + YQ) \equiv P + \alpha_1 XQ + \alpha_2(XP - YQ) + \alpha_3 YP + \alpha_4(XP + YQ).$$

Benutzen wir die rechte Seite als neues P, so kommt offenbar wegen der drei vorstehenden Klammerausdrücke

$$(P,\ XP + YQ) \equiv P.$$

Entsprechend dürfen wir annehmen

$$(Q,\ XP + YQ) \equiv Q.$$

Nun besteht die Identität:

$$((P,\ YP)XP + YQ) + ((YP,\ XP + YQ)P) + ((XP + YQ,\ P)YP) \equiv 0.$$

Hierin ist das zweite Glied identisch Null und das letzte gleich $-(P,\ YP)$, während das erste deshalb verschwindet, weil $(P,\ YP)$ von erster Ordnung ist und $XP + YQ$ mit infinitesimalen Transformationen erster Ordnung der Gruppe combiniert stets Null liefert. Somit kommt:

$$(P,\ YP) \equiv 0,$$

und analog ist

$$(Q,\ XQ) \equiv 0.$$

Ähnlich kommt, indem man jedesmal die Identität mit $XP + YQ$ bildet:

$$(P,\ XQ) \equiv Q \text{ u. s. w.,}$$

kurz alle infinitesimalen Transformationen sind normiert derart, dass die auftretenden zunächst noch unbekannten Constanten Null werden.

Wie im Falle A. können wir solche Veränderliche einführen, dass P und Q die Formen p und q annehmen. Aus $(P,\ XP + YQ) \equiv P$, $(Q,\ XP + YQ) \equiv Q$ folgt dann sofort

$$XP + YQ \equiv (x + \alpha)p + (y + \beta)q.$$

Benutzen wir nun $x + \alpha$, $y + \beta$ als Veränderliche x, y, so wird mithin:

$$P \equiv p, \quad Q \equiv q, \quad XP + YQ \equiv xp + yq.$$

Wenn eine infinitesimale Transformation $\xi p + \eta q$ mit $xp + yq$ combiniert Null liefert, so sind, wie man sofort sieht, ξ und η homogen von erster Ordnung in x, y. Solche Transformationen sind nun XQ, $XP - YQ$ und YP. Da nun $(Q,\ XQ) \equiv 0$ ist, so folgt, dass in XQ die Coefficienten von p und q frei von y, also von der Form Const. x sind. Aus $(P,\ XQ) \equiv Q$ folgt dann, dass XQ sich auf xq reduciert. Analoges gilt von den anderen infinitesimalen Transformationen. Somit geht der Typus hervor

p	q	xq	$xp - yq$	yp	$xp + yq$

.

C. $P, Q, XQ, XP-YQ, YP, XP+YQ, X^2P+XYQ, XYP+Y^2Q.$

Achtgliedrige Gruppe.

Da diese Gruppe keine infinitesimalen Transformationen von höherer als dritter Ordnung enthält, aber die Klammerausdrücke der Gruppe angehören müssen, so folgt zunächst, dass die Klammerausdrücke von $X^2P + XYQ$ und $XYP + Y^2Q$ mit einander und mit $XQ, XP-YQ, YP, XP + YQ$ sämtlich vollkommen bestimmt sind, da sie sich gerade so durch einander ausdrücken, wie die von $x^2p+xyq, xyp+y^2q$ mit einander und mit $xq, xp - yq, yp, xp + yq$. Dies Ergebnis bleibt offenbar bestehen, wenn man zu den infinitesimalen Transformationen erster Ordnung additiv mit constanten Coefficienten die von zweiter Ordnung hinzufügt. Da wir dies factisch thun werden, so ist diese Bemerkung von Wichtigkeit. Wir haben jetzt die infinitesimalen Transformationen erster Ordnung mit einander zu combinieren. Es ist $(XQ, XP + YQ)$ von höherer als erster Ordnung, daher:

$$(XQ, XP + YQ) \equiv \alpha_1(X^2P + XYQ) + \alpha_2(XYP + Y^2Q).$$

Benutzen wir anstatt XQ:

$$\overline{XQ} \equiv XQ + \alpha_1(X^2P + XYQ) + \alpha_2(XYP + Y^2Q),$$

so wird

$$(\overline{XQ}, XP + YQ) \equiv 0.$$

Wir nehmen darum an, es sei schon:

$$(XQ, XP + YQ) \equiv 0,$$

entsprechend

$$(XP - YQ, XP + YQ) \equiv 0, \quad (YP, XP + YQ) \equiv 0.$$

Ferner ist zunächst:

$$(XQ, XP - YQ) \equiv -2XQ + \beta_1(X^2P + XYQ) + \beta_2(XYP + Y^2Q).$$

Indem wir aber die Identität mit $XP + YQ$ bilden, finden wir $\beta_1 = \beta_2 = 0$, also

$$(XQ, XP - YQ) \equiv -2XQ,$$

entsprechend:

$$(YP, XP - YQ) \equiv 2YP, \quad (XQ, YP) \equiv XP - YQ.$$

Weiterhin ist vorerst:

$$(P, XP + YQ) \equiv P + \gamma_1 XQ + \gamma_2(XP - YQ) + \gamma_3 YP +$$
$$+ \gamma_4(XP + YQ) + \delta_1(X^2P + XYQ) + \delta_2(XYP + Y^2Q).$$

Führen wir

$$\overline{P} \equiv P + \gamma_1 XQ + \gamma_2(XP - YQ) + \gamma_3 YP + \gamma_4(XP + YQ) +$$
$$+ \frac{1}{2}\delta_1(X^2P + XYQ) + \frac{1}{2}\delta_2(XYP + Y^2Q)$$

ein, so kommt:

$$(\bar{P},\ XP + YQ) \equiv \bar{P}.$$

Daher nehmen wir an, es wäre schon:

$$(P,\ XP + YQ) \equiv P$$

und analog:

$$(Q,\ XP + YQ) \equiv Q.$$

Ferner ist zunächst:

$$(P,\ X^2P + XYQ) \equiv \frac{3}{2}(XP + YQ) + \frac{1}{2}(XP - YQ) +$$
$$+ \varepsilon_1(X^2P + XYQ) + \varepsilon_2(XYP + Y^2Q).$$

Aber die Identität mit $XP + YQ$ giebt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, also:

$$(P,\ X^2P + XYQ) \equiv \frac{3}{2}(XP + YQ) + \frac{1}{2}(XP - YQ).$$

Ebenso lassen sich alle übrigen Klammerausdrücke mit Hülfe der Identität mit $XP + YQ$ sofort derart bestimmen, dass sie sich gerade so durch die P, Q, XQ u. s. w. ausdrücken wie die Klammerausdrücke der p, q, xq u. s. w. durch diese.

Durch Einführung passender Variabeln lassen sich nun wie im Falle B. die infinitesimalen Transformationen nullter und erster Ordnung auf die verkürzte Form bringen:

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp \quad xp + yq.$$

Ist nun

$$X^2P + XYQ \equiv \xi(x, y)p + \eta(x, y)q,$$

so folgt aus

$$(P,\ X^2P + XYQ) \equiv \frac{3}{2}(XP + YQ) + \frac{1}{2}(XP - YQ),$$

$$(Q,\ X^2P + XYQ) \equiv XQ$$

sofort:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}p + \frac{\partial\eta}{\partial x}q \equiv \frac{3}{2}(xp + yq) + \frac{1}{2}(xp - yq),$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}p + \frac{\partial\eta}{\partial y}q \equiv xq,$$

d. h.

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} \equiv 2x, \quad \frac{\partial\eta}{\partial x} \equiv y, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial y} \equiv x,$$

sodass

$$\xi \equiv x^2 + \alpha, \quad \eta \equiv xy + \beta$$

zu setzen wäre. Weil aber p und q als selbständige infinitesimale Transformationen in der Gruppe auftreten, so dürfen die Constanten α und β gestrichen werden, sodass

$$X^2P + XYQ \equiv x^2p + xyq$$

wird. Analog kommt

$$XYQ + Y^2Q \equiv xyq + y^2q.$$

Also erhalten wir den Typus:

$$\boxed{p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp \quad xp + yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q},$$

die allgemeine projective Gruppe.

Hiermit ist die Bestimmung der primitiven Gruppen der Ebene beendet. Hervorgehoben sei, dass in den beiden letzten Fällen die Normierung deshalb verhältnismässig kurz ist, weil die Gruppe in diesen Fällen eine infinitesimale Transformation von der Form $xp + yq + \cdots$ enthält. Bei der Bestimmung aller primitiven Gruppen im *Raume* (x, y, z), mit der wir uns nicht beschäftigen werden, sind ganz analog die Fälle besonders bequem, in denen $xp + yq + zr + \cdots \left(r \equiv \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ auftritt. Auch ein anderes Ergebnis lässt sich auf den Raum übertragen: Die Maximalzahl der Ordnung der infinitesimalen Transformationen einer primitiven Gruppe ist höchstens *zwei*.

Hier wollen wir nur noch den Satz aussprechen:

Satz 13: *Jede primitive Gruppe der Ebene kann durch Einführung passender Veränderlicher in eine projective Gruppe übergeführt werden.*

§ 4. Tafel aller endlichen continuierlichen Gruppen der Ebene mit paarweis inversen Transformationen.

Es ist selbstverständlich, dass die drei Typen von primitiven Gruppen sämtlich wesentlich sind. Nicht so einfach ist die Frage nach überflüssigen Gruppen bei den früher berechneten Typen der imprimitiven Gruppen zu beantworten. Um zu entscheiden, ob sich unter ihnen überzählige befinden, wird man sie zunächst in Klassen einteilen derart, dass man von vornherein weiss, dass Gruppen, die verschiedenen Klassen angehören, auch nicht durch eine Transformation in einander übergeführt werden können. Als Einteilungsprincip bietet sich da naturgemäss die Feststellung der Anzahl invarianter Curvenscharen $\varphi(x, y) = \text{Const.}$ dar. In § 3 des 8. Kap. haben wir eine Anleitung zu ihrer Bestimmung gegeben. Hat man hiernach die Typen in einzelne Klassen untergebracht, so fragt es sich, ob Gruppen, die derselben Klasse angehören, in einander überführbar sind. Als Hülfsmittel bei der Entscheidung dieser Frage bieten sich mehrere

dar: Die beiden betrachteten Gruppen könnten höchstens dann auf einander reducibel sein, wenn sie gleiche Gliederzahl haben und so geschrieben werden können, dass ihre Zusammensetzung dieselbe ist; auch müssten die bei der einen invarianten Curvenscharen in die bei der anderen invarianten Curvenscharen überführbar sein.

Benutzt man diese Gesichtspunkte, so findet man, dass einige wenige Gruppen von geringer Gliederzahl mehrfach aufgetreten sind, wie z. B. die Gruppe q, yq, y^2q, die in § 2 des 13. Kap. gefunden wurde, aber in § 5 in der Form p, xp, x^2p wiederkehrt. Wir werden jedoch auf diese Untersuchung nicht eingehen. Auch die Frage, ob die in einzelnen Gruppen vorkommenden allgemeinen Constanten noch näher bestimmt werden können, werden wir nicht behandeln. Es wird genügen, wenn wir in folgender Tabelle alle nicht überzähligen Typen zusammenstellen. Die in ihnen auftretenden Constanten lassen sich nicht weiter specialisieren. Einige der Gruppen sind in wenig abgeänderter Form wiedergegeben. Wie man zu den modificierten Formen gelangt, wird in jedem Fall einleuchtend sein.

I. *Gruppen mit keiner invarianten Schar von ∞^1 Curven, d. h. primitive Gruppen.*

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp \quad xp + yq \quad x^2p + xyq \quad xyp + y^2q$$

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp \quad xp + yq$$

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp \quad .$$

II. *Gruppen mit nur einer invarianten Schar von ∞^1 Curven.*

$$q \quad \varphi_2(x)q \quad \varphi_3(x)q \quad \cdots \quad \varphi_r(x)q \qquad r > 1$$

$$q \quad \varphi_2(x)q \quad \cdots \quad \varphi_{r-1}(x)q \quad yq \qquad r > 2$$

$$e^{\alpha_k x}q \quad xe^{\alpha_k x}q \quad \cdots \quad x^{\varrho_k}e^{\alpha_k x}q \quad p$$
$$k = 1, 2 \cdots m, \quad \alpha_k = \text{Const.}, \quad \Sigma\varrho_k + m = r - 1, \quad r > 2$$

$$e^{\alpha_k x}q \quad xe^{\alpha_k x} \quad \cdots \quad x^{\varrho_k}e^{\alpha_k x}q \quad yq \quad p$$
$$k=1,2\cdots m, \quad \alpha_k=\text{Const.}, \quad \Sigma\varrho_k+m=r-2, \quad r>3$$

$$q \quad xq \quad x^2q \quad \cdots \quad x^{r-3}q \quad p \quad xp+ayq$$
$$r>3$$

$$q \quad xq \quad x^2q \quad \cdots \quad x^{r-3}q \quad p \quad xp+((r-2)y+x^{r-2})q$$
$$r>2$$

$$q \quad xq \quad x^2q \quad \cdots \quad x^{r-4}q \quad yq \quad p \quad xp$$
$$r>4$$

$$q \quad xq \quad x^2q \quad \cdots \quad x^{r-4}q \quad p \quad 2xp+(r-4)yq \quad x^2p+(r-4)xyq$$
$$r>4$$

$$yq \quad p \quad xp \quad x^2p+xyq$$

$$q \quad xq \quad x^2q \quad \cdots \quad x^{r-5}q \quad yq \quad p \quad xp \quad x^2p+(r-5)xyq$$
$$r>5$$

$$p \quad 2xp+yq \quad x^2p+xyq \; .$$

III. *Gruppen mit zwei invarianten Scharen von ∞^1 Curven.*

$$q \quad yq \qquad\qquad q \quad yq \quad y^2q \qquad\qquad q \quad yq \quad p \qquad\qquad q \quad yq \quad y^2q \quad p$$

$$q \quad p \quad xp+ayq \;\; (a \neq 1) \qquad\qquad q \quad yq \quad p \quad xp \qquad\qquad q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp$$

$$q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp \quad x^2p \qquad\qquad p+q \quad xp+yq \quad x^2p+y^2q \; .$$

IV. *Gruppen mit ∞^1 invarianten Scharen von ∞^1 Curven.*

$$q \quad xp+yq \qquad\qquad q \quad p \qquad\qquad q \quad p \quad xp+yq \; .$$

V. *Gruppen mit ∞^∞ invarianten Scharen von ∞^1 Curven.*

$$\boxed{\;q\;}.$$

Bei den unter II genannten Gruppen ist $x = \text{Const.}$ die invariante Schar von ∞^1 Curven, bei den unter III genannten Gruppen sind es die beiden Scharen $x = \text{Const.}$ und $y = \text{Const.}$, bei denen unter IV alle Scharen von der Form $ax + by = \text{Const.}$, endlich bei der Gruppe unter V bleibt jede Schar $\varphi(x) + \psi(y) = \text{Const.}$ invariant.

Anwendungen der hier gefundenen Gruppen werden wir weiter unten geben.

ZWEITER ABSCHNITT.



Abteilung IV.

Die grundlegenden Sätze der Gruppentheorie.

Die gegenwärtige vierte Abteilung soll der *Begründung der wichtigsten Sätze der Gruppentheorie in beliebig vielen Veränderlichen* gewidmet sein. Wir setzen dabei voraus, dass dem Leser die Theorie der vollständigen Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen bekannt und die Anstellung allgemeiner rechnerischer Betrachtungen in n Veränderlichen geläufig sei.

Im *ersten* Kapitel dieser Abteilung werden *die drei sogenannten Fundamentalsätze* bewiesen werden. Diese Beweise unterscheiden sich nur in der Redaction von den im Lehrbuch der Theorie der Transformationsgruppen*) gegebenen. Wir werden nur im Texte alle synthetischen Betrachtungen streichen, die streng genommen überflüssig sind, und gehen also rein analytisch vor. Da aber diese synthetischen Überlegungen den Gedankengang klarer hervortreten lassen, so geben wir sie in kleinerem Druck derart, dass sie ebensowohl mitgenommen als auch übersprungen werden können.

Alsdann werden wir die Begriffe *„Transitivität“* und *„invariantes Gleichungensystem“* einführen, an die Fundamentalsätze Folgerungen in Betreff der *Überführbarkeit von Gruppen in einander durch Änderung der Veränderlichen* knüpfen, sowie den Begriff *„adjungierte Gruppe“* besprechen.

Wir wollen endlich noch ausdrücklich hervorheben, dass die jetzige Abteilung überhaupt zur Einführung in die allgemeine Theorie der Transformationsgruppen benutzt werden kann.

---

*) Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I. u. II. Abschnitt bearb. unter Mitwirkung von F. Engel. Leipzig 1888 u. 1890. Insbesondere Kapitel 2, 4, 9, 17 des I. Abschnittes und Kapitel 17 des II. Abschnittes.

Kapitel 15.

Beweis der drei Fundamentalsätze.

Unter den grundlegenden Sätzen der Gruppentheorie giebt es *drei*, die eine ausgezeichnete Stellung einnehmen*). Der erste handelt von definierenden Differentialgleichungen einer Gruppe, der zweite ist das Theorem über die Klammerausdrücke $(U_i U_k) \equiv \Sigma c_{iks} U_s f$, das wir früher als den Hauptsatz bezeichneten, und der dritte bezieht sich auf die Relationen, die zwischen den Zusammensetzungsconstanten c_{iks} bestehen.

Diese Sätze sollen hier in n Veränderlichen bewiesen werden. Dabei bedarf es zunächst der Definition der endlichen continuierlichen Gruppen in n Veränderlichen.

§ 1. Gruppe in n Veränderlichen.

Die n Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

Transformation.

bestimmen eine *Transformation* der n Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ in die n Veränderlichen $x_1', x_2' \ldots x_n'$, wenn sie auch nach den ersteren auflösbar sind, wenn also ihre Functionaldeterminante

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial f_i(x_1 \cdot \cdot x_n)}{\partial x_k} \\ i, k = 1, 2 \ldots n \end{array} \right|$$

nicht identisch verschwindet.

*) Lie stellte diese Sätze in den Jahren 1874—76 auf und gab in den Jahren 1876—78 die ersten Beweise derselben. Diese Beweise verbesserte er in den Jahren 1888—89 in einigen Punkten. In zwei Abhandlungen in den Mathem. Annalen, Bd. 35 und 38, hat neuerdings Herr Schur neue Beweise für die Fundamentalsätze der Gruppentheorie erbracht. Während es Lie in seinem oben citierten Werke vor allem darauf ankam, nicht nur die Fundamentalsätze zu beweisen, sondern gleichzeitig dabei viele sonstige wichtige gruppentheoretische Schlüsse zu ziehen, geht Schur darauf aus, jene drei Sätze möglichst kurz auf rein analytischem Wege darzuthun. Die von uns zu gebende Darstellung der Lie'schen Beweise wird jedoch zeigen, dass die ursprünglichen Lie'schen Beweise an Kürze nichts zu wünschen übrig lassen, wenn sie von allen nicht direct nötigen Nebenbetrachtungen losgelöst werden. Andererseits aber sind die Lie'schen Beweise, wie schon bemerkt, nur die analytischen Fassungen begrifflicher Betrachtungen, und hierin liegt unseres Erachtens ein Vorzug dieser Beweise.

Wir werden nachher bei den einzelnen Fundamentalsätzen die Beweise mit den von Schur gegebenen in Vergleich stellen.

Enthalten die Transformationsgleichungen noch willkürliche Constanten, etwa die r Parameter $a_1 \,.\,.\, a_r$:

(1) $$x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

so bestimmen sie eine *Schar von Transformationen.* Diese Schar enthält gerade ∞^r verschiedene Transformationen, wenn die Zahl r der Parameter nicht erniedrigt werden kann, mit anderen Worten: wenn es keine $r - 1$ Functionen $\mathfrak{A}_1 \,.\,.\, \mathfrak{A}_{r-1}$ von $a_1 \,.\,.\, a_r$ giebt derart, dass n Gleichungen

Schar von Transformationen.

$$f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ a_1 \,.\,.\, a_r) = F_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ \mathfrak{A}_1 \,.\,.\, \mathfrak{A}_{r-1})$$
$$(i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

identisch für alle Werte von $x_1 \,.\,.\, x_n$, $a_1 \,.\,.\, a_r$ erfüllt werden können.

Angenommen die Zahl der Parameter lasse sich erniedrigen. Dann existieren solche $r - 1$ Functionen $\mathfrak{A}_1 \,.\,.\, \mathfrak{A}_{r-1}$ von $a_1 \,.\,.\, a_r$. Sie genügen als Lösungen f einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\chi_1(a_1 \,.\,.\, a_r)\frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + \chi_r(a_1 \cdot\cdot\, a_r)\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0,$$

in der $\chi_1 \,.\,.\, \chi_r$ nicht sämtlich identisch Null sind. Da diese Differentialgleichung natürlich auch von jeder Function von $\mathfrak{A}_1 \,.\,.\, \mathfrak{A}_{r-1}$ und $x_1 \,.\,.\, x_n$ erfüllt wird — denn $x_1 \,.\,.\, x_n$ treten in ihr gar nicht auf —, so wird sie auch von jeder der obigen Functionen $F_1 \,.\,.\, F_n$ befriedigt werden, mithin auch von $f_1 \,.\,.\, f_n$.

Wenn umgekehrt $f_1 \,.\,.\, f_n$ eine partielle Differentialgleichung von der obigen Form erfüllen, so lassen sie sich als Functionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$ und $r - 1$ Lösungen $\mathfrak{A}_1 \,.\,.\, \mathfrak{A}_{r-1}$ der Differentialgleichung darstellen, also in der Form $F_1 \,.\,.\, F_n$, sodass dann die Zahl r der Parameter auf $r - 1$ erniedrigt werden kann.

Demnach folgt:

Satz 1: *Die Schar der Transformationen*

$$x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

mit r Parametern $a_1 \,.\,.\, a_r$ besteht aus ∞^r verschiedenen Transformationen dann und nur dann, wenn es keine von $x_1 \,.\,.\, x_n$ freie partielle Differentialgleichung erster Ordnung in f:

$$\sum_1^r {}^k\, \chi_k(a_1 \,.\,.\, a_r)\frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

giebt, der die Functionen $f_1 \,.\,.\, f_n$ sämtlich genügen.

Wir sagen alsdann, *dass die r Parameter $a_1 \,.\,.\, a_r$ der Schar* (1) *sämtlich wesentlich seien.* Künftig setzen wir voraus, dass in der That

Wesentliche Parameter.

die Schar (1) ∞^r *verschiedene* Transformationen darstelle, anders ausgedrückt, dass alle r Parameter $a_1 \ldots a_r$ wesentlich seien. (Vgl. Satz 1, § 1 des 6. Kap.)

Die Schar (1) von ∞^r Transformationen bildet nun, sagen wir, eine *Gruppe*, wenn stets die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Schar einer einzigen Transformation der Schar äquivalent ist, wenn also die Elimination der Zwischenwerte $x_1' \ldots x_n'$ aus

Gruppe.

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= f_i(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_r) \\ x_i'' &= f_i(x_1' \ldots x_n',\ b_1 \ldots b_r) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{2}$$

Gleichungen von eben dieser Form liefert:

$$x_i'' = f_i(x_1 \ldots x_n,\ c_1 \ldots c_r) \quad (i = 1, 2 \ldots n), \tag{3}$$

in denen $c_1 \ldots c_r$ nur von $a_1 \ldots a_r$ und $b_1 \ldots b_r$ abhängen:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \ldots a_r,\ b_1 \ldots b_r) \quad (k = 1, 2 \ldots r); \tag{4}$$

Functionalgleichgn.

noch anders ausgesprochen, wenn *Functionalgleichungen* bestehen von der Form

$$f_i(f(x, a) b) = f_i(x, \varphi(a, b)) \quad (i = 1, 2 \ldots n), \tag{5}$$

in der wir die Abkürzung $\omega(u_1 \ldots u_n,\ v_1 \ldots v_r) = \omega(u, v)$ durchgehend benutzt haben. Diese abkürzende Angabe der Veränderlichen werden wir öfters benutzen.

r-gliedrige Gruppe in n Veränderlichen.

Ist nun die hiermit auf mehrere Arten ausgedrückte Bedingung erfüllt, so sagen wir, dass die Gleichungen (1) *eine r-gliedrige Transformationsgruppe in n Veränderlichen* darstellen.

Unabhängigkeit der Functionen φ.

Liegt eine solche Gruppe (1) vor, so haben die Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ von $a_1 \ldots a_r$, $b_1 \ldots b_r$ ganz bestimmte Formen, die eben durch das angegebene Eliminationsverfahren aus (2) hervorgehen. Wir behaupten, dass $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ von einander unabhängige Functionen hinsichtlich $b_1 \ldots b_r$ sind. Wir können nämlich die Functionalgleichungen (5) wegen (1) auch so schreiben:

$$f_i(x', b) = f_i(x, \varphi) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und aus ihnen durch Differentiation nach b_l ableiten:

$$\frac{\partial f_i(x', b)}{\partial b_l} = \sum_1^r {}_k \frac{\partial f_i(x, \varphi)}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial b_l}.$$

Durchläuft l die Ziffernreihe 1, 2 .. r, so ergeben sich r Gleichungen, die vermöge (1) identisch bestehen. Wenn nun die Determinante der $\frac{\partial \varphi_k}{\partial b_l}$, also die Functionaldeterminante der φ nach den b, identisch ver-

schwände, so würde es r nicht sämtlich identisch verschwindende Functionen $\Theta_1 \ldots \Theta_r$ von $a_1 \ldots a_r$, $b_1 \ldots b_r$ geben — nämlich gewisse Unterdeterminanten dieser Functionaldeterminante — derart, dass unsere r letzten Gleichungen mit ihnen multipliciert und addiert als rechte Seite Null ergäben, sodass käme:

$$\sum_1^r {}_l\, \Theta_l(a, b) \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial b_l} = 0 \tag{6}$$

und zwar für jeden Wert $1, 2 \ldots n$ von i. Diese Gleichungen müssten nun identisch bestehen nicht nur in Folge von (1), sondern schon an sich, da die Grössen x', a und b durch keine von den x freie Relation gebunden sind. Geben wir schliesslich in (6) den $a_1 \ldots a_r$ irgend welche bestimmte Werte, so würden diese Gleichungen also nach Satz (1) aussagen, dass in den $f_i(x', b)$ die Parameter $b_1 \ldots b_r$ nicht sämtlich wesentlich wären, d. h. dass die Gleichungen

$$x_i'' = f_i(x_1' \ldots x_n', b_1 \ldots b_r) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

weniger als ∞^r Transformationen darstellen. Dies aber ist ausdrücklich ausgeschlossen worden. Mithin ist die gemachte Annahme des Verschwindens der Functionaldeterminante der φ nach den b falsch, und wir finden:

Die r Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ sind von einander unabhängig hinsichtlich $b_1 \ldots b_r$.

§ 2. Der erste Fundamentalsatz.

Die soeben besprochenen Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_r$ sind nach (4) die Werte von $c_1 \ldots c_r$. Bis jetzt wurden nur $x_1 \ldots x_n$, $a_1 \ldots a_r$, $b_1 \ldots b_r$ als die unabhängig veränderlichen Grössen aufgefasst, von denen $x_1' \ldots x_n'$, $x_1'' \ldots x_n''$, $c_1 \ldots c_r$ vermöge (2) und (4) abhängen. Nach dem soeben Erkannten lassen sich aber auch $x_1 \ldots x_n$, $a_1 \ldots a_r$ und $c_1 \ldots c_r$ als willkürlich veränderlich auffassen, während $x_1' \ldots x_n'$, $x_1'' \ldots x_n''$, $b_1 \ldots b_r$ vermöge der ersten Gleichung (2) und vermöge (3) und (4) von diesen abhängen.

Andere unabhäng. Veränderl.

Diese neue Auffassung wollen wir den folgenden Betrachtungen zu Grunde legen. Alsdann giebt die Differentiation der Functionalgleichungen (5) oder

Differentiation der Functionalgleichgn.

$$f_\lambda(x', b) = f_\lambda(x, c) \quad (\lambda = 1, 2 \ldots n) \tag{5'}$$

nach a_k:

$$(7) \qquad \sum_1^n {}_i \frac{\partial f_\lambda(x', b)}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} + \sum_1^r {}_j \frac{\partial f_\lambda(x', b)}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k} = 0$$

$$(k = 1, 2 \,..\, r).$$

Die $\frac{\partial b_j}{\partial a_k}$ lassen sich vermöge (4) als Functionen der a und b ausdrücken, denn durch Differentiation von

$$c_h = \varphi_h(a_1 \,..\, a_r, b_1 \,..\, b_r) \quad (h = 1, 2 \,..\, r)$$

nach a_k folgt:

$$0 = \frac{\partial \varphi_h(a, b)}{\partial a_k} + \sum_1^r {}_j \frac{\partial \varphi_h(a, b)}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k} \quad (h = 1, 2 \,..\, r),$$

und hieraus lassen sich die $\frac{\partial b_j}{\partial a_k}$ ausrechnen, da die Functionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial \varphi_h}{\partial b_j} \right| \neq 0$$

ist. Denken wir uns diese berechneten Werte in (7) substituiert und darauf die Werte der $\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ aus (7) berechnet, was möglich ist, weil die Functionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial f_\lambda(x', b)}{\partial x_i'} \right| \neq 0$$

ist, so erkennen wir das Bestehen von Relationen von der Form:

Differentialgleichgn. für die Gruppe.

$$(8) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j \Psi_{jk}(a, b) \Phi_{ji}(x', b)$$

$$(i = 1, 2 \,..\, n, \quad k = 1, 2 \,..\, r).$$

Erteilt man hierin den x' die Werte $f(x, a)$, so enthalten die hervorgehenden Gleichungen nur die von einander unabhängigen Grössen x, a, b. Sie bestehen daher identisch, und da ihre linken Seiten nur von den x und a abhängen, so werden auch die speciellen Gleichungen

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j \Psi_{jk}(a, \bar{b}) \Phi_{ji}(x', \bar{b})$$

$$(i = 1, 2 \,..\, n, \quad k = 1, 2 \,..\, r),$$

in denen $\bar{b}_1 \,..\, \bar{b}_r$ ganz bestimmt gewählte Zahlen bedeuten, durch die Substitution $x_i' = f_i(x, a)$ identisch erfüllt.

Die bei einer solchen bestimmten Wahl der b hervorgehenden Functionen Ψ und Φ wollen wir mit ψ und ξ bezeichnen, ohne die

in ihnen vorkommenden Zahlen $\bar{b}_1 \dots \bar{b}_r$ weiter hervorzuheben. Wir können dann das Ergebnis so aussprechen:

Satz 2: *Stellen die n Gleichungen*

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

eine r-gliedrige Gruppe dar, so genügen $x_1' \dots x_n'$, als Functionen von $x_1 \dots x_n$, $a_1 \dots a_r$ betrachtet, gewissen Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j\, \psi_{jk}(a_1 \dots a_r) \xi_{ji}(x_1' \dots x_n') \tag{9}$$

$$(i = 1, 2 \dots n, \quad k = 1, 2 \dots r).$$

Die Determinante der ψ_{jk} ist nun nicht identisch Null, weil sonst wegen (9) n Relationen zwischen den $\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ beständen von der Form

$$\sum_1^r {}_k\, \chi_k(a_1 \dots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

in denen die nicht sämtlich verschwindenden χ vom Index i unabhängig wären, da sie gewisse Unterdeterminanten der Determinante der ψ_{jk} wären. Nach Satz 1 des vorigen Paragraphen würden also die Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ gegen unsere Voraussetzung weniger als ∞^r Transformationen darstellen. Es ist also die Determinante:

$$| \psi_{jk} | \mathrel{\equiv\mkern-14mu|}\; 0.$$

Wir können somit die Gleichungen (9) nach den Grössen ξ_{ji} auflösen. Dadurch finden wir etwa:

Andere Form der Diffgln.

$$\xi_{ji}(x_1' \dots x_n') = \sum_1^r {}_k\, \alpha_{jk}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \tag{10}$$

$$(i = 1, 2 \dots n, \quad j = 1, 2 \dots r).$$

Da diese Gleichungen wieder in der Form (9) auflösbar sind, so ist auch die Determinante

$$| \alpha_{jk} | \mathrel{\equiv\mkern-14mu|}\; 0.$$

Keine Relationen zw. den ξ mit const. Coefficient.

Es bestehen ferner zwischen den $\xi_{ji}(x')$ keine n linearen homogenen Relationen mit constanten Coefficienten $e_1 \dots e_r$ von der Form

$$e_1 \xi_{1i}(x') + \dots + e_r \xi_{ri}(x') = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

da sonst aus (10) folgen würde:

$$\sum_1^r {}_k \sum {}_j\, e_j \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Diese n Gleichungen müssten durch die Functionen $x_i' = f_i(x, a)$ identisch erfüllt sein. Nach Satz 1 des vorigen Paragraphen ist dies jedoch mit der Voraussetzung, dass $a_1 \,.\,.\, a_r$ sämtlich wesentlich seien, nur dann vereinbar, wenn einzeln jeder Coefficient in den obigen n Gleichungen verschwände:

$$\sum_1^r {}^j e_j \alpha_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_r) = 0 \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Weil aber die Determinante der α_{jk} nicht identisch Null ist, so lassen sich diese Forderungen nur durch die Annahme $e_1 = e_2 = \cdot \cdot = e_r = 0$ erfüllen. In der That ist also die Existenz obiger Relationen unmöglich. Diese Bemerkung wird später wichtig werden.

Umkehrung.

Wir gehen nunmehr dazu über, den Satz (2), soweit es möglich ist, umzukehren, um damit zum ersten Fundamentalsatze zu gelangen.

Es möge eine Schar von ∞^r verschiedenen Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\; a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n) \tag{1}$$

vorgelegt sein, und es sei vorausgesetzt, dass diese Gleichungen die $x_1' \,.\,.\, x_n'$ als Functionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$, $a_1 \,.\,.\, a_r$ derart definieren, dass sie identisch $r \cdot n$ Differentialgleichungen von der Form (9) genügen. Der obige Beweis für das Nichtverschwinden der Determinante der ψ_{jk} kann — da er ja die Gruppeneigenschaft nicht benutzt — auch jetzt aufrecht erhalten werden. Die Determinante der ψ_{jk} ist also unter den soeben gemachten Annahmen nicht identisch Null. Wir wissen daher, dass bei den jetzigen Voraussetzungen die Functionen $x_1' \,.\,.\, x_n'$ von $x_1 \,.\,.\, x_n$, $a_1 \,.\,.\, a_r$ auch $r \cdot n$ Differentialgleichungen erfüllen von der Form

$$\xi_{ji}(x_1' \,.\,.\, x_n') = \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \tag{10}$$

$$(i = 1, 2 \,.\,.\, n, \quad j = 1, 2 \,.\,.\, r),$$

deren Determinante $|\alpha_{jk}| \not\equiv 0$ ist.

Voraussetzung der Existenz der ident. Transform.

Ausserdem setzen wir noch voraus, dass gewisse Werte $a_1^0 \,.\,.\, a_n^0$ der Parameter $a_1 \,.\,.\, a_n$ in (1) substituiert die *identische Transformation* $x_i' = x_i$ liefern, und dass die Determinante der $\alpha_{jk}(a^0)$ weder Null noch Unendlich ist.

Unter diesen Voraussetzungen können wir beweisen, dass die Schar (1) eine Gruppe bildet*). Zum Beweise suchen wir aus (10)

*) Bei dem folgenden analytischen Beweis benutzen wir scheinbar einen Kunstgriff. Die späteren in einer Note mitgeteilten synthetischen Betrachtungen zeigen, dass wir eine sich von selbst darbietende Methode anwenden.

die Form der Functionen $x_1' .. x_n'$ von $a_1 .. a_r$ durch Integration abzuleiten. Dazu empfiehlt es sich, an Stelle der r Parameter $a_1 .. a_r$ gewisse neue Parameter einzuführen, um die Gleichungen (10) möglichst zu vereinfachen. Wir bewerkstelligen dies so: Es mögen $\lambda_1 .. \lambda_r$ irgend welche r bestimmte, aber beliebig gewählte Constanten sein. Alsdann setzen wir das simultane System an:

Neue Parameter

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_1^r {}_j \lambda_j \alpha_{jk}(a_1 .. a_r) \quad (k = 1, 2 .. r). \tag{11}$$

Durch dieses werden $a_1 .. a_r$ als Functionen einer neuen Hülfsgrösse t, der Grössen $\lambda_1 .. \lambda_r$ sowie gewisser Integrationsconstanten definiert. Um letztere in bestimmter Weise zu wählen, setzen wir fest, dass $a_1 .. a_r$ für $t = \bar{t}$ Anfangswerte $\bar{a}_1 .. \bar{a}_r$ annehmen sollen, für welche die Determinante der $\alpha_{jk}(\bar{a})$ weder verschwindet noch unendlich gross wird. Man sieht dann ohne weiteres ein, dass in den Integralgleichungen die Grössen $\lambda_1 .. \lambda_r$ und t nur in den r Verbindungen

$$\mu_j = \lambda_j(t - \bar{t}) \quad (j = 1, 2 .. r)$$

auftreten, denn die Gleichungen (11) ändern sich nicht, wenn man t — und also auch $\bar{t}$ — mit einer Constanten ϱ multipliciert und gleichzeitig $\lambda_1 .. \lambda_r$ durch ϱ dividiert. Die Integralgleichungen können somit in Form von Reihenentwickelungen so geschrieben werden:

$$a_k = \bar{a}_k + \sum_1^r {}_j \mu_j \alpha_{jk}(\bar{a}_1 .. \bar{a}_r) + \cdots \equiv \Phi_k(\mu_1 .. \mu_r, \bar{a}_1 .. \bar{a}_r) \tag{12}$$
$$(k = 1, 2 .. r),$$

deren rechte Seiten Φ_k also nach steigenden Potenzen von $\mu_1 .. \mu_r$ fortschreiten. Die $a_1 .. a_r$ sind unabhängig von einander hinsichtlich $\mu_1 .. \mu_r$, da die Functionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial a_k}{\partial \mu_j} \right|$$

nicht identisch Null ist, weil sie sich für $\mu_1 = \cdots = \mu_r = 0$ auf die Determinante der $\alpha_{jk}(\bar{a})$ reduciert.

Hiernach ist es uns erlaubt, anstatt $a_1 .. a_r$ die r Grössen $\mu_1 .. \mu_r$ als Parameter in die Schar (1) einzuführen, indem wir die Werte (12) in (1) einsetzen. Durch Auflösung von (12) nach $\mu_1 .. \mu_r$ lassen sich diese in der Form darstellen:

$$\mu_j = M_j(a_1 .. a_r, \bar{a}_1 .. \bar{a}_r) \quad (j = 1, 2 .. r). \tag{13}$$

Wenn wir diese neuen Parameter $\mu_1 .. \mu_r$ in die Schar (1) einführen, so werden $x_1' .. x_n'$ gewisse Functionen von $x_1 .. x_n$, $\mu_1 .. \mu_r$

und den bestimmt gewählt gedachten $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$. Weil die μ von t abhängen, so werden also auch $x_1' \dots x_n'$ gewisse Functionen der Hülfsveränderlichen t. Die Gleichungen (10) drückten Beziehungen zwischen den Differentialquotienten der $x_1' \dots x_n'$ nach $a_1 \dots a_r$ aus. Diese gehen nunmehr über in einfachere Gleichungen für die $\frac{dx_i'}{dt}$. Wenn wir nämlich in (10) j alle Werte $1, 2 \dots r$ durchlaufen lassen, so erhalten wir r Gleichungen. Wir multiplicieren sie der Reihe nach mit $\lambda_1 \dots \lambda_r$ und addieren sie dann. Dadurch ergiebt sich wegen (11):

$$\sum_1^r {}_j\, \lambda_j \xi_{ji}(x_1' \dots x_n') = \sum_1^r {}_k\, \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \frac{d a_k}{dt}$$

oder

$$(14) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_j\, \lambda_j \xi_{ji}(x_1' \dots x_n') \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Integration der Diffgln. Diese n Gleichungen stellen ein simultanes System dar, das von den $x_1' \dots x_n'$, aufgefasst als Functionen von t, sicher erfüllt wird. Da sich für $t = \bar{t}$ die $a_1 \dots a_r$ auf $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_r$ reducieren, so sehen wir: Bei dem simultanen System (14) haben $x_1' \dots x_n'$ für $t = \bar{t}$ nach (1) die Anfangswerte

$$(15) \qquad \bar{x}_i' = f_i(x_1 \dots x_n, \bar{a}_1 \dots \bar{a}_r) \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Die Integralgleichungen enthalten wieder die Grössen $\lambda_1 \dots \lambda_r$ und t nur in den Verbindungen $\mu_1 \dots \mu_r$ und lassen sich daher auch in der Form darstellen:

$$(16) \qquad x_i' = F_i(\bar{x}_1' \dots \bar{x}_n', \mu_1 \dots \mu_r) \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Führen wir hierin die Werte

$$\bar{x}_i' = f_i(x, \bar{a}), \quad x_i' = f_i(x, a), \quad a_k = \Phi_k(\mu, \bar{a})$$
$$(i = 1, 2 \dots n, \quad k = 1, 2 \dots r)$$

in Gemässheit von (1) und (12) ein, so erhalten wir, wenn wir noch die rechte mit der linken Seite vertauschen, die Functionalgleichungen:

$$(17) \qquad F_i(f(x, a), \mu) = f_i(x, \Phi(\mu, \bar{a}))$$
$$(i = 1, 2 \dots n),$$

die wir jetzt deuten wollen.

Deutung der Functionalgleichgn. Diese Functionalgleichungen (17) sagen, wenn man überdies die Existenz der identischen Transformation in der Schar (1) voraussetzt, nichts anderes aus, als dass die Schar (1) eine Gruppe bildet.

Um dies deutlich zu erkennen, wollen wir die allgemeine Transformation (1), die also dem Parametersystem $a_1 \,.\,.\, a_r$ zugehört, mit dem Symbol T_a bezeichnen. Die Gleichungen (15) stellen dann die Transformation $T_{\bar{a}}$ dar. Andererseits wollen wir die Transformation mit den Parametern $\mu_1 \,.\,.\, \mu_r$, die durch (16) dargestellt wird, mit dem Symbol E_μ bezeichnen*). Nun können wir die n Functionalgleichungen (17) in die einzige Formel zusammenfassen:

$$T_{\bar{a}} E_\mu \doteq T_a, \tag{18}$$

denn $T_{\bar{a}}$ führt x_i in $\bar{x}_i' = f_i(x, \bar{a})$ und E_μ führt $\bar{x}_i'$ in $F_i(\bar{x}', \mu)$ über, während T_a nach (12) auch in der Form

$$x_i = f_i(x, \Phi(\mu, \bar{a})) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

geschrieben werden kann.

Diese Beziehungen (18) bestehen also, sobald nur die drei Parametersysteme $\bar{a}_1 \,.\,.\, \bar{a}_r$, $\mu_1 \,.\,.\, \mu_r$, $a_1 \,.\,.\, a_r$ durch die Relationen (12) verknüpft sind. $\bar{a}_1 \,.\,.\, \bar{a}_r$ bedeuten dabei bestimmt gewählte allgemeine Werte von $a_1 \,.\,.\, a_r$.

Jetzt erst machen wir von der Voraussetzung Gebrauch, dass die Transformation (1) für $a_1 = a_1^0, \,.\,.\, a_r = a_r^0$ die identische werden soll. Wir setzen nämlich für den Augenblick $\bar{a}_1 = a_1^0, \,.\,.\, \bar{a}_r = a_r^0$, wählen also $T_{\bar{a}}$ als die identische Transformation T_{a^0}. Alsdann nehmen, weil die Determinante der $\alpha_{jk}(a^0)$ nach Voraussetzung auch von Null und Unendlich verschieden ist und mithin die bisherigen Betrachtungen auch für $\bar{a} = a^0$ gelten, die $a_1 \,.\,.\, a_r$ in Folge von (12) die Werte an:

$$\alpha_k = \Phi_k(\mu_1 \,.\,.\, \mu_r, a_1^0 \,.\,.\, a_r^0) \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r), \tag{19}$$

sodass aus (18) insbesondere folgt:

$$T_{a^0} E_\mu = T_\alpha$$

oder also

$$E_\mu = T_\alpha. \tag{20}$$

Jede Transformation E_μ gehört mithin zur Schar der Transformationen (1). Da die Φ_k in (12) hinsichtlich der Grössen $\mu_1 \,.\,.\, \mu_r$ von einander unabhängig sind, so gehört auch umgekehrt jede Transformation (1) der Schar der E_μ an, denn beide Scharen enthalten je ∞^r verschiedene Transformationen.

Wenn wir nun wieder in (18) die $\bar{a}$ beliebig wählen, aber E_μ durch T_α ersetzen, so kommt:

---

*) Die Transformationen E_μ bilden bei variierendem t eine eingliedrige Gruppe, erzeugt von einer infinitesimalen Transformation, in dem von früher her bekannten Sinn. Man vergleiche die begrifflichen Erläuterungen weiter unten.

$$(21) \qquad T_{\bar{a}} \, T_\alpha = T_a.$$

Hierin sind $\bar{a}_1 \,.\,.\, \bar{a}_r$ völlig willkürlich. Auch können wir uns statt $\mu_1 \,.\,.\, \mu_r$ nach (19) die $\alpha_1 \,.\,.\, \alpha_r$ völlig willkürlich gewählt denken. Alsdann sind $a_1 \,.\,.\, a_r$ nach (12) und (13) die Functionen:

$$(22) \qquad a_k = \Phi_k(M(\alpha, a^0), \bar{a}) \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

von $\bar{a}_1 \,.\,.\, \bar{a}_r$ und $\alpha_1 \,.\,.\, \alpha_r$.

Die Gleichung (21) sagt folglich aus:

Die Aufeinanderfolge zweier *beliebiger* Transformationen $T_{\bar{a}}$ und T_α der Schar (1) ist äquivalent einer einzigen Transformation T_a derselben Schar.

Dies aber ist die *Gruppeneigenschaft.*

Hiermit sind wir zu dem Satze gelangt:

Erster Fundamentalsatz.

Erster Fundamentalsatz: *Bestimmen die Gleichungen*

$$(\mathrm{I}) \qquad x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n, a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

∞^r *verschiedene Transformationen, die eine Gruppe bilden, so bestehen* $r \cdot n$ *Gleichungen von der Form*

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}_j \, \psi_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_r) \xi_{ji}(x_1' \,.\,.\, x_n')$$

$$(i = 1, 2 \,.\,.\, n, \quad k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

sowie ihre Auflösungen:

$$(\mathrm{III}) \qquad \xi_{ji}(x_1' \,.\,.\, x_n') = \sum_1^r {}_k \, \alpha_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$$

$$(i = 1, 2 \,.\,.\, n, \quad j = 1, 2 \,.\,.\, r),$$

während die $\xi_{ji}(x')$ *keine* n *linearen homogenen Relationen*

$$e_1 \xi_{1i}(x') + \cdots + e_r \xi_{ri}(x') \equiv 0$$

$$(i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

mit constanten Coefficienten $e_1 \,.\,.\, e_r$ *erfüllen. — Wenn umgekehrt solche* n *Gleichungen* (I), *die* ∞^r *verschiedene Transformationen darstellen,* $r \cdot n$ *Gleichungen von der Form* (II) *und in Folge dessen auch* $r \cdot n$ *Gleichungen von der Form* (III) *erfüllen, wenn überdies für gewisse constante Grössen* $a_1^0 \,.\,.\, a_r^0$ *die Gleichungen*

$$f_i(x_1 \,.\,.\, x_n, a_1^0 \,.\,.\, a_r^0) \equiv x_i \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

bestehen und schliesslich die Determinante der $\alpha_{jk}(a^0)$ *von Null und Unendlich verschieden ist, so stellen die Gleichungen* (I) *eine Gruppe dar.*

Wir wollen besonders hervorheben, dass die Gleichungen (II) oder (III) die Form der Gleichungen (I) vollständig bestimmen bis auf die Integrationsconstanten, dass also die Functionen $f_i(x, a)$ durch die Functionen $\psi_{jk}(a)$ und $\xi_{ji}(x')$ durchaus definiert sind, sobald man voraussetzt, dass sich $x_1' .. x_n'$ für $a_1 = a_1^0, .. a_r = a_r^0$ auf $x_1 .. x_n$ reducieren sollen.

Begriffliche Fassung des Beweises.

In grossen Zügen soll nun *der begriffliche Inhalt der vorstehenden Entwickelungen* angedeutet werden. Man wird gut thun, sich dabei die Wertsysteme $x_1 .. x_n$ der Veränderlichen durch Punkte (x) eines Raumes von n Dimensionen mit den Coordinaten $x_1 .. x_n$ repräsentiert zu denken, sodass eine Transformation sich darstellt als Transformation der Punkte dieses Raumes. Andererseits ist es aber auch nützlich, sich die Transformationen selbst als Individuen zu denken. Wir können uns jede Transformation T_a

$$x_i' = f_i(x_1 .. x_n, a_1 .. a_r) \quad (i = 1, 2 .. n)$$

durch einen Punkt (a) eines anderen Raumes von r Dimensionen mit den Coordinaten $a_1 .. a_r$ dargestellt denken. Wir nennen diesen Raum den Raum $(a_1 .. a_r)$. Die Gleichungen (1) stellen ∞^r verschiedene Transformationen dar, wenn in diesem Raume innerhalb der Umgebung eines Punktes (a) von allgemeiner Lage zu verschiedenen Bildpunkten stets verschiedene Transformationen gehören. So kann offenbar der Satz 1 des vorigen Paragraphen begrifflich gedeutet werden. (Vgl. auch § 1 des 6. Kap.)

Bildet nun, wie wir vorerst voraussetzen, die Schar (1) von ∞^r Transformationen eine Gruppe, so ist die Aufeinanderfolge zweier Transformationen T_a, T_b der Schar einer einzigen Transformation T_c der Schar äquivalent. T_a führe das Wertsystem $x_1 .. x_n$ oder also den Punkt (x) in den Punkt (x'), T_b ferner (x') in (x'') über. Wenn wir $b_1 .. b_r$ ändern, so muss sich — jedenfalls innerhalb einer gewissen Umgebung der Stelle (b) des Raumes $(a_1 .. a_r)$ — auch T_b und daher auch $T_a T_b = T_c$ ändern, weil sonst eben nicht alle r Parameter $a_1 .. a_r$ in (1) wesentlich wären. Es ist also möglich, durch Abänderung der b zu allen Transformationen in der Umgebung von T_c zu gelangen. Bei beliebiger Wahl von T_a und T_c ist es also, sobald nur T_c innerhalb der Umgebung einer Stelle allgemeiner Lage des Raumes $(a_1 .. a_r)$ liegt, immer möglich, T_b so zu bestimmen, dass $T_a T_b = T_c$ wird. Diese Betrachtung deckt sich mit dem zum Schluss des § 1 geführten Nachweis, dass die Functionen $\varphi_1 .. \varphi_r$ hinsichtlich $b_1 .. b_r$ von einander unabhängig sind.

Hieraus folgt weiter: Ist $T_{a+\delta a}$ eine T_a benachbarte Transformation, so existiert eine T_b benachbarte Transformation $T_{b+\delta b}$ derart, dass auch

$$T_{a+\delta a} T_{b+\delta b} = T_c$$

ist. Diese Variation der $a_1 .. a_r$ und $b_1 .. b_r$ wurde zu Beginn des jetzigen Paragraphen ausgeführt, indem $c_1 .. c_r$ festgehalten wurden und die Differentiation nach $a_1 .. a_r$ stattfand, wobei $b_1 .. b_r$ als Functionen der $a_1 .. a_r$ und der festen $c_1 .. c_r$ aufzufassen waren.

T_a führte die Punkte (x) in die Punkte (x') über. $T_{a+\delta a}$ wird die Punkte (x) in Punkte $(x' + \delta x')$ verwandeln. Also kann $T_{a+\delta a}$ ersetzt

Infinitesimale Transformation. werden durch die Aufeinanderfolge von T_a und einer passenden unendlich kleinen Transformation $S_{\delta a}$, die alle (x') in die $(x' + \delta x')$ überführt, sodass

$$T_a S_{\delta a} = T_{a+\delta a}$$

wird. Hieraus folgt nun auch:

$$S_{\delta a} = T_a^{-1} T_{a+\delta a}.$$

Wir erkennen durch ganz analoge Betrachtungen, dass auch

$$S_{\delta a} T_{b+\delta b} = T_b,$$

also:

$$S_{\delta a} = T_b T_{b+\delta b}^{-1}$$

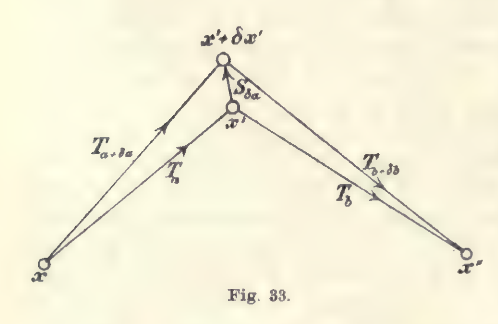


Fig. 33.

ist. Man vergleiche die Fig. 33, in der $S_{\delta a}$ die infinitesimale Transformation vorstellt, die die Punkte (x') nach den Stellen $(x' + \delta x')$ überführt. Für die infinitesimale Transformation $S_{\delta a}$ gewinnen wir somit zwei verschiedene Darstellungen, indem sich die Incremente, die sie den x' erteilt, in diesen beiden Arten ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i' &= \sum_1^r{}_k (x', a)\,\delta a_k \\ \delta x_i' &= \sum_1^r{}_k (x', b)\,\delta b_k \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Dabei bedeuten (x', a) und (x', b) Coefficienten, die von $x_1' \ldots x_n'$ und $a_1 \ldots a_r$ bez. $b_1 \ldots b_r$ abhängen, während $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ und $\delta b_1 \ldots \delta b_r$ die Incremente der Parameter bedeuten, für welche $T_{a+\delta a} T_{b+\delta b} = T_a T_b$ bleibt. Die $\delta b_1 \ldots \delta b_r$ sind also Functionen der $a_1 \ldots a_r$, $b_1 \ldots b_r$ und $\delta a_1 \ldots \delta a_r$:

$$\delta b_k = \sum_1^r{}_j (a, b)\,\delta a_j \qquad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Es kommt daher auch für $S_{\delta a}$:

$$\delta x_i' = \sum_1^r{}_j (x', b)(a, b)\,\delta a_j.$$

Da nun die $b_1 \ldots b_r$ von den $a_1 \ldots a_r$ und $\delta a_1 \ldots \delta a_r$ völlig unabhängig sind, so dürfen wir sie bestimmt wählen, wie dies in den Formeln (9) geschehen ist.

Nunmehr haben wir die Betrachtung umzukehren: Angenommen, es liegen ∞^r Transformationen T_a oder (1) vor, von denen wir nicht wissen, ob sie eine Gruppe bilden, von denen aber bekannt ist, dass sie die iden-

tische Transformation T_{a^0} enthalten und dass sie die Differentialgleichungen (9) erfüllen, d. h. es soll zu jeder T_a und $T_{a+\delta a}$ eine infinitesimale Transformation $S_{\delta a}$ construiert werden können, sodass

$$T_a S_{\delta a} = T_{a+\delta a}$$

und die Gesamtheit der $S_{\delta a}$ wegen der Form der Gleichungen (9) von $a_1 \,..\, a_r$ unabhängig ist, da die $a_1 \,..\, a_r$ in (9) nur in den von x' freien Factoren auftreten.

Lassen wir $\delta a_1 \,..\, \delta a_r$ alle infinitesimalen Werte annehmen, so erhalten wir alle Transformationen $T_{a+\delta a}$ in der Umgebung von T_a, und zwar jede nur einmal.

Gehen wir nun von einer bestimmten Transformation $T_{\bar{a}}$ der Schar (1) aus, so bestehen Gleichungen von der Form

$$T_{\bar{a}} S_{\delta a} = T_{\bar{a}+\delta a},$$
$$T_{\bar{a}+\delta a} S_{\delta a} = T_{\bar{a}+\delta a+\delta a_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Indem wir also zuerst eine Transformation $T_{\bar{a}}$, sodann unendlich oft eine bestimmte infinitesimale Transformation $S_{\delta a}$ ausführen, erhalten wir immer eine Transformation der Schar (1), sagen wir die Transformation T_a. Nun aber entsteht durch unendlichoftmalige Wiederholung von $S_{\delta a}$ eine Schar von ∞^1 Transformationen E_μ, die bekanntlich stets eine eingliedrige Gruppe bilden*). Wir erhalten also

Eingliedrige Gruppe.

$$T_{\bar{a}} E_\mu = T_a.$$

Wird nun insbesondere $T_{\bar{a}}$ als die identische Transformation T_{a^0} gewählt, so kommt links nur E_μ. Also gehört jede Transformation E_μ der Schar (1) an, es ist etwa:

$$E_\mu = T_\alpha, \tag{20}$$

sodass, wie zu beweisen war,

$$T_{\bar{a}} T_\alpha = T_a \tag{21}$$

ist. Noch ist einzusehen, dass auch die eingliedrige Gruppe von ∞^1 Transformationen E_μ, wenn $a_1 \,..\, a_r$ variiert werden, ∞^r Transformationen liefert, also T_α eine *beliebige* Transformation der Schar (1) ist. Es folgt dies daraus, dass zu jeder Transformation $T_{a+\delta a}$ in der Umgebung von T_a eine bestimmte infinitesimale Transformation $S_{\delta a}$ gehört**).

---

*) Den Begriff der von einer infinitesimalen Transformation erzeugten eingliedrigen Gruppe setzen wir als bekannt voraus. Vgl. die Fussnote zu Seite 28.

**) In seinem Werke über die Theorie der Transformationsgruppen hat Lie nur die erste Hälfte des ersten Fundamentalsatzes ausdrücklich als Satz formuliert. Die zweite Hälfte ist aber als Specialfall in einem Satze des Werkes enthalten (siehe Theorem 9, § 17 des Werkes). Mit der hier gegebenen Formulierung deckt sich einigermassen der erste von Herrn Schur formulierte Satz, der sich nur auf Gruppen mit der identischen Transformation bezieht und von ihm nur unter der Voraussetzung bewiesen wird, dass die n Summen $\sum_k \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_k}\,\delta a_k$ für $a = a^0$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Die obige Formel $T_{\bar{a}} E_\mu = T_a$ bedarf dieser beiden Voraussetzungen nicht, daher gilt sie auch für gemischte

§ 3. Der zweite Fundamentalsatz.

Es mögen wieder die n Gleichungen

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \,..\, x_n,\ a_1 \,..\, a_r) \qquad (i = 1,\ 2 \,..\, n)$$

eine Schar von ∞^r verschiedenen Transformationen darstellen, die eine Gruppe bilden. Nach dem ersten Teile des ersten Fundamentalsatzes bestehen dann infolge von (1) $r \cdot n$ Differentialgleichungen von der Form

$$(9) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j \psi_{jk}(a_1 \,..\, a_r)\, \xi_{ji}(x_1' \,..\, x_n')$$

$$(i = 1,\ 2 \,..\, n, \quad k = 1,\ 2 \,..\, r),$$

sowie ihre Auflösungen

$$(10) \qquad \xi_{ji}(x_1' \,..\, x_n') = \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a_1 \,..\, a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$$

$$(i = 1,\ 2 \,..\, n, \quad j = 1,\ 2 \,..\, r),$$

sodass die Determinante der ψ_{jk} oder der α_{jk} nicht identisch verschwindet.

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir die Gleichungen (1) nach $x_1' \,..\, x_n'$ auflösen. Dadurch mag sich ergeben:

$$(23) \qquad x_\lambda = F_\lambda(x_1' \,..\, x_n',\ a_1 \,..\, a_r) \qquad (\lambda = 1,\ 2 \,..\, n).$$

Betrachten wir wie bisher die x' als die Functionen (1) der x und a, so giebt die Differentiation von (23) nach a_k:

$$0 = \sum_1^n {}^i \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} + \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial a_k}.$$

Multiplicieren wir diese Relation mit α_{jk} und setzen wir $k = 1, 2 \,..\, r$, so ergeben sich r Gleichungen und als ihre Summe:

$$0 = \sum_1^n {}^i \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial x_i'} \sum_1^r {}^k \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} \alpha_{jk}(a) + \sum_r^r {}^k \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial a_k} \alpha_{jk}(a)$$

oder wegen (10):

$$\sum_1^n {}^i \xi_{ji}(x') \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial x_i'} + \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial a_k} = 0$$

$$(j = 1,\ 2 \,..\, r).$$

(aus einzelnen continuierlichen Scharen bestehende) Gruppen. Schur's Beweis des ersten Teiles des Satzes ist im Grunde eine speciellere Fassung des Lie'schen Beweises. Für den zweiten Teil giebt Schur in seiner zweiten Abhandlung einen sehr einfachen und analytisch eleganten Beweis, jedoch nur unter Benutzung des nicht so elementaren Begriffes der Parametergruppe.

Diese Gleichungen müssen nun bestehen nicht nur infolge von (1), sondern an sich, da sie $x_1 \, .. \, x_n$ gar nicht enthalten. Mithin sind $F_1 \, .. \, F_n$ sämtlich gemeinsame Lösungen f der r linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(24)} \qquad \sum_1^n {}^i \, \xi_{ji}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} + \sum_1^r {}^k \, \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

$$(j = 1, 2 \, .. \, r),$$

die augenscheinlich von einander unabhängig sind, da die Determinante der α_{jk} nicht Null ist.

Diese Differentialgleichungen lassen sich, wenn von der symbolischen Bezeichnungsweise der Differentialausdrücke

Symbole $X'f$ und Af für Differentialausdrücke.

$$\text{(25)} \qquad X_j'f \equiv \sum_1^n {}^i \, \xi_{ji}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'}, \qquad A_j f \equiv \sum_1^r {}^k \, \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k}$$

$$(j = 1, 2 \, .. \, r)$$

Gebrauch gemacht wird, kürzer so schreiben:

$$\text{(24')} \qquad X_j'f + A_j f = 0 \qquad (j = 1, 2 \, .. \, r).$$

Offenbar sind die n Functionen $F_1 \, .. \, F_n$ von $x_1' \, .. \, x_n'$, $a_1 \, .. \, a_r$ von einander unabhängig, da die Gleichungen (23) nach $x_1' \, .. \, x_n'$ in der Form (1) auflösbar sind. Aber r von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen (24') in $n + r$ Veränderlichen $x_1' \, .. \, x_n'$, $a_1 \, .. \, a_r$ besitzen dann und nur dann r von einander unabhängige gemeinsame Lösungen, wenn sie ein *r-gliedriges vollständiges System* bilden. Dies aber tritt bekanntlich dann und nur dann ein, wenn die sogenannte *Klammeroperation* aus (24') keine von diesen Gleichungen unabhängige Gleichung abzuleiten gestattet. Die Klammerausdrücke aber sind diese:

r-gliedriges vollständig. System.

Klammeroperation.

$$X_j'(X_\nu'f + A_\nu f) + A_j(X_\nu'f + A_\nu f) -$$
$$- X_\nu'(X_j'f + A_j f) - A_\nu(X_j'f + A_j f)$$

oder kürzer, da die $X'f$ von $a_1 \, .. \, a_r$ und die Af von $x_1 \, .. \, x_n$ frei sind:

$$X_j'(X_\nu'f) - X_\nu'(X_j'f) + A_j(A_\nu f) - A_\nu(A_j f)$$

oder, indem wir eine uns bekannte Bezeichnungsweise benutzen:

$$(X_j'X_\nu') + (A_j A_\nu) \quad (j, \nu = 1, 2 \, .. \, r).$$

Wir haben also gefunden, dass diese Klammerausdrücke durch die linken Seiten der Differentialgleichungen (24') linear ausdrückbar sein müssen:

$$(X_j' X_\nu') + (A_j A_\nu) \equiv \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{j\nu s}(x_1' \ldots x_n', \; a_1 \ldots a_r)(X_s' f + A_s f)$$

$$(j, \; \nu = 1, \; 2 \ldots r).$$

Hieraus folgt einzeln, da $(X_j' X_\nu')$ nur die Differentialquotienten von f nach $x_1' \ldots x_n'$ und $(A_j A_\nu)$ nur die nach $a_1 \ldots a_r$ enthält:

Relationen zwischen d. Klammerausdrücken.

$$(26) \quad (X_j' X_\nu') \equiv \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{j\nu s}(x', \; a) X_s' f, \qquad (A_j A_\nu) \equiv \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{j\nu s}(x', \; a) A_s f$$

$$(j, \; \nu = 1, \; 2 \ldots r).$$

Diese Relationen müssen also identisch bestehen für alle Werte von $x_1' \ldots x_n'$, $a_1 \ldots a_r$ und alle Functionen f von diesen Grössen. Insbesondere müssen daher die Coefficienten der Differentialquotienten von f einzeln verschwinden. In der zweiten Gleichung aber hat $\frac{\partial f}{\partial a_\mu}$ links den Coefficienten

$$A_j \alpha_{\nu\mu} - A_\nu \alpha_{j\mu},$$

rechts den Coefficienten $\Sigma \vartheta_{j\nu s} \alpha_{s\mu}$. Demnach ist:

$$A_j \alpha_{\nu\mu} - A_\nu \alpha_{j\mu} \equiv \sum_1^r {}_s\, \vartheta_{j\nu s}(x', \; a)\, \alpha_{s\mu}$$

$$(j, \; \nu, \; \mu = 1, \; 2 \ldots r).$$

Unter $A_j \alpha_{\nu\mu}$ ist hierbei natürlich der Ausdruck $A_j f$ für $f \equiv \alpha_{\nu\mu}$ zu verstehen. In diesen letzten Gleichungen kommen aber links $x_1' \ldots x_n'$ gar nicht vor, ebenso nicht rechts in den $\alpha_{s\mu}$, deren Determinante nicht identisch verschwindet. Lassen wir also nun μ alle Ziffern von 1 bis r durchlaufen, so ergiebt die Auflösung der so erhaltenen n Gleichungen nach $\vartheta_{j\nu 1} \cdots \vartheta_{j\nu r}$, dass die ϑ von $x_1' \ldots x_n'$ frei sind. Aber sie sind auch von $a_1 \ldots a_r$ frei. Denn aus den ersten Relationen (26) folgt jetzt durch Differentiation nach a_k, das links gar nicht auftritt:

$$0 \equiv \sum_1^r {}_s\, \frac{\partial \vartheta_{j\nu s}(a)}{\partial a_k} X_s' f.$$

Diese Gleichung zerfällt nach (25) in die n einzelnen:

$$\frac{\partial \vartheta_{j\nu 1}}{\partial a_k} \xi_{1i}(x') + \frac{\partial \vartheta_{j\nu 2}}{\partial a_k} \xi_{2i}(x') + \cdots + \frac{\partial \vartheta_{j\nu r}}{\partial a_k} \xi_{ri}(x') \equiv 0$$

$$(i = 1, \; 2 \ldots n).$$

Nun aber bestehen nach dem ersten Fundamentalsatz zwischen den $\xi(x')$ keine n Relationen von dieser Form mit constanten Coefficienten, also auch keine mit Coefficienten, die mit den in den $\xi(x')$ gar nicht vorkommenden $a_1 \ldots a_r$ behaftet sind. Folglich ist allgemein:

$$\frac{\partial \vartheta_{j\nu s}}{\partial a_k} \equiv 0 \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r),$$

d. h. die ϑ sind frei von $a_1 \,.\,.\, a_r$, sie sind mithin ganz bestimmte Constanten. Wir wollen deshalb allgemein

$$\vartheta_{j\nu s} = c_{j\nu s} \quad (j, \nu, s = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

setzen, sodass wir aus (26) erhalten:

Schliessliche Form dieser Relationen.

$$(27) \qquad (X_j' X_\nu') \equiv \sum_1^r {}^s c_{j\nu s} X_s' f, \quad (A_j A_\nu) \equiv \sum_1^r {}^s c_{j\nu s} A_s f$$
$$(j, \nu = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Umkehrung.

Nunmehr werden wir wieder die Betrachtung *umkehren* und folgende Voraussetzungen zu Grunde legen:

Es mögen $2r$ Differentialausdrücke von der Form

$$(25) \qquad X_j' f \equiv \sum_1^n {}^i \xi_{ji}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'}, \quad A_j f \equiv \sum_1^r {}^k \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k}$$
$$(j = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

vorliegen, zwischen denen keine Relation von der Form besteht:

$$e_1 X_1' f + \cdots + e_r X_r' f = 0,$$

in der $e_1 \,.\,.\, e_r$ Constanten sind. Auch soll die Determinante der $\alpha_{jk}(a)$ nicht identisch Null sein. Wohl aber sollen diese Ausdrücke die Relationen von der Form:

$$(27) \qquad (X_j' X_\nu') \equiv \sum_1^r {}^s c_{j\nu s} X_s' f, \quad (A_j A_\nu) \equiv \sum_1^r {}^s c_{j\nu s} A_s f$$
$$(j, \nu = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

erfüllen, in denen die $c_{j\nu s}$ gewisse Constanten bedeuten.

Bei diesen Annahmen bilden die r linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(24') \qquad X_j' f + A_j f = 0 \quad (j = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

ein r-gliedriges vollständiges System in $n + r$ Veränderlichen $x_1' \,.\,.\, x_n'$, $a_1 \,.\,.\, a_r$. Sind $a_1^0 \,.\,.\, a_r^0$ solche Werte von $a_1 \,.\,.\, a_r$, für welche die Determinante der $\alpha_{jk}(a^0)$ weder Null noch Unendlich ist, so besitzt dieses System bekanntlich $(n + r) - r$, also n von einander unabhängige Lösungen $f = F_1, F_2 \,.\,.\, F_n$, die sich für $a_1 = a_1^0, \,.\,.\, a_r = a_r^0$ auf $x_1' \,.\,.\, x_n'$ reducieren. Setzen wir dann die n Gleichungen an:

$$(23) \qquad x_\lambda = F_\lambda(x_1' \,.\,.\, x_n', a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (\lambda = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

so stellen ihre Auflösungen nach $x_1' \,.\,.\, x_n'$:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \,..\, x_n,\ a_1 \,..\, a_r) \quad (i = 1,\ 2 \,..\, n)$$

wie wir beweisen werden, ∞^r verschiedene Transformationen der x in die x' dar, die eine Gruppe bilden, welche die identische Transformation enthält.

Nachweis der Gruppe.

Um diesen Beweis zu führen, bemerken wir, dass zunächst, da die F die Gleichungen (24′) erfüllen, nach (25)

$$(28) \qquad \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji}(x') \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial x_i'} + \sum_1^r {}^k\, \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial a_k} \equiv 0$$

$$(\lambda = 1,\ 2 \,..\, n, \quad j = 1,\ 2 \,..\, r)$$

ist. Andererseits sind die Gleichungen (23) gerade nach $x_1' \,..\, x_n'$ auflösbar, denn $F_1 \,..\, F_n$ reducieren sich ja für $a_1 = a_1^0,\ ..\, a_r = a_r^0$ auf $x_1' \,..\, x_n'$. Wir können mithin $x_1' \,..\, x_n'$ als die durch (23) definierten Functionen von $x_1 \,..\, x_n$ und $a_1 \,..\, a_r$ auffassen und erhalten durch Differentiation von (23) nach a_k:

$$0 = \sum_1^n {}^i \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} + \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial a_k}.$$

Multiplicieren wir diese Gleichung mit α_{jk} und summieren wir dann über k von 1 bis r, so kommt nach (28):

$$\sum_1^r {}^i \frac{\partial F_\lambda(x', a)}{\partial x_i'} \left(\sum_1^r {}^k\, \alpha_{jk} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} - \xi_{ji}(x') \right) = 0$$

$$(\lambda = 1,\ 2 \,..\, n, \quad j = 1,\ 2 \,..\, r)$$

und also, da die Functionaldeterminante der F nach $x_1' \,..\, x_n'$ nicht identisch Null ist:

$$\sum_1^r {}^k\, \alpha_{jk} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} - \xi_{ji}(x') = 0$$

$$(j = 1,\ 2 \,..\, r, \quad i = 1,\ 2 \,..\, n).$$

Dies aber sind die Gleichungen (III) unseres ersten Fundamentalsatzes. Sie sind wie jene nach den $\frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$ auflösbar, da die Determinante der α_{jk} nicht identisch Null ist. Daher kommen durch Auflösung die Relationen (II) des ersten Fundamentalsatzes:

$$(29) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_1^r {}^j\, \psi_{jk}(a_1 \,..\, a_r)\, \xi_{ji}(x_1' \,..\, x_n')$$

$$(i = 1,\ 2 \,..\, n, \quad k = 1,\ 2 \,..\, r).$$

Die Auflösungen (1) der Gleichungen (23) erfüllen also diese mehrfach erwähnten Differentialgleichungen identisch. Auch stellen diese Gleichungen (1) gerade ∞^r verschiedene Transformationen von $x_1 \dots x_n$ in $x_1' \dots x_n'$ dar, weil sonst nach Satz 1 des § 1 die $x_1' \dots x_n'$ Relationen von der Form

$$\sum_1^r {}_k \chi_k(a_1 \dots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

erfüllen würden, in denen $\chi_1 \dots \chi_r$ nicht sämtlich Null wären, und also nach (29) auch die Relationen:

$$\sum_1^r {}_j \left(\sum_1^r {}_k \chi_k(a) \psi_{jk}(a) \right) \xi_{ji}(x') = 0$$
$$(i = 1, 2 \dots n).$$

Da aber nach Voraussetzung keine Relation

$$e_1 X_1' f + \dots + e_r X_r' f = 0$$

mit constanten Coefficienten oder also mit von $x_1' \dots x_n'$ freien Coefficienten $e_1 \dots e_r$ besteht, demnach auch keine n Relationen:

$$\sum_1^r {}_j e_j \xi_{ji}(x') = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

bestehen, so müsste einzeln

$$\sum_1^r {}_k \chi_k(a) \psi_{jk}(a) \equiv 0 \quad (j = 1, 2 \dots r)$$

sein. Aber die Determinante der ψ_{jk} ist wie die der α_{jk} nicht identisch Null. Es würde also doch folgen, dass jede Function χ_k einzeln Null wäre.

Die Auflösungen (1) der Gleichungen (23) stellen folglich ∞^r verschiedene Transformationen dar, die den Differentialgleichungen (II) und (III) des ersten Fundamentalsatzes genügen. Auch enthält die Schar dieser Transformationen für $a_1 = a_1^0, \dots a_r = a_r^0$ die identische, und die Determinante der $\alpha_{jk}(a^0)$ ist von Null und Unendlich verschieden. Aus jenem ersten Fundamentalsatze folgt daher, dass die Schar (1) von ∞^r Transformationen eine *Gruppe* bildet.

Wir finden also: **Ergebnis.**

Satz 3: *Bilden die n Gleichungen*

(I) $$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

eine Gruppe mit ∞^r verschiedenen Transformationen und bestehen daher Relationen von der Form

$$\text{(III)} \qquad \xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') = \sum_1^r{}^k \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$$
$$(i = 1, 2 \cdots n, \quad j = 1, 2 \ldots r),$$

so erfüllen die Differentialausdrücke

$$\text{(IV)} \qquad X_j' f \equiv \sum_1^n{}^i \xi_{ji}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'}, \quad A_j f \equiv \sum_1^r{}^k \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k}$$
$$(j = 1, 2 \ldots r)$$

paarweise Bedingungen von der Form:

$$\text{(V)} \qquad (X_j' X_\nu') \equiv \sum_1^r{}^s c_{j\nu s} X_s' f, \quad (A_j A_\nu) \equiv \sum_1^r{}^s c_{j\nu s} A_s f$$
$$(j, \nu = 1, 2 \ldots r),$$

in denen die $c_{j\nu s}$ *Constanten sind. Auch besteht dann keine Relation von der Form*

$$e_1 X_1' f + e_2 X_2' f + \cdots + e_r X_r' f \equiv 0,$$

in der die $e_1 \ldots e_r$ *Constanten bedeuten, und die Determinante der* α_{jk} *ist nicht identisch Null.*

Sind andererseits $2r$ *Differentialausdrücke* $X_j' f$ *und* $A_j f$ *von der Form* (IV) *vorgelegt, sodass keine Relation*

$$\sum_1^r{}^j e_j X_j' f \equiv 0$$

mit constanten $e_1 \ldots e_r$ *besteht und die Determinante der* $\alpha_{jk}(a)$ *nicht identisch Null ist, während sie paarweis Relationen von der Form* (V) *erfüllen, so giebt es eine Gruppe von* ∞^r *verschiedenen Transformationen*

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n, \; a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

die in den angegebenen Beziehungen zu diesen Differentialausdrücken steht und die identische Transformation enthält.

Vereinfachung der Voraussetzungen.

Man kann die Voraussetzungen des zweiten Teiles dieses Satzes aber noch erheblich verringern. Sobald nämlich nur die Ausdrücke $X_1' f \ldots X_r' f$ vorliegen, deren Klammerausdrücke die Form (V) besitzen, ist es immer möglich, Ausdrücke $A_1 f \ldots A_r f$ von der in jenen Voraussetzungen angegebenen Form zu construieren, sodass also die Existenz der $X'f$ die der Af nach sich zieht.

Bestimmung der Af aus den $X'f$.

Um solche Ausdrücke herzustellen, verfahren wir so: Wir erteilen in den gegeben gedachten Differentialausdrücken

$$X_j' f \equiv \sum_1^n{}^i \xi_{ji}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

den Veränderlichen $x_1'..x_n'$ zunächst allgemeine Werte $x_1^{(1)}..x_n^{(1)}$, dann allgemeine Werte $x_1^{(2)}..x_n^{(2)}$, darauf allgemeine Werte $x_1^{(3)}..x_n^{(3)}$ u. s. w., endlich allgemeine Werte $x_1^{(r)}..x_n^{(r)}$ und bezeichnen die zugehörigen X_jf mit $X_j^{(1)}f, X_j^{(2)}f, X_j^{(3)}f...X_j^{(r)}f$, während wir noch setzen:

$$X_j^{(1)}f + X_j^{(2)}f + \cdots + X_j^{(r)}f \equiv W_jf \quad (j = 1, 2..r).$$

Sicher besteht nun zwischen $W_1f..W_rf$ keine Relation von der Form:

$$\sum_1^r{}_j \chi_j(x_1^{(1)}..x_n^{(1)}, \ldots x_1^{(r)}..x_n^{(r)})\, W_jf \equiv 0.$$

Wir können diese Behauptung auf folgende Weise darthun. Besteht doch eine solche Relation, so bestehen auch identisch die $r \cdot n$ Relationen:

$$\chi_1 \xi_{1i}(x^{(\varkappa)}) + \chi_2 \xi_{2i}(x^{(\varkappa)}) + \cdots + \chi_r \xi_{ri}(x^{(\varkappa)}) = 0 \tag{30}$$
$$(i = 1, 2..n, \quad \varkappa = 1, 2..r).$$

Für $\varkappa = 1$ sind dies n Gleichungen für $\chi_1..\chi_r$. Wenn alle r-reihigen Determinanten ihrer Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^{(1)}) & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{r1}(x^{(1)}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{1n}(x^{(1)}) & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_{rn}(x^{(1)}) \end{vmatrix}$$

verschwänden — was wir nicht wissen —, so wäre mindestens eine dieser Gleichungen eine Folge der anderen. Allgemein werden ν_1 dieser Gleichungen von einander unabhängig sein, während die $n - \nu_1$ übrigen aus ihnen folgen. Alsdann ist sicher ν_1 mindestens gleich 1.

Für $\varkappa = 2$ stellt (30) wieder n Gleichungen für $\chi_1..\chi_r$ dar. Sie können nicht sämtlich Folgen der Gleichungen für $\varkappa = 1$ sein, da sich sonst diese neuen Gleichungen durch Functionen $\chi_1..\chi_r$ befriedigen liessen, die von $x_1^{(2)}..x_n^{(2)}$ frei wären, sodass auch Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r{}_j e_j \xi_{ji}(x^{(2)}) = 0 \quad (i = 1, 2..n),$$

beständen, was in unserem Satz 3 besonders ausgeschlossen wurde.

Es seien daher unter den n Gleichungen (30) für $\varkappa = 2$ gerade ν_2, die von den n Gleichungen (30) für $\varkappa = 1$ und von einander unabhängig sind, sodass ν_2 mindestens gleich 1 ist. Diesen Schluss setzen wir fort und finden: Wir erhalten in der Schar (30) $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r$ unabhängige Gleichungen, wobei jede Zahl ν mindestens gleich 1 sein muss. Es ergeben sich darum sicher r in $\chi_1..\chi_r$ lineare homogene Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante. $\chi_1..\chi_r$ sind darum sämtlich Null.

Hiermit ist bewiesen, dass zwischen $W_1 f$, $W_2 f \dots W_r f$ keine lineare Relation besteht. Da nun jedes

$$(X_j' X_\nu') \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s' f$$

sein soll, so folgt sofort aus:

$$(W_j W_\nu) \equiv (X_j^{(1)} X_\nu^{(1)}) + \cdots + (X_j^{(r)} X_\nu^{(r)}),$$

dass auch jedes

$$(W_j W_\nu) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{j\nu s} W_s f$$

ist. Die r von einander unabhängigen Gleichungen:

$$W_1 f = 0, \quad \dots W_r f = 0$$

bilden somit ein r-gliedriges vollständiges System in rn Veränderlichen $x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)}, \dots x_1^{(r)} \dots x_n^{(r)}$. Es besitzt $rn - r$ von einander unabhängige Lösungen $u_1, u_2 \dots u_{rn-r}$.

Sie sind unabhängig von einander hinsichtlich gewisser $r \cdot n - r$ unserer rn Variabeln. Die übrigen r Variabeln seien mit $y_1 \dots y_r$ bezeichnet. Alsdann wollen wir $y_1 \dots y_r$, $u_1 \dots u_{rn-r}$ als Veränderliche in die Wf einführen, d. h. darin f als Function dieser Grössen betrachten und somit die in den Wf vorkommenden Differentialquotienten von f nach den früheren Veränderlichen durch die nach den neuen ausdrücken. Da jedes $W_j u_\lambda \equiv 0$ ist, so kommen dann Ausdrücke von der Gestalt:

$$W_j f = \sum_1^r {}_k\, \omega_{jk}(y_1 \dots y_r,\ u_1 \dots u_{rn-r}) \frac{\partial f}{\partial y_k} \quad (j = 1,\ 2 \dots r).$$

Nach wie vor besteht zwischen ihnen keine lineare Relation, und nach wie vor ist allgemein

$$(W_j W_\nu) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{j\nu s} W_s f.$$

Man bemerkt aber, dass die Bildung der Klammerausdrücke jetzt nur Differentationen nach $y_1 \dots y_r$ verlangt, also nicht gestört wird, wenn den Grössen $u_1 \dots u_{rn-r}$ allgemeine aber feste Werte beigelegt werden, sodass die ω_{jk} nur noch von $y_1 \dots y_r$ abhängen.

Wir sehen also ein, dass sich r Ausdrücke

$$W_j f = \sum_1^r {}_k\, \omega_{jk}(y_1 \dots y_r) \frac{\partial f}{\partial y_k} \quad (j = 1,\ 2 \dots r)$$

construieren lassen, zwischen denen keine Relation von der Form

$$\varphi_1(y) W_1 f + \cdots + \varphi_r(y) W_r f = 0$$

besteht, und für die jedes

$$(W_j W_\nu) = \sum_1^r {}_s c_{j\nu s} W_s f$$

ist. Die erste Eigenschaft lässt sich auch so aussprechen: Die Determinante der $\omega_{jk}(y)$ ist nicht identisch Null.

Bezeichnen wir $y_1 \ldots y_r$ schliesslich mit $a_1 \ldots a_r$, so haben wir r Differentialausdrücke vor uns von der Beschaffenheit der früheren $A_1 f \ldots A_r f$. Die Existenz solcher Af folgt somit aus der Existenz der $X'f$.

Hiernach lässt sich unser Satz erheblich einfacher aussprechen. Um ihn nun in der für die Gruppentheorie bequemsten Form auszusprechen, führen wir den Begriff einer *infinitesimalen Transformation* ein*). Wir haben nämlich die endlichen Gleichungen der zu den $X_j'f$ und $A_j f$ gehörigen Gruppe mit identischer Transformation durch Integration des simultanen Systems (24') erhalten und bemerken dabei, dass zu jeder Gruppe ganz bestimmte $X_j'f$ und $A_j f$ wie auch umgekehrt zu den $X_j'f$ und $A_j f$ eine ganz bestimmte Gruppe mit identischer Transformation gehört. Andererseits bemerkten wir schon in § 2, dass zu dem System von Differentialgleichungen

$$\xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') = \sum_1^r {}_k \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}$$

$$(i = 1, 2 \ldots n, \quad j = 1, 2 \ldots r)$$

nur eine bestimmte Gruppe mit identischer Transformation gehört. Da diese Differentialgleichungen in ebenfalls eindeutiger Beziehung zu den $X_j'f$ und $A_j f$ stehen, so folgt also, dass die Integrationsmethoden des § 2 wie des § 3 zu genau derselben Gruppe mit identischer Transformation führen.

Nach § 2 können wir diese Gruppe durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_j e_j \xi_{ji}(x_1' \ldots x_n') \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{31}$$

---

*) Wir unterlassen nicht, hervorzuheben, dass wir diesen Begriff streng genommen *nicht* nötig haben, um den zweiten Fundamentalsatz auszusprechen. Die obige Einführung dieses Begriffes soll daher, obgleich wir ihre dem Leser naheliegende tiefere Bedeutung oben andeuten, nur *rein formal* verstanden werden als bequeme abkürzende Ausdrucksweise.

mit den Anfangswerten $x_1 \ldots x_n$ von $x_1' \ldots x_n'$ für $t = t_0$ oder etwa $t = 0$ finden. Dabei treten $e_1 t, e_2 t \ldots e_r t$ als die Parameter der Gruppe auf. Dies simultane System steht in engem Zusammenhang mit den $X_j'f$. Es erteilt nämlich einer Function f von $x_1' \ldots x_n'$ gerade das Increment $\Sigma e_j X_j' f \cdot dt$. Wir nennen nun

$$X_j f \equiv \sum_1^n{}^i \xi_{ji}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Symbol einer inf. Transform.

das Symbol einer infinitesimalen Transformation, nämlich derjenigen, die einer beliebigen Function f von $x_1 \ldots x_n$ einen unendlich kleinen Zuwachs $X_j f \cdot \delta t$, also x_i den Zuwachs

$$\delta x_i = \xi_{ji}(x_1 \ldots x_n) \,.\, \delta t$$

erteilt. Alsdann kann die Integration des Systems (31) als das Ergebnis einer unendlich oft ausgeführten infinitesimalen Transformation $\Sigma e_j X_j f$ aufgefasst werden, bei der die $x_1 \ldots x_n$ schliesslich in $x_1' \ldots x_n'$ übergehen. Wir drücken daher den Zusammenhang der Gruppe mit dem simultanen System (31) dadurch aus, dass wir sagen: *Die Gruppe ist von den infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_j X_j f$ erzeugt.* In diesen bedeuten $e_1 \ldots e_r$ beliebige Constanten, deren Verhältnisse allein offenbar in Betracht kommen. $\Sigma e_j X_j f$ stellt also gerade ∞^{r-1} infinitesimale Transformationen dar, da ja nach dem ersten Fundamentalsatz keine Relation besteht von der Form:

Gruppe erzeugt von infinitesim. Transformationen.

$$\Sigma e_j X_j f \equiv 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden constanten Coefficienten $e_1 \ldots e_r$. Da keine solche Beziehung besteht, so nennen wir $X_1 f \ldots X_r f$ *von einander unabhängige infinitesimale Transformationen.*

Unabhängigkeit von inf. Transformationen.

Wir machen endlich noch darauf aufmerksam, dass die durch Integration von (31) hervorgehende Gruppe ausser der identischen auch zu jeder ihrer Transformationen die inverse enthält. Zur Transformation

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n,\ e_1 t \ldots e_r t) \quad (i = 1,\ 2 \ldots r),$$

die (31) erfüllt, ist nämlich die Transformation

$$x_i = f_i(x_1' \ldots x_n',\ -e_1 t,\ \ldots -e_r t) \quad (i = 1,\ 2 \ldots r)$$

invers, die auch (31) erfüllt, wenn in (31) $e_1 \ldots e_r$ mit $-e_1 \ldots -e_r$ bezeichnet werden.

Nun sprechen wir den zweiten Fundamentalsatz in der uns als „*Hauptsatz*“ aus der Ebene von früher her vertrauteren Form aus:

Zweiter Fundamentalsatz.

Zweiter Fundamentalsatz: *r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_i f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{i\nu}(x_1 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

erzeugen dann und nur dann eine r-gliedrige Gruppe, wenn die $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ paarweis Relationen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

mit constanten Coefficienten c_{iks} erfüllen. Diese Gruppe enthält die identische und paarweis inverse Transformationen).*

Synthetische Ableitung des zweiten Fundamentalsatzes.

Es ist möglich, durch wesentlich *synthetische* Betrachtungen den zweiten Fundamentalsatz zu beweisen. Dies soll hier in Kürze angedeutet werden. Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass der obige analytische Beweis im Grunde genommen denselben Gang einschlägt.

Andere Definition einer Gruppe.

Zunächst bemerken wir, dass wir die *Definition einer Gruppe mit identischer Transformation* in einer neuen Weise aussprechen können. ∞^r verschiedene Transformationen $T_a \ldots$ bilden bekanntlich eine Gruppe, wenn die Aufeinanderfolge $T_a T_b$ auch stets eine Transformation T_c dieser Schar ist. Die $T_a T_b$ hängen also dann auch nur von r wesentlichen Parametern ab. Wenn umgekehrt die $T_a T_b$ nur von r wesentlichen Parametern abhängen und in der Schar T_a die identische Transformation T_{a^0} enthalten ist, so gehört zunächst zur Schar der $T_a T_b$ auch die der $T_a T_{a^0}$ oder also die aller T_a. Da beide Scharen von r Parametern abhängen, sind sie dann identisch, d. h. jede Aufeinanderfolge $T_a T_b$ ist eine T_c. Also:

Satz 4: *Eine Schar von ∞^r Transformationen $T_a \ldots$, welche die identische Transformation enthält, bildet dann und nur dann eine Gruppe, wenn auch alle Transformationen $T_a T_b$ nur von r wesentlichen Parametern abhängen.*

Transformationen von m-Ecken.

Wir stellen nunmehr folgende Betrachtung an: Ein Inbegriff von m Punkten eines Raumes von n Dimensionen mit den Coordinaten $x_1 \,.\,.\, x_n$ sei ein m-Eck genannt. Es möge eine Schar von ∞^r Transformationen T_a vorliegen:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\; a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Indem wir sie als Transformationen der Punkte (x) des ebengenannten Raumes in die Punkte (x') dieses Raumes deuten, finden wir, dass die T_a jedes m-Eck dieses Raumes in neue m-Ecke überführen. Es soll im Folgenden immer nur von m-Ecken allgemeiner Lage die Rede sein.

Ein einzelnes m-Eck nimmt bei unseren ∞^r Transformationen (1) höchstens ∞^r Lagen an. Zunächst fragen wir uns, was im Besonderen geschlossen werden kann, wenn ein m-Eck und ein $(m+1)$-Eck allgemeiner Lage beide gleichviel, etwa ∞^ϱ Lagen bei Ausführung aller Transformationen T_a annehmen. Dabei ist nach dem eben Bemerkten $\varrho \leqq r$ zu

*) Der von Herrn Schur für diesen Lie'schen Satz gegebene Beweis unterscheidet sich nicht wesentlich von dem Lie'schen Beweise.

setzen. Da das m-Eck bei allen ∞^r Transformationen nur ∞^ϱ Lagen annimmt, so wird es jedesmal von $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen in dieselbe neue Lage gebracht. Möge das $(m+1)$-Eck $p_1 \dots p_{m+1}$ also bei gewissen $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen der Schar (1) in das $(m+1)$-Eck $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_{m+1}$ übergehen. Bei eben diesen $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen geht das m-Eck allgemeiner Lage $p_1 \dots p_m$ in dasselbe m-Eck $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_m$ über. Jene $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen T also, die $p_1 \dots p_m$ nach $\bar{p}_1 \dots \bar{p}_m$ führen, bringen auch jeden Punkt p_{m+1} des Raumes nach nur einer neuen Stelle $\bar{p}_{m+1}$ hin. Daher führen alle diese $\infty^{r-\varrho}$ Transformationen die Punkte des Raumes in gleicher Weise in neue Punkte über, d. h. sie reducieren sich auf nur eine. Es ist demnach $\varrho = r$. Somit folgt:

Satz 5: *Erteilt eine Schar von ∞^r Transformationen einem m-Eck und einem $(m+1)$-Eck allgemeiner Lage gleichviele und zwar ∞^ϱ verschiedene Lagen, so ist $\varrho = r$.*

Ein m-Eck erhält sicher nicht mehr Lagen als ein $(m+1)$-Eck. Insbesondere ein 1-Eck erhält mindestens ∞^1 Lagen. Wenn ein 2-Eck nur ∞^1 Lagen annimmt, so gilt dasselbe vom 1-Eck, und es ist nach unserem Satze $r = 1$. Ist $r > 1$, so nimmt folglich ein 2-Eck mindestens ∞^2 Lagen an. Erhält ein 3-Eck dann nur ∞^2, so gilt dasselbe vom 2-Eck, und es ist nach unserem Satze $r = 2$, u. s. w. So folgt: Ist $r > m$, so nimmt ein m-Eck sicher mindestens ∞^m Lagen bei den T an. Andererseits wissen wir, dass es höchstens ∞^r Lagen erhalten könnte. Daher muss es eine Zahl $m \leq r$ geben, sodass ein m-Eck gerade ∞^r Lagen erhält. Dasselbe gilt dann vom $(m+1)$-Eck u. s. w., also auch vom r-Eck.

Transform. eines r-Ecks.

Satz 6: *Eine Schar von ∞^r Transformationen erteilt einem r-Eck gerade ∞^r verschiedene Lagen.*

Jedes $(r+k)$-Eck erhält also offenbar auch gerade ∞^r verschiedene Lagen.

Transform. eines $(r+1)$-Ecks.

Fassen wir nun ein $(r+1)$-Eck ins Auge und betrachten wir die Lagen, die es bei allen Aufeinanderfolgen $T_a T_b$ unserer Transformationen erhält. Erteilen die $T_a T_b$ ihm gerade ∞^r Lagen (weniger können es nicht sein), so erteilen sie auch einem r-Eck gerade ∞^r Lagen, da dies schon bei den T_a selbst ∞^r Lagen erhält. Besteht die Schar der $T_a T_b$ aus ∞^s Transformationen, so folgt also aus Satz 5, wenn darin s für r, r für m und r für ϱ gesetzt wird, dass die Zahl $r = s$ ist: die Schar der $T_a T_b$ besteht dann aus gerade ∞^r Transformationen.

Wenn dagegen die $T_a T_b$ einem $(r+1)$-Eck mehr als ∞^r Lagen geben, so ist natürlich die Zahl der Transformationen $T_a T_b$ grösser als ∞^r.

Um hieraus einen neuen Satz zu formulieren, bemerken wir noch: Ein $(r+1)$-Eck nimmt bei Ausführung der T_a selbst ∞^r Lagen an. Wenn es bei den $T_a T_b$ nicht mehr Lagen erhält, so ist die Schar der ∞^r $(r+1)$-Ecke, in die es bei den T_a übergeht, gegenüber jeder Transformation T_b invariant. Dies lässt sich auch umkehren. Somit ergiebt sich mit Rücksicht auf Satz 4:

Satz 7: *Eine Schar von ∞^r Transformationen T_a, welche die identische Transformationen enthält, bildet eine r-gliedrige Gruppe dann und nur dann, wenn alle $(r+1)$-Ecke sich in Scharen von je ∞^r $(r+1)$-Ecken*

in solcher Weise verteilen, dass jede dieser Scharen für sich bei allen Transformationen T_a invariant bleibt.

Analytische Übertragung des Ergebnisses.

Betrachten wir jetzt als Schar der T_a alle endlichen Transformationen, die von ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r e_j X_j f \equiv \sum_1^r j \sum_1^n i\, e_j \xi_{ji}(x_1 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

erzeugt werden, d. h. die sich ergeben durch Integration des früheren simultanen Systems (31). Wir wollen dabei, weil wir den Veränderlichen nachher neue Indices anhängen müssen, die transformierten Veränderlichen statt mit $x_1' \,.\,.\, x_n'$ mit $\bar{x}_1 \,.\,.\, \bar{x}_n$ bezeichnen. Unter den T_a verstehen wir folglich alle ∞^r Transformationen von $x_1 \,.\,.\, x_n$ in $\bar{x}_1 \,.\,.\, \bar{x}_n$, die sich durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{d\bar{x}_i}{\sum_1^r j\, e_j \xi_{ji}(\bar{x}_1 \,.\,.\, \bar{x}_n)} = dt \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, r)$$

mit den Anfangswerten $x_1 \,.\,.\, x_n$ von $\bar{x}_1 \,.\,.\, \bar{x}_n$ für $t = 0$ ergeben. Sie haben als Parameter die Grössen $e_1 t,\ e_2 t \,.\,.\, e_r t$. Offenbar enthalten sie die identische Transformation (für $t = 0$). Wenn wir nach der Integration $e_1 t \,.\,.\, e_r t$ mit $e_1 \,.\,.\, e_r$ bezeichnen, so kommen als Gleichungen der Transformationen etwa diese:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ e_1 \,.\,.\, e_r) \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n). \tag{32}$$

Auf diese Schar darf daher Satz 7 angewandt werden. Dies thun wir, indem wir den Satz 7 ins Analytische übertragen.

Es mögen $x_1^{(1)} \,.\,.\, x_n^{(1)},\ x_1^{(2)} \,.\,.\, x_n^{(2)},\ \,.\,.\, x_1^{(r+1)} \,.\,.\, x_n^{(r+1)}$ die $(r+1)n$ Coordinaten der Ecken eines $(r+1)$-Ecks sein und $X_j^{(1)}f \,.\,.\, X_j^{(r+1)}f$ das Symbol $X_j f$, aber geschrieben in bez. den $x_i^{(1)} \,.\,.\, x_i^{(r+1)}$. Alsdann werden die Ecken des $(r+1)$-Ecks bei der Transformation (32) durch die Gleichungen

$$\bar{x}_i^{(1)} = f_i(x^{(1)},\ e), \quad \ldots\, \bar{x}_i^{(r)} = f_i(x^{(r)},\ e) \tag{33}$$
$$(i = 1,\ 2 \,.\,.\, n)$$

in die Ecken $\bar{x}_i^{(1)},\ \,.\,.\, \bar{x}_i^{(r)}$ übergeführt. Offenbar stellen die $(r+1)n$ Gleichungen (33) die von den ∞^{r+1} infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r j\, e_j\,(X_j^{(1)}f + X_j^{(2)}f + \cdots + X_j^{(r+1)}f) \equiv \sum_1^r j\, e_j U_j f \tag{34}$$

erzeugten endlichen Transformationen dar.

Jedes $(r+1)$-Eck $x_i^{(1)} \,.\,.\, x_i^{(r+1)}$ kann nun in einen Punkt eines Raumes von $(r+1)\,n$ Dimensionen mit den Coordinaten $x_1^{(1)} \,.\,.\, x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(r)} \,.\,.\, x_n^{(r)}$ abgebildet werden. Die in Satz 7 ausgesprochene invariante Zerlegung der Zahl aller $(r+1)$-Ecke in Scharen von je ∞^r stellt sich in diesem Raume dar als eine gegenüber den Transformationen (33) in-

variante Zerlegung des neuen Raumes in Mannigfaltigkeiten von r Dimensionen. Eine solche Zerlegung wird durch $(r+1)n-r$ Gleichungen von der Form

$$\varphi_\tau(x_1^{(1)} \dots x_n^{(r+1)}) = \text{Const.} \quad (\tau = 1, 2 \dots (r+1)n-r)$$

dargestellt. Es muss also vermöge (33) jedes φ_τ, geschrieben in den $\bar{x}$, sich auf eine Constante reducieren, sobald alle φ_τ, geschrieben in den x, gleich denselben Constanten gesetzt werden, d. h. es muss jedes $\varphi_\tau(\bar{x})$ identisch gleich $\varphi_\tau(x)$ werden. Mit anderen Worten, da die Gleichungen (33) durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{d\bar{x}_i^{(\nu)}}{\sum_1^r {}_j\, e_j \xi_{ji}(\bar{x}_1^{(\nu)} \dots \bar{x}_n^{(\nu)})} = dt \quad (i = 1, 2 \dots n, \quad \nu = 1, 2 \dots r+1)$$

hervorgehen, und da dies simultane System der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum_1^n {}_i \sum_1^{r+1} {}_\nu \sum_1^r {}_j\, e_j \xi_{ji}(\bar{x}_1^{(\nu)} \dots \bar{x}_n^{(\nu)}) \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i^{(\nu)}} = 0$$

oder nach (34) kürzer

$$\sum_1^r {}_j\, e_j U_j f = 0$$

äquivalent ist, so müssen die $\varphi_\tau(x)$ Lösungen dieser Differentialgleichung sein. Satz 7 kann also, da $e_1 \dots e_r$ ganz beliebige Constanten bedeuten, so ausgesprochen werden:

Die Gleichungen (32) stellen dann und nur dann eine Gruppe dar, wenn die r linearen partiellen Differentialgleichungen

$$U_1 f = 0, \quad \dots\dots \quad U_r f = 0$$

oder also diese:

$$X_j^{(1)} f + X_j^{(2)} f + \dots + X_j^{(r+1)} f = 0 \quad (j = 1, 2 \dots r)$$

gerade $(r+1)n-r$ gemeinsame von einander unabhängige Lösungen φ_τ besitzen. Diese r von einander unabhängigen Gleichungen enthalten $(r+1)n$ unabhängige Veränderliche, haben also überhaupt $(r+1)n-r$ gemeinsame Lösungen dann und nur dann, wenn sie ein vollständiges System bilden, d. h. wenn jedes

$$(U_j U_\nu) \equiv \sum_1^r {}_s\, \psi_{j\nu s} U_s f \quad (j, \nu = 1, 2 \dots r)$$

ist. Die $\psi_{j\nu s}$ bedeuten zunächst irgend welche Functionen der Veränderlichen. Nun folgt sofort hieraus

$$(X_j^{(\sigma)} X_\nu^{(\sigma)}) \equiv \sum_1^r {}_s\, \psi_{j\nu s} X_s^{(\sigma)} f,$$

ähnlich wie oben bei Gelegenheit der $W_j f$. Daraus schliesst man leicht,

dass die $\psi_{j\nu s}$ bloss Constanten $c_{j\nu s}$ sind, und kommt so zu den notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$(X_j X_\nu) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{j\nu s} X_s f,$$

wie im zweiten Fundamentalsatz.

§ 4. Der dritte Fundamentalsatz.

Nach dem zweiten Fundamentalsatze erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen

$$X_i f \equiv \sum_1^n {}_\nu\, \xi_{i\nu}(x_1 \,..\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \quad (i = 1,\ 2 \,..\, r)$$

dann und nur dann eine Gruppe, wenn die $X_i f$ paarweis Relationen erfüllen von der Form:

$$(35) \qquad (X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i,\ k = 1,\ 2 \,..\, r).$$

Die in diesen Formeln auftretenden Constanten c_{iks} erfüllen gewisse Relationen, die wir schon früher, in der Ebene (in § 3 des 12. Kap.) abgeleitet haben. Wenn wir nämlich wie damals die Jacobi'sche Identität bilden:

Relationen zwischen den c_{iks}.

$$((X_i X_k) X_l) + ((X_k X_l) X_i) + ((X_l X_i) X_k) \equiv 0$$

und vermöge (35) ausrechnen, so ergeben sich die Relationen:

$$(36) \qquad \sum_1^r {}_s (c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt}) = 0$$

$$(i,\ k,\ l,\ t = 1,\ 2 \,..\, r).$$

Da ferner offenbar

$$(X_i X_k) + (X_k X_i) \equiv 0$$

ist, so ist überdies

$$(37) \qquad c_{ikl} + c_{kil} = 0 \quad (i,\ k,\ l = 1,\ 2 \cdots r).$$

Es ist daher sicher, dass zu gegebenen Constanten c_{iks} sicher dann keine r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_1 f \,..\, X_r f$ existieren können, die Relationen von der Form (35) erfüllen, wenn zwischen den gegebenen Grössen c_{iks} nicht alle Relationen (36) und (37) bestehen.

Es gilt nun aber auch umgekehrt der Satz, dass das Erfülltsein der Relationen (36) und (37) seitens der Constanten c_{iks} hinreicht, um

daraus die Existenz von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen mit den Relationen (35) zu erschliessen.

Die Existenz der Relationen (36) und (37) bei einer Gruppe und die soeben angedeutete Umkehrung bildet den Inhalt des dritten Fundamentalsatzes, den wir bequemer formulieren können, wenn wir den schon früher, in der Ebene, eingeführten Begriff der *Zusammensetzung* einer Gruppe benutzen. Da die c_{iks} die Coefficienten sind in den Ausdrücken, die ergeben, wie sich die $(X_i X_k)$ aus den r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \, . \, . \, X_r f$ der Gruppe linear znsammensetzen, so sagen wir, dass diese Coefficienten c_{iks} die Zusammensetzung der Gruppe bestimmen. Man bemerkt, dass die Anzahl dieser Constanten und ihre Relationen (36) und (37) von der Anzahl n der Veränderlichen ganz unabhängig sind.

Zusammensetzung.

Nun lautet der in Rede stehende Satz so:

Dritter Fundamentalsatz.

Dritter Fundamentalsatz: *r^3 Constanten c_{iks} bestimmen dann, aber auch nur dann die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe, wenn sie die Relationen erfüllen:*

$$c_{ikl} + c_{kil} = 0,$$

$$\sum_1^r {}^s \left(c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt} \right) = 0$$

$$(i, k, l, t = 1, 2 \, . \, . \, r).$$

Wir werden für das noch zu Beweisende, dass nämlich zu Constanten c_{iks} mit diesen Relationen auch immer wenigstens eine r-gliedrige Gruppe mit der von den c_{iks} bestimmten Zusammensetzung gehört, einen rein analytischen Nachweis erbringen, indem wir r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \, . \, . \, X_r f$ construieren, für welche die Beziehungen (35) bestehen. Dieser Beweis könnte aber Lesern, welche die Lie'sche Theorie der Functionengruppen nicht kennen, künstlich erscheinen. Aus diesem Grunde und auch deshalb, weil sich die zweite Hälfte des dritten Fundamentalsatzes nicht als so wichtig zeigen wird, wie die erste Hälfte, geben wir den Beweis hier in kleinerem Druck. Doch heben wir ausdrücklich hervor, dass zum Verständnis des Beweises *nur elementare Kenntnisse* erforderlich sind. Aus der Theorie der Berührungstransformationen, der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und der Functionengruppen wird also gar nichts als bekannt vorausgesetzt.

Beweis des 2. Teiles des 3. Fundamentalsatzes.

Es seien also r^3 Constanten c_{iks} vorgelegt, die den Bedingungen (36) und (37) genügen. Unter $H_1, H_2 \, . \, . \, H_r$ sollen nun r veränderliche Grössen und unter U, V, W u. s. w. Functionen dieser Grössen verstanden

werden. Alsdann definieren wir einen Ausdruck $|UV|$ allgemein durch die Formel:

Symbol $|UV|$.

$$(38)\qquad |UV| \equiv \sum_1^r {}_i \sum {}_k \frac{\partial U}{\partial H_i}\frac{\partial V}{\partial H_k}\sum_1^r {}_s c_{iks} H_s,$$

sodass insbesondere

$$(39)\qquad |H_i H_k| \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} H_s$$

und nach (36) $|UV| \equiv -|VU|$ ist. Wir wollen beweisen, dass stets die Identität besteht:

$$(40)\qquad ||UV|W| + ||VW|U| + ||WU|V| \equiv 0,$$

Eine allgemeine Identität.

sobald U, V, W irgend welche Functionen von $H_1 \, .. \, H_r$ sind. Zu diesem Zwecke zeigen wir, dass, sobald diese Identität für zwei *gegebene* Functionen U, V und eine beliebige H_k gilt, sie auch für eben jene U, V und eine ganz *beliebige* Function W gilt. Es sind nämlich

$$|Uf| \equiv \sum_1^r {}_i |UH_i| \frac{\partial f}{\partial H_i},$$

$$|Vf| \equiv \sum_1^r {}_i |VH_i| \frac{\partial f}{\partial H_i}$$

Symbole zweier infinitesimaler Transformationen in den Veränderlichen $H_1 \, .. \, H_r$. Bildet man also nach bekannter Regel den Klammerausdruck, so kommt, da dieser bekanntlich frei von den zweiten partiellen Differentialquotienten von f ist:

$$(41)\qquad |U|Vf|| - |V|Uf|| \equiv \sum_1^r {}_i \Big\{ |U|VH_i|| - |V|UH_i|| \Big\} \frac{\partial f}{\partial H_i}.$$

Gilt nun die Formel (40) für die betrachteten Functionen U, V und jedes H_i, so ist

$$||UV|H_i| \equiv |U|VH_i| - |V|UH_i||,$$

also nach (41):

$$|U|Vf|| - |V|Uf|| \equiv \sum_1^r {}_i ||UV|H_i| \frac{\partial f}{\partial H_i} \equiv ||UV|f|,$$

d. h. dann gilt die Formel (40) auch für U, V und eine beliebige Function f von $H_1 \, .. \, H_r$. Nun aber gilt die Formel (40) für je drei der Grössen H, etwa H_i, H_k und H_l, da

$$||H_i H_k|H_l| \equiv \sum_1 {}_s \sum {}_t c_{iks} c_{slt} H_t$$

ist und die Relationen (37) zwischen den Constanten c_{iks} bestehen. Infolge dessen gilt die Identität auch für zwei der $H_1 \, .. \, H_r$ und eine beliebige Function U von $H_1 \, .. \, H_r$, also etwa für U, H_i und H_k. Hieraus folgt

weiter, dass sie auch für U, H_i und eine beliebige Function V von $H_1 \,.\,. H_r$ und endlich, dass sie auch für drei beliebige Functionen U, V, W von $H_1 \,.\,. H_r$ besteht. Von der somit bewiesenen Identität (40) machen wir nachher Gebrauch.

Wir suchen jetzt eine Function f so, dass identisch

$$|H_1 f| = 1$$

wird. Diese Bedingung ist nichts anderes als die Differentialgleichung

$$\sum_1^r \sum_s c_{1ks} H_s \frac{\partial f}{\partial H_k} = 1,$$

die sich stets befriedigen lässt, wenn nicht die linke Seite identisch Null ist, d. h. alle $|H_1 H_k|$ gleich Null sind. Von diesem Ausnahmefall sehen wir vorerst ab. Es giebt also eine Function f, für die $|H_1 f|$ gleich Eins ist. Wir nennen H_1 jetzt P_1 und diese Function f jetzt X_1, sodass

$$(42) \qquad |P_1 X_1| \equiv 1$$

ist. Sodann suchen wir Functionen f von $H_1 \,.\,. H_r$, welche die beiden Differentialgleichungen:

$$(43) \qquad A_1 f \equiv |P_1 f| = 0, \quad A_2 f \equiv |X_1 f| = 0$$

erfüllen. Diese Gleichungen sind von einander unabhängig, denn die Annahme $f \equiv P_1$ erfüllt die erste, aber nicht die zweite. Sie bilden ein zweigliedriges vollständiges System, weil:

$$A_1(A_2 f) - A_2(A_1 f) \equiv |P_1 |X_1 f|| - |X_1 |P_1 f||,$$

d. h. nach der Identität (40) und nach (42)

$$A_1(A_2 f) - A_2(A_1 f) \equiv ||P_1 X_1| f| \equiv |1, f| \equiv 0$$

ist. Das System (43) in den r Veränderlichen $H_1 \,.\,. H_r$ hat folglich $r - 2$ von einander unabhängige Lösungen, die wir für den Augenblick mit $H_1' \,.\,. H_{r-2}'$ bezeichnen.

Es besteht keine Relation zwischen P_1, X_1, $H_1' \,.\,. H_{r-2}'$, denn entweder enthielte sie P_1, sodass

$$P_1 \equiv \Omega(X_1,\ H_1' \,.\,. H_{r-2}')$$

und daher

$$|P_1 X_1| \equiv |\Omega X_1| \equiv \sum_1^{r-2} \frac{\partial \Omega}{\partial H_j'} |H_j' X_1|$$

wäre, was absurd ist, da die linke Seite gleich 1, die rechte gleich Null ist, oder aber es wäre X_1 eine Function von $H_1' \,.\,. H_{r-2}'$ allein, also Lösung von (43), was in Widerspruch mit (42) steht. Endlich ist nach (40)

$$|P_1 |H_i' H_j'|| \equiv ||H_j' P_1| H_i'| + ||P_1 H_i'| H_j'|,$$

mithin, da

$$|P_1 H_j'| \equiv |P_1 H_i'| \equiv 0$$

ist:

$$|P_1|H_i'H_j'|| \equiv 0.$$

Analog folgt

$$|X_1|H_i'H_j'|| \equiv 0.$$

Demnach erfüllen auch die $|H_i'H_j'|$ das vollständige System (43) und sind infolgedessen Functionen von $H_1' \dots H_{r-2}'$ allein.

Also haben wir gefunden:

Giebt es unter den $|H_1 H_k|$ oder — was offenbar auf dasselbe hinauskommt — unter den $|H_i H_k|$ auch nur einen einzigen nicht identisch verschwindenden Ausdruck, so giebt es r von einander unabhängige Functionen X_1, P_1, $H_1' \dots H_{r-2}'$ von $H_1 \dots H_r$, welche die Relationen

$$|P_1 X_1| \equiv 1, \quad |P_1 H_j'| \equiv 0, \quad |X_1 H_j'| \equiv 0$$
$$(j = 1, 2 \dots r-2)$$

erfüllen, während die $|H_i'H_j'|$ Functionen von $H_1' \dots H_{r-2}'$ allein sind.

Um dieses Ergebnis abzuleiten, haben wir nur davon Gebrauch gemacht, dass die $|H_i H_k|$ sich durch die $H_1 \dots H_r$ ausdrücken und für beliebige Functionen der $H_1 \dots H_r$ die Identität (40) besteht. Man erkennt, dass eben diese Thatsachen auch für $H_1' \dots H_{r-2}'$ richtig sind. Wir können also für diese genau dieselben Schlüsse machen. Dadurch ergiebt sich: Es giebt, sobald nicht alle $|H_i'H_j'| \equiv 0$ sind, $r-2$ von einander unabhängige Functionen X_2, P_2, $H_1'' \dots H_{r-4}''$ von $H_1' \dots H_{r-2}'$ derart, dass

$$|P_2 X_2| \equiv 1, \quad |P_2 H_j''| \equiv 0, \quad |X_2 H_j''| \equiv 0$$
$$(j = 1, 2 \dots r-4)$$

ist, während die $|H_i''H_j''|$ Functionen von $H_1'' \dots H_{r-4}''$ allein sind.

Dieselbe Schlussweise können wir immer wieder anwenden, bis wir schliesslich zu Functionen $H^{(q+1)}$ gelangen, für die alle $|H_i^{(q+1)} H_j^{(q+1)}| \equiv 0$ sind. Diese bezeichnen wir dann mit P_{q+1}, $P_{q+2} \dots$ Es ist auch möglich, dass wir bei jedem neuen Schritte ein Paar P, X erhalten, für das $|PX| \equiv 1$ ist.

Also ergiebt sich im Ganzen:

Es existieren r von einander unabhängige Functionen $P_1 \dots P_q$, $P_{q+1} \dots P_m$ und $X_1 \dots X_q$ von $H_1 \dots H_r$ derart, dass erstens natürlich $m + q = r$ und ausserdem allgemein:

$$(44) \qquad \begin{cases} |P_i X_i| \equiv 1, & |P_i X_k| \equiv 0 \text{ für } i \neq k, \\ |P_i P_k| \equiv 0, & |X_i X_k| \equiv 0 \end{cases}$$

ist. Die Annahme $q = 0$ würde insbesondere dem Fall entsprechen, dass alle $c_{iks} = 0$ wären.

Umgekehrt fassen wir nun alle $H_1 \dots H_{m+q}$ sowie f als Functionen von $P_1 \dots P_m$, $X_1 \dots X_q$ auf und haben zunächst:

Neue Veränderliche X, P.

$$|H_i f| \equiv \sum^j \sum^l \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial P_j} \frac{\partial f}{\partial P_l} |P_j P_l| + \frac{\partial H_i}{\partial P_j} \frac{\partial f}{\partial X_l} |P_j X_l| + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial H_i}{\partial X_j} \frac{\partial f}{\partial P_l} |X_j P_l| + \frac{\partial H_i}{\partial X_j} \frac{\partial f}{\partial X_l} |X_j X_l| \right\}.$$

Hierin sind die Summen über j und l immer bis m bez. q zu erstrecken, je nachdem j oder l Indices von den P oder den X sind. Nach (44) reduciert sich dieser Ausdruck, den wir von jetzt ab mit $A_i f$ bezeichnen, bedeutend:

Infinitesim. Transformationen.

$$|H_i f| \equiv \sum_1^q {}_j \frac{\partial H_i}{\partial P_j} \frac{\partial f}{\partial X_j} - \sum_1^q {}_j \frac{\partial H_i}{\partial X_j} \frac{\partial f}{\partial P_j} \equiv A_i f$$

$$(i = 1, 2 \, . \, . \, r).$$

Da nun nach (40)

$$|H_i | H_k f|| - |H_k | H_i f|| \equiv ||H_i H_k| f|$$

ist, so bestehen zwischen den $A_1 f \, . \, . \, A_r f$ wegen (39) paarweis Relationen von der Form:

$$A_i(A_k f) - A_k(A_i f) \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} A_s f \tag{45}$$

$$(i, k = 1, 2 \, . \, . \, r).$$

Die $A_1 f \, . \, . \, A_r f$ sind infinitesimale Transformationen in den r Veränderlichen $P_1 \, . \, . \, P_m$, $X_1 \, . \, . \, X_q$. Sie erzeugen, weil zwischen ihnen die Relationen (45) bestehen, nach dem zweiten Fundamentalsatz eine Gruppe und zwar enthält die Gruppe gerade soviele von einander unabhängige Transformationen, als unter den Ausdrücken

$$e_1 A_1 f + \cdots + e_r A_r f$$

von einander unabhängige enthalten sind.

Wir bemerken nun, dass

$$|H_i f| \equiv \sum_1^r {}_k |H_i H_k| \frac{\partial f}{\partial H_k} \equiv \sum_1^r {}_k \sum {}_s c_{iks} H_s \frac{\partial f}{\partial H_k}$$

ist. In den Veränderlichen $H_1 \, . \, . \, H_r$ geschrieben sind daher die $A_1 f \, . \, . \, A_r f$ infinitesimale lineare und homogene Transformationen:

$$A_i f \equiv \sum_1^r {}_k \sum {}_s c_{iks} H_s \frac{\partial f}{\partial H_k} \quad (i = 1, 2 \, . \, . \, r). \tag{46}$$

Besteht zwischen ihnen eine Relation mit constanten Coefficienten $e_1 \, . \, . \, e_r$:

$$e_1 A_1 f + \cdots + e_r A_r f \equiv 0,$$

so ist auch der Klammerausdruck:

$$\left| \sum_1^r {}_i e_i H_i, \; f \right| \equiv 0,$$

daher insbesondere jedes

$$\left| \sum_1^r {}_i e_i H_i, \; H_k \right| \equiv 0 \quad (k = 1, 2 \, . \, . \, r).$$

Hieraus folgt rückwärts, da f nur von $H_1 \, . \, . \, H_r$ abhängt, die vorhergehende Relation, also auch $\Sigma e_i A_i f \equiv 0$.

Wir erkennen somit: Wenn es keine r nicht sämtlich verschwindende Constanten $e_1 \dots e_r$ giebt derart, dass $|\Sigma e_i H_i, H_k|$ für $k = 1, 2 \dots r$ stets Null ist, so giebt es gerade r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen (46), die eine lineare homogene Gruppe in den Veränderlichen $H_1 \dots H_r$ erzeugen, deren Zusammensetzung von den c_{iks} bestimmt wird. Diese $A_i f$ lassen sich nach (46) sofort ohne Integration hinschreiben.

Ist $q = m$, also die Zahl der $X_1 \dots X_q$ gleich der Zahl der $P_1 \dots P_m$, so haben die r Differentialgleichungen

$$|H_1 f| = 0, \quad \dots |H_r f| = 0,$$

die ja äquivalent sind mit diesen:

$$|X_j f| = 0 \quad (j = 1, 2 \dots q)$$
$$|P_j f| = 0 \quad (j = 1, 2 \dots m)$$

oder nach (44) mit den 2_q Gleichungen:

$$(47) \qquad \frac{\partial f}{\partial P_j} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial X_j} = 0 \quad (j = 1, 2 \dots q),$$

keine gemeinsame Lösung f. Es existiert dann kein Ausdruck $\Sigma e_i H_i$, der mit $H_1 \dots H_r$ combiniert stets Null liefert. In diesem Fall ist mithin die von $A_1 f \dots A_r f$ erzeugte lineare homogene Gruppe von der gewünschten Zusammensetzung gerade r-gliedrig.

r-gliedrige lineare homogene Gruppe.

Ist $q < m$, so besitzen die Gleichungen (47) zwar Lösungen. Es ist aber möglich, dass sich unter ihnen keine von der Form $\Sigma e_i H_i$ befindet, dass also auch dann noch die $A_1 f \dots A_r f$ eine r-gliedrige lineare homogene Gruppe von der gewünschten Zusammensetzung erzeugen.

Allgemeiner Fall.

Um jedoch für $q < m$ in allen Fällen sicher zum Ziele zu gelangen, benutzen wir $2m$ Veränderliche

$$X_1 \dots X_q, \; X_{q+1} \dots X_m, \; P_1 \dots P_m,$$

und es sollen $H_1 \dots H_r$ die früher betrachteten Functionen von $X_1 \dots X_q$ und $P_1 \dots P_m$ sein. Bedeuten U, V u. s. w. sowie f Functionen von *allen* $2m$ Veränderlichen, so führen wir das Symbol ein:

$$(UV) \equiv \sum_1^m {}^i \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial X_i} - \frac{\partial U}{\partial X_i} \frac{\partial V}{\partial P_i} \right).$$

Es liegt dann nahe zu vermuten, dass auch jetzt noch die Identität besteht:

$$((UV)W) + ((VW)U) + ((WU)V) \equiv 0.$$

Man kann dies bekanntlich durch Ausrechnung bestätigen. Setzen wir nun

$$(H_k f) \equiv B_k f \quad (k = 1, 2 \dots r),$$

so folgt hieraus wie früher, dass

$$B_i(B_k f) - B_k(B_i f) \equiv \sum_1^r {}^s c_{iks} B_s f$$
$$(i, k = 1, 2 \dots r)$$

ist. $B_1 f \,.\,.\, B_r f$ sind infinitesimale Transformationen in den $2m$ Veränderlichen $X_1 \,.\,.\, X_m$, $P_1 \,.\,.\, P_m$ und erzeugen der letzten Relationen halber nach dem zweiten Fundamentalsatze eine Gruppe von der gewünschten Zusammensetzung. Sie ist auch gerade r-gliedrig, denn wäre für nicht sämtlich verschwindende Constanten $e_1 \,.\,.\, e_r$

$$e_1 B_1 f + \cdots + e_r B_r f \equiv 0,$$

also für jede Function f von $X_1 \,.\,.\, X_m$, $P_1 \,.\,.\, P_m$

$$\left(\sum_1^r {}^i \, e_i H_i, \, f \right) \equiv 0,$$

so würde die Annahme $f \equiv X_1, X_2 \,.\,.\, X_m, P_1 \,.\,.\, P_m$ liefern, dass alle

$$\frac{\partial \sum_1^r {}^i \, e_i H_i}{\partial X_j} \equiv 0, \quad \frac{\partial \sum_1^r {}^i \, e_i H_i}{\partial P_j} \equiv 0 \quad (j = 1, 2 \,.\,.\, m)$$

wären. $\Sigma e_i H_i$ müsste also eine Constante sein, was aber deshalb unmöglich ist, weil $H_1 \,.\,.\, H_r$ von einander unabhängige Functionen von $X_1 \,.\,.\, X_q$, $P_1 \,.\,.\, P_m$ sind.

Wir können also stets eine r-gliedrige Gruppe construieren, deren Zusammensetzung durch die gegebenen Constanten c_{iks} bestimmt wird. Man erkennt, dass die Bestimmung dieser Gruppe im allgemeinen Fall nur die Integration vollständiger Systeme verlangt, nämlich jener Systeme, durch die $X_1 \,.\,.\, X_q$, $P_1 \,.\,.\, P_m$ als Functionen von $H_1 \,.\,.\, H_r$ definiert wurden*).

§ 5. Allgemeiner Überblick.

Die drei Fundamentalsätze, insbesondere der erste und zweite, setzen uns in den Stand, folgende allgemeine Bemerkungen über endliche continuierliche Transformationsgruppen zu machen:

Der erste Fundamentalsatz zeigte, dass mit einer r-gliedrigen continuierlichen Gruppe in n Veränderlichen mit der identischen Trans-

---

*) Der erste Teil des dritten Fundamentalsatzes, dass bei vorgelegter Gruppe die Relationen (36) und (37) zwischen den c_{iks} bestehen, lässt sich nicht einfacher beweisen, als es zu Anfang dieses Paragraphen geschehen ist, nämlich mit Hülfe der Jacobi'schen Identität. Den Beweis für die Umkehrung hat dagegen Herr Schur auf kürzerem Wege erbracht, indem er direct Potenzreihen für die infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe von der Zusammensetzung c_{iks} aufstellte. Die Entwickelungen des Textes leisten aber mehr, indem sie unter Anderem unmittelbar zeigen, *dass man durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen Gruppen von gegebener Zusammensetzung finden kann.* An einer anderen Stelle hat Lie gezeigt, dass die Integration dieser Differentialgleichungen im ungünstigsten Falle nur nur noch *Quadraturen* verlangt. (Siehe Berichte der Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften 1889.)

formation gewisse $n \cdot r$ Functionen $\xi_{ji}(x_1 \,.\,.\, x_n)$ zusammenhängen derart, dass die Integration der Gleichungen

$$\frac{dx_i'}{da_k} = \sum_1^r {}_j \psi_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_r)\xi_{ji}(x_1' \,.\,.\, x_r') \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \,.\,.\, n, \\ k = 1, 2 \,.\,.\, r \end{pmatrix}$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i' = x_i$ für $a_k = a_k^0$ die endlichen Gleichungen der Gruppe liefert. Wir sahen, dass sich anstatt der Parameter $a_1 \,.\,.\, a_r$ neue Parameter $\lambda_1 t \,.\,.\, \lambda_r t$ — die wir jetzt mit $e_1 t \,.\,.\, e_r t$ bezeichnen wollen — so einführen lassen, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe insbesondere die Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_1^r {}_k c_i \xi_{ki}(x_1' \,.\,.\, x_n') \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

mit den Anfangsbedingungen $x_i' = x_i$ für etwa $t = 0$ erfüllen.

Vergegenwärtigen wir uns nun, dass jede infinitesimale Transformation

$$\delta x_1 = \eta_1(x_1 \,.\,.\, x_n)\delta t, \quad \ldots \quad \delta x_n = \eta_n(x_1 \,.\,.\, x_n)\delta t$$

eine eingliedrige Gruppe erzeugt, deren endliche Gleichungen durch Integration des simultanen Systems

$$\frac{dx_1'}{\eta_1(x_1' \,.\,.\, x_n')} = \cdots = \frac{dx_n'}{\eta_n(x_1' \,.\,.\, x_n')} = dt$$

mit den Anfangsbedingungen $x_1' = x_1, \,.\,.\, x_n' = x_n$ für $t = 0$ hervorgehen, so können wir diesen im vorigen Paragraphen schon angedeuteten Satz so aussprechen:

Satz 8: *Die endlichen Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe mit den von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$X_k f \equiv \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

lassen sich in ∞^{r-1} *eingliedrige Untergruppen* $\sum_1^r {}_k c_k X_k f$ *anordnen.*

Dabei nennen wir wie schon gesagt $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ von einander unabhängig, sobald es keine lineare Relation zwischen ihnen mit nicht sämtlich verschwindenden constanten Coefficienten giebt. Nach dem zweiten Hauptsatze können wir kurz von der „Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$" sprechen, sobald die $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ paarweis Relationen mit constanten Coefficienten c_{iks} erfüllen:

Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$.

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Beispiel: Betrachten wir alle Bewegungen des gewöhnlichen Raumes, alle die Transformationen also, die den starr gedachten Raum

Beispiel.

in eine andere Lage überführen. Offenbar bilden sie eine Gruppe, welche die identische und paarweis inverse Transformationen enthält. Bekanntlich ist jede infinitesimale Bewegung eine infinitesimale Schraubung, und jede infinitesimale Schraubung erzeugt offenbar eine eingliedrige Gruppe von Schraubungen um dieselbe Axe mit gleicher Steighöhe. Aus unserem Satze folgt also sofort einer der Hauptsätze der Kinematik: Jede endliche Bewegung des Raumes lässt sich durch eine bestimmte Schraubung um eine bestimmte Axe ersetzen.

Es bedarf nun keines Nachweises, dass die allgemeinen Sätze über Gruppen, die wir in der zweiten Abteilung ableiteten, mit den entsprechenden Verallgemeinerungen auch für Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen gelten. So lauten z. B. die endlichen Gleichungen der von den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \, . \, . \, X_r f$ erzeugten r-gliedrigen Gruppe:

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}_k \, e_k X_k x_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}_k \sum_l e_k e_l X_k X_l x_i + \cdots$$

$$(i = 1, 2 \, . \, . \, r)$$

(vgl. § 2 des 7. Kap.), indem eine Function $f(x_1 \, . \, . \, x_n)$ allgemein übergeht in:

$$f' = f + \sum_1^r {}_k \, e_k X_k x_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}_k \sum_l e_k e_l X_k X_l f + \cdots .$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass wir später, namentlich in den Beispielen, statt $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}$ häufig abkürzend $p_1 \, . \, . \, p_n$ schreiben, entsprechend in drei Veränderlichen x, y, z kurz p, q, r statt $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ setzen. Eine Verwechselung von $r \equiv \frac{\partial f}{\partial z}$ mit der Gliederzahl r einer Gruppe ist dabei nicht zu befürchten.

Kapitel 16.

Transitivität, Invarianten und invariante Gleichungensysteme.

Eines der wichtigsten Probleme der Gruppentheorie ist das, *die bei einer Gruppe invarianten Functionen und Gleichungensysteme zu bestimmen.* Handelt es sich z. B. um die ebenso schwierige wie wichtige

Aufgabe, zu untersuchen, ob eine gegebene Gruppe durch Änderung der Veränderlichen und Parameter in eine andere gegebene Gruppe übergeführt werden kann, — eine Aufgabe, die wir im nächsten Kapitel besprechen werden —, so kommt die Lösung dieses Problems, wie wir sehen werden, im wesentlichen darauf hinaus, die bei einer gewissen Gruppe invarianten Gleichungensysteme zu finden. Auch viele andere wichtige Probleme in der Theorie der Differentialgleichungen und der Geometrie führen auf die Untersuchung der invarianten Gebilde zurück.

Wir werden die Bestimmung der Invarianten und invarianten Gleichungensysteme für Gruppen in *drei* Veränderlichen genau durchführen, dagegen für die Verallgemeinerung auf den Fall von n Veränderlichen nur das Ergebnis formulieren. Diese Verallgemeinerung bietet nämlich solchen Lesern, die mit dem Raume von n Dimensionen zu operieren wissen, keine Schwierigkeiten.

§ 1. Die einem Punkte zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit.

Angenommen, es liege in den drei Veränderlichen x, y, z, die wir als gewöhnliche Punktcoordinaten des Raumes deuten, eine r-gliedrige Gruppe vor. Es seien T_a, $T_b \dots$ die Transformationen dieser Gruppe.

Führen wir alle Transformationen der Gruppe auf einen Punkt p des Raumes (x, y, z) aus, so wird er im Allgemeinen in unendlich viele Punkte $(p)\,T_a$, $(p)\,T_b \dots$ übergeführt, die eine continuierliche Mannigfaltigkeit bilden, da die Gruppe selbst continuierlich ist. Es ist möglich, dass er in alle Punkte des Raumes oder nur in die Punkte einer Fläche oder nur in die einer Curve übergehen kann oder endlich sich gar nicht zu ändern vermag.

Es gilt nun der sehr wichtige

Satz 1: *Führt man auf einen Punkt p alle Transformationen T_a einer Gruppe aus, sodass er in die Lagen*

$$(p)\,T_a = (p_1)$$

übergeht, so bilden alle Punke p_1 eine bei der Gruppe invariante Mannigfaltigkeit und zwar die k l e i n s t e *invariante Mannigfaltigkeit, der der Punkt p angehört. Jeder Punkt allgemeiner Lage auf dieser Mannigfaltigkeit wird von den Transformationen der Gruppe in* a l l e *Punkte dieser Mannigfaltigkeit übergeführt.*

Denn, wenn

$$(p)\,T_a = (p_1)$$

ist, so geht p_1 bei Ausführung einer Transformation T_b der Gruppe über in

$$(p_1)\, T_b = (p_2).$$

Es ist dann auch:

$$(p_2) = (p)\, T_a\, T_b.$$

Da aber die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen T_a, T_b der Gruppe einer einzigen Transformation T_c der Gruppe äquivalent ist, so ist

$$(p_2) = (p)\, T_c.$$

Mithin liegt auch (p_2) auf der Mannigfaltigkeit, die p bei allen Transformationen der Gruppe beschreibt. Jeder Punkt p_1 dieser Mannigfaltigkeit geht also bei der Gruppe immer in Punkte p_2 dieser Mannigfaltigkeit über, d. h. die Mannigfaltigkeit ist bei der Gruppe invariant. Da p bei T_a, T_b, T_c u. s. w. in *alle* Punkte allgemeiner Lage der Mannigfaltigkeit übergeht und

$$(p_1)\, T_b = (p)\, T_c$$

ist, so folgt, dass auch p_1 in *alle* Punkte dieser Mannigfaltigkeit übergeht. Die Mannigfaltigkeit kann also auch dadurch erzeugt werden, dass auf einen Punkt p_1 allgemeiner Lage derselben alle Transformationen der Gruppe ausgeübt werden.

Kleinste invariante Mannigfaltigkeit eines Punktes.

Wir nennen die Mannigfaltigkeit der Punkte $(p)\, T_a$ die **kleinste** *invariante Mannigfaltigkeit des Punktes p*, weil p in **alle** ihre Punkte überführbar ist. Es kann ja auch grössere invariante Mannigfaltigkeiten geben, auf denen p liegt. Solche werden wir später kennen lernen. Hier sei nur zur Veranschaulichung ein Beispiel erwähnt: Es wäre denkbar, dass bei der vorgelegten Gruppe eine Fläche invariant bleibt, dass aber ein Punkt dieser Fläche bei Ausführung aller Transformationen der Gruppe nur eine Curve auf der Fläche beschreibt. Dann ist die Fläche zwar invariant, aber keine kleinste invariante Mannigfaltigkeit des Punktes p. Diese wäre vielmehr nur die Curve, die p beschreiben kann.

Wir können also einen Teil des Satzes 1 noch etwas anders so aussprechen:

Satz 2: *Ist p_1 ein Punkt allgemeiner Lage der kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit, die einem Punkte p zugeordnet ist, so hat p_1 dieselbe kleinste invariante Mannigfaltigkeit.*

Um den Satz 1 noch anschaulicher zu fassen, wollen wir ihn zunächst für den Fall formulieren, dass p gerade eine Fläche beschreibt:

Satz 3: *Kann bei einer Gruppe des Raumes ein Punkt p in alle Punkte einer Fläche und in keine anderen Punkte übergeführt werden,*

so geht bei der Gruppe jeder Punkt dieser Fläche stets wieder in Punkte der Fläche über. Es kann überdies jeder Punkt allgemeiner Lage dieser Fläche bei der Gruppe in alle Punkte der Fläche übergehen.

Hierzu können wir dann noch hinzufügen:

Satz 4: *Der vorhergehende Satz gilt auch dann, wenn darin die Fläche durch eine Curve ersetzt wird.*

Die beiden letzten Sätze geben zusammengefasst wieder den Satz 1, wenn wir noch hinzufügen, dass in dem Falle, dass p in alle Punkte des Raumes überzugehen vermag, der Raum selbst die kleinste invariante Mannigfaltigkeit des Punktes p heisst. Die Formulierung in Satz 1 ist aber deshalb von Nutzen, weil sie nicht nur für Gruppen des gewöhnlichen Raumes gilt, sondern auch für Gruppen eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen, wenn man den Mannigfaltigkeitsbegriff entsprechend verallgemeinert.

Bei allen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe des Raumes:

$$Xf \equiv \xi(x, y, z)p + \eta(x, y, z)q + \zeta(x, y, z)r$$

beschreibt ein Punkt, der nicht gerade in Ruhe bleibt, eine Curve, die *Bahncurve*, die ihm durch die eingliedrige Gruppe Xf zugeordnet wird. Bahncurve.

Die Richtung dieser Curve im Punkte (x, y, z) wird gegeben durch:

$$\frac{dx}{\xi(x, y, z)} = \frac{dy}{\eta(x, y, z)} = \frac{dz}{\zeta(x, y, z)},$$

und aus Satz 1 folgt, dass jeder Punkt dieser Bahncurve dieselbe Bahncurve bei der eingliedrigen Gruppe Xf hat.

Nun enthält eine r-gliedrige Gruppe ∞^{r-1} verschiedene infinitesimale Transformationen. Von jeder wird dem Punkte (x, y, z) eine Fortschreitungsrichtung zugeordnet. Es mögen:

$$X_k f \equiv \xi_k(x, y, z)p + \eta_k(x, y, z)q + \zeta_k(x, y, z)r$$
$$(k = 1, 2 \, . \, . \, r)$$

r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der vorgelegten r-gliedrigen Gruppe sein. Die allgemeine eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ ordnet dem Punkte (x, y, z) die Fortschreitungsrichtung (dx, dy, dz) zu, für welche

$$\frac{dx}{\Sigma e_k \xi_k} = \frac{dy}{\Sigma e_k \eta_k} = \frac{dz}{\Sigma e_k \zeta_k}$$

ist. Wir nennen allgemein q Fortschreitungsrichtungen eines Punktes (x, y, z) *von einander unabhängig*, wenn sie nicht in einer nur $(q-1)$fach ausgedehnten *ebenen* Mannigfaltigkeit enthalten sind. Im gewöhnlichen Raume kommen hierbei nur diese Fälle in betracht: Drei Fort- Von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen.

schreitungsrichtungen eines Punktes sind von einander unabhängig, wenn sie eine wirkliche körperliche Ecke bilden und also nicht alle drei in einer Ebene liegen; zwei heissen von einander unabhängig, wenn sie eine Ebene bestimmen und also nicht in eine Gerade zusammenfallen.

Hiernach sind unter den ∞^{r-1} Fortschreitungsrichtungen, die dem Punkte (x, y, z) bei der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ zugeordnet werden, gerade drei von einander unabhängig, wenn nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{array}{ccc} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r \end{array}\right|$$

für den Punkt (x, y, z) verschwinden, gerade zwei, wenn zwar alle dreireihigen, nicht aber alle zweireihigen Determinanten der Matrix für den Punkt verschwinden, endlich gerade eine, wenn alle zweireihigen Determinanten Null sind, nicht aber alle Glieder der Matrix.

Es gilt nun der wichtige

Dimensionen der kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten.

Satz 5: *Werden einem Punkte bei einer Gruppe gerade q von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, so ist die kleinste invariante Mannigfaltigkeit, der jener Punkt angehört, gerade q-fach ausgedehnt.*

Denn ein Punkt p kann jedenfalls nur in solche Punkte seiner Umgebung durch die Gruppe übergeführt werden, die auf der kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit des Punktes liegen. Ist diese Mannigfaltigkeit eine Curve, d. h. einfach ausgedehnt, so hat er also höchstens eine Fortschreitungsrichtung, nämlich die Curventangente, ist sie eine Fläche, d. h. zweifach ausgedehnt, so hat der Punkt p sicher nicht mehr als zwei von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen, nämlich solche in der Tangentialebene, ist endlich die Mannigfaltigkeit der ganze dreifach ausgedehnte Raum, so könnte er drei von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen haben. Hiermit ist zunächst bewiesen, dass die kleinste invariante Mannigfaltigkeit, die einem Punkte p mit gerade q von einander unabhängigen Fortschreitungsrichtungen zugeordnet ist, sicher mindestens q-fach ausgedehnt sein muss.

Aber sie ist auch, wie der Satz aussagt, gerade q-fach ausgedehnt. Angenommen nämlich, sie sei s-fach ausgedehnt, sodass sicher $s \geqq q$ ist. Nach Satz 1 kann jeder Punkt allgemeiner Lage dieser Mannig-

faltigkeit durch die Gruppe in alle Punkte der Mannigfaltigkeit übergeführt werden, insbesondere in alle Punkte seiner Umgebung auf der Mannigfaltigkeit. Nach diesen Punkten gehen aber von ihm aus gerade s von einander unabhängige Richtungen, so auf der Curve ($s = 1$) gerade eine, auf der Fläche ($s = 2$) gerade zwei, im Raume ($s = 3$) gerade drei. Zu jeder dieser muss es also eine infinitesimale Transformation $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe geben, die den Punkt gerade längs der betreffenden Richtung fortführt. Mithin sind einem Punkte allgemeiner Lage der betrachteten kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit durch die Gruppe s von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, insbesondere dem Punkte p. Es ist daher $q = s$, wie zu beweisen war.

Wir heben hervor, dass der letzte Satz auch für Gruppen in einem Raume von beliebig vielen Dimensionen gilt.

Endlich können wir ihn analytisch formulieren, wenn wir die vorausgeschickten Bemerkungen über die obige Matrix benutzen:

Satz 6: *Die kleinste invariante Mannigfaltigkeit, die einem Punkte* (x, y, z) *bei einer* r*-gliedrigen Gruppe*

$$X_k f \equiv \xi_k(x, y, z)p + \eta_k(x, y, z)q + \zeta_k(x, y, z)r$$
$$(k = 1, 2 \, . \, . \, r)$$

des Raumes (x, y, z) *zugeordnet wird, ist der Raum selbst, wenn nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r \end{vmatrix}$$

für den Punkt (x, y, z) *verschwinden. Sie ist dagegen eine Fläche, wenn zwar alle dreireihigen, nicht aber alle zweireihigen Determinanten der Matrix für den Punkt* (x, y, z) *verschwinden. Sie ist eine Curve, wenn auch alle zweireihigen Determinanten der Matrix, aber nicht alle Glieder der Matrix für den Punkt* (x, y, z) *Null sind. Sie reduciert sich endlich auf den Punkt* (x, y, z) *selbst, d. h. der Punkt* (x, y, z) *ist für sich invariant, wenn alle Glieder der Matrix für ihn Null sind.*

Wir werden diese allgemeinen Sätze nunmehr specialisieren, indem wir im nächsten Paragraphen Punkte allgemeiner Lage im Raume ins Auge fassen, im darauffolgenden solche besonderer Lage. Das Eine führt zu den Begriffen: Transitivität, Intransitivität und Invariante, das Andere führt zu allen bei einer Gruppe invarianten Gleichungensystemen.

§ 2. Transitivität, Intransitivität und Invarianten von Gruppen des Raumes (x, y, z).

Eine r-gliedrige Gruppe des Raumes (x, y, z):

$$X_k f \equiv \xi_k(x, y, z)p + \eta_k(x, y, z)q + \zeta_k(x, y, z)r$$
$$(k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

Transitive Gruppe.

heisst *transitiv*, wenn ein Punkt *allgemeiner* Lage vermöge der Gruppe in alle Punkte des Raumes (oder wenigstens in alle seiner Umgebung) überführbar ist, wenn also die einem Punkt allgemeiner Lage zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit der Raum selbst ist. Nach Satz 6 des vorigen Paragraphen ist dies dann und nur dann der Fall, wenn von der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r \end{vmatrix}$$

nicht alle dreireihigen Determinanten für einen Punkt (x, y, z) allgemeiner Lage verschwinden, d. h. wenn nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix *identisch* Null sind.

Es giebt bei einer transitiven Gruppe sicher keine invariante Function $\Phi(x, y, z)$. Denn wäre eine solche Function invariant und führte eine Transformation der Gruppe den Punkt (x, y, z) in den Punkt (x_1, y_1, z_1) über, so müsste

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = \Phi(x, y, z)$$

sein, es müssten also die Punkte (x_1, y_1, z_1), in die der Punkt allgemeiner Lage (x, y, z) vermöge der Gruppe übergehen kann, auf einer Fläche $\Phi(x_1, y_1, z_1) = \text{Const.}$ liegen. Es wäre also die einem Punkte allgemeiner Lage zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit höchstens zweifach ausgedehnt; die Gruppe wäre somit nicht transitiv.

Intransitive Gruppe.

Jede Gruppe, die nicht transitiv ist, heisst *intransitiv*. Bei einer solchen sind zwei verschiedene Fälle denkbar: Entweder ist die einem Punkte allgemeiner Lage zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit eine Fläche oder eine Curve. Das Erstere tritt nach Satz 6 dann und nur dann ein, wenn alle dreireihigen Determinanten der obigen Matrix, nicht aber alle zweireihigen für einen Punkt allgemeiner Lage, d. h. *identisch* verschwinden, das Letztere, wenn auch alle zweireihigen Determinanten der Matrix identisch Null sind.

Bei intransitiven Gruppen treten stets invariante Functionen auf. Im ersten Fall nämlich kann jeder Punkt allgemeiner Lage vermöge

der Gruppe noch eine Fläche beschreiben, und jeder Punkt allgemeiner Lage einer solchen Fläche kann nach Satz 1 des vorigen Paragraphen in alle Punkte der Fläche übergeführt werden. In diesem Fall wird daher der ganze Raum in ∞^1 einzeln invariante Flächen

$$\Phi(x, y, z) = \text{Const.}$$

zerlegt. Geht der Punkt (x, y, z) vermöge einer Transformation der Gruppe in den Punkt (x_1, y_1, z_1) über, so ist deshalb

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = \Phi(x, y, z).$$

Eine Invariante.

Die Function Φ bleibt somit *invariant*. Im zweiten Fall ist jedem Punkte eine invariante Curve zugeordnet und zwar nach Satz 1 des vorigen Paragraphen einem Punkte allgemeiner Lage einer dieser Curven eben diese Curve. Daher wird dann der ganze Raum in ∞^2 einzeln invariante Curven zerlegt, die durch zwei von einander unabhängige Gleichungen von der Form

$$\Phi(x, y, z) = \text{Const.}, \quad \Psi(x, y, z) = \text{Const.}$$

dargestellt werden. Geht der Punkt (x, y, z) vermöge einer Transformation der Gruppe in den Punkt (x_1, y_1, z_1) über, so ist also:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = \Phi(x, y, z), \quad \Psi(x_1, y_1, z_1) = \Psi(x, y, z).$$

Zwei Invarianten.

Es treten daher in diesem Falle *zwei von einander unabhängige Invarianten* auf. Natürlich ist jede Function von Φ und Ψ allein auch eine Invariante.

Es ist klar, dass umgekehrt, wenn bei einer Gruppe nur eine invariante Function Φ vorkommt, jeder Punkt allgemeiner Lage an eine Fläche $\Phi = \text{Const.}$ gebunden ist, indem er vermöge der Gruppe in alle Punkte allgemeiner Lage der Fläche überzugehen vermag, dass aber, wenn bei einer Gruppe zwei von einander unabhängige invariante Functionen Φ, Ψ vorkommen, jeder Punkt allgemeiner Lage an die durch ihn gehende Curve $\Phi = \text{Const.}$, $\Psi = \text{Const.}$ gefesselt ist.

Ist nun $J(x, y, z)$ überhaupt eine bei der vorgelegten Gruppe $X_1 f \cdot \cdot X_r f$ invariante Function, so ist (vgl. die Schlussformel des vorigen Kapitels):

$$(1) \quad J(x, y, z) + \Sigma e_k X_k J(x, y, z) + \Sigma\Sigma X_l X_k J + \cdots \equiv J(x, y, z)$$

für alle Werte von $e_1 \ldots e_r$ und infolgedessen:

$$\sum_1^r {}_k e_k X_k J \equiv 0,$$

also einzeln

(2) $$X_k J \equiv 0 \quad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Dies sagt aus, dass die Flächen $J =$ Const. von Bahncurven *jeder* infinitesimalen Transformation $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe erzeugt sind. Da mit (2) auch $X_l X_k J \equiv 0$ u. s. w. ist, so wird (1) infolge von (2) befriedigt, d. h. J ist dann und nur dann eine Invariante, wenn diese Function die r Forderungen (2) erfüllt.

Hiernach kann man die eventuell vorhandenen Invarianten einer Gruppe durch Integration des vollständigen Systems

(1) $$X_1 f = 0, \quad \ldots X_r f = 0$$

in drei Veränderlichen x, y, z gewinnen. Dass diese Gleichungen ein vollständiges System bilden, liegt darin, dass jedes

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f$$

ist. Ist die Gruppe transitiv, so verschwinden nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix identisch, d. h. unter den Gleichungen (1) sind drei von einander unabhängig, sie besitzen keine Lösung.

Wenn aber die Gruppe intransitiv ist und also alle dreireihigen Determinanten der Matrix identisch Null sind, so giebt es unter den Gleichungen (1) höchstens zwei von einander unabhängige. Es giebt gerade zwei, wenn nicht auch alle zweireihigen Determinanten der Matrix identisch verschwinden, und sie besitzen alsdann gerade eine gemeinsame Lösung $f = \Phi$, d. h. es ergiebt sich eine Invariante, wie wir schon wussten. Wenn aber auch alle zweireihigen Determinanten der Matrix identisch verschwinden, so ist das vollständige System (1) nur eingliedrig und hat demnach zwei von einander unabhängige Lösungen $f = \Phi$, Ψ, sodass wir also zwei Invariante haben, wie es nach unseren früheren Überlegungen auch sein muss. Hier haben alle ∞^{r-1} eingliedrigen Untergruppen $\Sigma e_k X_k f$ dieselben ∞^2 Bahncurven $\Phi =$ Const., $\Psi =$ Const.

Theorem über transitive und intransitive Gruppen.

Wir sind hiermit zu dem Theorem gelangt:

Theorem 28: *Erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_k f \equiv \xi_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe des Raumes (x, y, z) und verschwinden nicht alle dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r \end{vmatrix}$$

identisch, so ist die Gruppe transitiv und besitzt keine Invariante. — Verschwinden dagegen alle dreireihigen Determinanten identisch, so ist die Gruppe intransitiv. Wenn dabei insbesondere nicht auch alle zweireihigen Determinanten identisch Null sind, so besitzt die Gruppe nur eine Invariante $\Phi(x, y, z)$, *die Lösung des zweigliedrigen vollständigen Systems* $X_1 f = 0, \cdot \cdot X_r f = 0$. *Jeder Punkt allgemeiner Lage ist alsdann an die durch ihn gehende Fläche* $\Phi = Const.$ *gebunden und kann bei der Gruppe in alle Punkte allgemeiner Lage der Fläche überführt werden. Wenn aber auch alle zweireihigen Determinanten der Matrix identisch verschwinden, so besitzt die Gruppe zwei von einander unabhängige Invarianten* $\Phi(x, y, z)$ *und* $\Psi(x, y, z)$, *die Lösungen des eingliedrigen vollständigen Systems* $X_1 f = 0, .. X_r f = 0$. *Jeder Punkt allgemeiner Lage ist alsdann an die durch ihn gehende Curve* $\Phi = Const.$, $\Psi = Const.$ *gebunden. — Die Flächen* $\Phi = Const.$ *bez. die Curven* $\Phi = Const.$, $\Psi = Const.$ *stellen dabei die kleinsten bei der Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten dar, die in continuierlicher Schar den ganzen Raum erfüllen.*

Beispiel.

Beispiel: Die fünf infinitesimalen Transformationen

$$xq - yp \quad xp + yq + zr$$
$$x(xp + yq + zr) \quad y(xp + yq + zr) \quad z(xp + yq + zr)$$

erzeugen, wie man durch Klammerbildung leicht nachweist, eine fünfgliedrige Gruppe. Ihre Matrix ist:

$$\begin{vmatrix} -y & x & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{vmatrix}.$$

Man findet, dass sämtliche dreireihigen Determinanten, nicht aber sämtliche zweireihigen identisch verschwinden. Die Gruppe ist folglich intransitiv und besitzt *eine* Invariante. Das vollständige System $X_1 f = 0, .. X_r f = 0$ reduciert sich hier auf das zweigliedrige:

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

dessen Lösung ist:

$$\Phi \equiv \frac{x^2 + y^2}{z^2}.$$

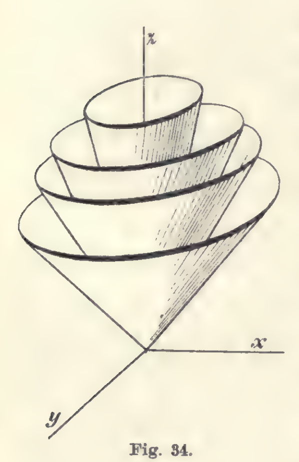


Fig. 34.

Mithin wird der ganze Raum in die ∞^1 invarianten Flächen zerlegt:

$$x^2 + y^2 + \text{Const.}\, z^2 = 0.$$

Es sind dies alle Rotationskegel mit dem Anfang als Spitze und der z-Axe als Rotationsaxe. (Fig. 34.) Jeder Punkt allgemeiner Lage bleibt bei den Transformationen der Gruppe beständig auf dem durch ihn gehenden Kegel und kann in alle Punkte des Kegels übergehen. Punkte nicht allgemeiner Lage sind hier die Punkte der z-Axe, die besondere Behandlung erfordern. Darauf kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

§ 3. Bestimmung aller bei einer Gruppe des Raumes invarianten Gleichungensysteme, Flächen, Curven und Punkte.

Im vorigen Paragraphen haben wir die verschiedenen Arten von Gruppen betrachtet, die vorkommen, je nachdem von den Determinanten der Matrix gewisse für Punkte allgemeiner Lage, d. h. identisch verschwinden. Für Punkte besonderer Lage können nun aber noch mehr Determinanten verschwinden, und derartige Punkte haben nach Satz 6 des § 1 kleinste invariante Mannigfaltigkeiten von geringerer Dimensionenzahl als Punkte allgemeiner Lage. Indem wir jenen Satz 6 und das Theorem des vorigen Paragraphen benutzen, werden wir, was das Verschwinden der dreireihigen Determinanten anlangt, zu diesem Ergebnis geführt:

Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten.

Satz 7: *Giebt es bei einer vorgelegten Gruppe*

$$X_k f \equiv \xi_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_k(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$(k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

Punkte, für welche alle dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_r & \eta_r & \zeta_r \end{vmatrix},$$

nicht aber alle zweireihigen verschwinden, so können zwei Fälle eintreten: Entweder sind alle diese dreireihigen Determinanten identisch Null und der Raum zerfällt in ∞^1 *einzeln invariante Flächen; oder aber sie sind nicht identisch Null, bestimmen vielmehr, gleich Null gesetzt, eine invariante Fläche oder eine discrete Anzahl solcher. Jeder Punkt allgemeiner Lage einer solchen Fläche kann in beiden Fällen vermöge der Gruppe in alle benachbarten Punkte der Fläche übergehen.*

Denn nach Satz 6 ist jedem Punkte, für den alle dreireihigen, nicht aber alle zweireihigen Determinanten verschwinden, eine Fläche als kleinste invariante Mannigfaltigkeit zugeordnet und diese Fläche ist für jeden Punkt allgemeiner Lage auf ihr kleinste invariante Mannigfaltigkeit. Es muss daher auch notwendig ∞^2 solche Punkte geben, wenn überhaupt solche Punkte auftreten.

Wenn die zweireihigen, nicht aber alle einreihigen Determinanten für gewisse Punkte Null sind, so finden wir analog den

Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten.

Satz 8: *Giebt es bei der Gruppe des Satzes 7 Punkte, für die alle zweireihigen Determinanten der Matrix, nicht aber alle* ξ_k, η_k, ζ_k *selbst verschwinden, so sind drei Fälle möglich: Entweder verschwinden alle zweireihigen Determinanten identisch. Dann haben alle eingliedrigen Untergruppen* $\Sigma e_k X_k f$ *dieselben* ∞^2 *Bahncurven und der Raum zerfällt in diese* ∞^2 *invarianten Curven. — Wenn aber andererseits die zweireihigen Determinanten nicht sämtlich identisch verschwinden, so können sie gleich Null gesetzt erstens eine oder eine discrete Anzahl von Flächen bestimmen. Jede derartige Fläche ist dann invariant und zerfällt in* ∞^1 *einzeln invariante Curven, die kleinste invariante Teilgebiete sind. — Endlich aber können die gleich Null gesetzten zweireihigen Determinanten auch nur eine oder eine discrete Anzahl von Curven bestimmen. Diese sind dann kleinste invariante Teilgebiete. In allen drei Fällen ist vorausgesetzt, dass für die betrachteten Punkte nicht alle* ξ_k, η_k, ζ_k *verschwinden.*

Der Fall, dass nur für einzelne Punkte alle zweireihigen, nicht aber alle einreihigen Determinanten Null sind, ist deshalb unmöglich, weil jedem solchen Punkte nach Satz 6 des § 1 als kleinste invariante Mannigfaltigkeit eine Curve zugeordnet ist und also dasselbe für alle ∞^1 Punkte dieser Curve gilt.

Schliesslich ist noch der Satz zu formulieren:

Nullsetzen aller ξ_k, η_k, ζ_k.

Satz 9: *Giebt es bei der Gruppe des Satzes 7 Punkte, für die alle*

ξ_k, η_k, ζ_k verschwinden, so sind diese Punkte einzeln invariant. Die Gleichungen $\xi_k = \eta_k = \zeta_k = 0$ $(k = 1, 2 \,..\, r)$ bestimmen dann entweder isolierte invariante Punkte oder einige Curven mit lauter invarianten Punkten oder einige Flächen mit lauter invarianten Punkten.

Invariantes Gleichungensystem.

Die vorangehenden Entwickelungen sind vollständig und liefern in jedem vorliegenden Fall eine Methode, alle kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten zu bestimmen. Will man *alle* invarianten Mannigfaltigkeiten finden, so hat man nur irgend eine analytisch definierbare Schar von kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten zusammenfassen. Damit sind dann *alle invarianten Gleichungensysteme* bestimmt.

Hiermit ist auch *eine früher gebliebene Lücke* ausgefüllt: Die Kriterien, die sich in § 3 des 8. Kap. für die Primitivität oder Imprimitivität einer Gruppe der Ebene (x, y) ergaben, sind nicht nur, wie dort bewiesen, notwendig, sondern auch hinreichend. Wie man im Fall, dass die dortigen Δ_{ikl} alle Null sind, verfährt, ist ebenfalls leicht einzusehen. Man hat nur zu bedenken, dass es dort darauf ankam, die bei der erweiterten Gruppe in den *drei* Veränderlichen x, y, y' invarianten Gebilde zu bestimmen.

Endlich ist noch zu bemerken, dass wir immer nur *im Endlichen gelegene Gebilde* ins Auge gefasst haben. Wie man auch unendlich ferne mit Hülfe homogener Coordinaten exact untersuchen kann, werden wir im nächsten Paragraphen in einigen Beispielen sehen.

Beispiele

Es ist sehr nützlich, die verschiedenen Möglichkeiten invarianter Gebilde in Beispielen kennen zu lernen. Wir geben daher mehrere solche.

Proj. Gruppe einer Curve 3. Ordnung.

1. Beispiel: Die infinitesimalen Transformationen

$$p + 2xq + 3yr$$
$$xp + 2yq + 3zr$$
$$3(x^2p + xyq + xzr) - 2yp - zq$$

erzeugen eine dreigliedrige Gruppe, wie man durch Klammerbildung erkennt. Hier verschwindet die dreireihige Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3y \\ x & 2y & 3z \\ 3x^2 - 2y & 3xy - z & 3xz \end{vmatrix} \equiv -3(4x^3z - 3x^2y^2 + 4y^3 - 6xyz + z^2)$$

nicht identisch. Die Gruppe ist demnach transitiv. Die dreireihige Determinante verschwindet nur für die Punkte der Fläche vierter Ordnung:

$$4x^3z - 3x^2y^2 + 4y^3 - 6xyz + z^2 = 0.$$

Setzen wir alle zweireihigen Determinanten gleich Null, so ergiebt sich die Raumcurve dritter Ordnung

$$y - x^2 = 0, \quad z - x^3 = 0.$$

Alle einreihigen Determinanten verschwinden für keinen im Endlichen gelegenen Punkt. Jene Fläche vierter Ordnung und diese Raumcurve dritter Ordnung sind die beiden einzigen invarianten Mannigfaltigkeiten (im Endlichen) und zwar kleinste. Die Gruppe besteht aus allen projectiven Transformationen des Raumes, welche die Curve dritter Ordnung invariant lassen, also aus den Transformationen, die Ebenen in Ebenen und die Punkte der Curve unter einander transformieren*). Da ist es denn selbstverständlich, dass die von Schmiegungsebenen der Curve umhüllte Fläche, also die Developpabele der Curve, invariant bleibt, da Schmiegungsebene in Schmiegungsebene übergeht. Diese Fläche ist eben jene Fläche vierter Ordnung. (Fig. 35.)

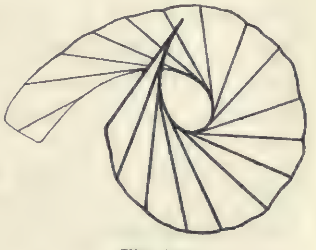


Fig. 35.

Proj. Gruppe aller Erzeugenden einer Schar einer Fläche 2. Ordnung.

2. Beispiel: Bei der von den infinitesimalen Transformationen

$$q + xr$$
$$yq + zr$$
$$(xy - z)p + y^2q + yzr$$

erzeugten dreigliedrigen projectiven Gruppe verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & y & z \\ xy - z & y^2 & yz \end{vmatrix} \equiv -(xy - z)^2$$

nicht identisch. Die Gruppe ist also transitiv und lässt die Fläche zweiten Grades

$$xy - z = 0$$

invariant. Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten giebt ebenfalls diese Fläche. Alle Punkte der Fläche haben also nur je eine Fortschreitungsrichtung, die Fläche zerfällt in kleinere invariante Mannig-

---

*) Obgleich wir die projectiven Transformationen des Raumes noch nicht besprochen haben, wird es dem Leser nicht schwer fallen, die Theorie der projectiven Transformationen der Ebene auf den Raum zu übertragen (vgl. 19. Kap.).

faltigkeiten, in Curven. In der That ist für $z = xy$ bei der ersten infinitesimalen Transformation

$$\delta x = 0, \quad \delta y = \delta t,$$

bei der zweiten

$$\delta x = 0, \quad \delta y = y \delta t,$$

bei der dritten

$$\delta x = 0, \quad \delta y = y^2 \delta t,$$

also stets $\delta x = 0$. Mithin bleibt jeder Punkt der Fläche $z = xy$ beständig auf der durch ihn gehenden Curve, längs deren x constant ist. Diese Curve ist aber eine der geradlinigen Erzeugenden der Fläche. Es bleibt also jede Gerade der einen Schar der Erzeugenden

$$x = a, \quad z - ay = 0$$

einzeln invariant. Diese Geraden sind kleinste invariante Mannigfaltigkeiten, da die einreihigen Determinanten für im Endlichen gelegene Punkte nicht sämtlich verschwinden. Die Gruppe besteht, wie man nachweisen kann, aus allen ∞^3 projectiven Transformationen, welche die Geraden der einen Schar der Erzeugenden der Fläche zweiten Grades einzeln invariant lassen.

Proj. Gruppe der Cayley-schen Fläche.

3. Beispiel: Die dreigliedrige projective Gruppe

$$p + 2xq + 3yr$$
$$xp + 2yq + 3zr$$
$$q + 3xr$$

ist transitiv, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & 3y \\ x & 2y & 3z \\ 0 & 1 & 3x \end{vmatrix} \equiv 3(3xy - z - 2x^3)$$

nicht identisch verschwindet. Ihr Nullsetzen giebt eine invariante Fläche dritten Grades, nämlich die *Cayley'sche Linienfläche.* Die zweireihigen Determinanten sind für keinen im Endlichen gelegenen Punkt sämtlich Null. Also existiert im Endlichen nur ein invariantes Gebilde, eben jene Fläche, deren Punkte sich vermöge der Gruppe frei auf ihr bewegen können. Die vorliegende Gruppe besteht, wie man zeigen kann, aus allen projectiven Transformationen, welche die Cayley'sche Linienfläche invariant lassen.

4. *Beispiel:* Bei der im vorigen Paragraphen betrachteten ebenfalls projectiven Gruppe

Proj. Gruppe einer Kegelschar.

$$\begin{gathered} xq - yp \\ xp + yq + zr \\ x^2p + xyq + xzr \\ xyp + y^2q + yzr \end{gathered}$$

haben wir die Matrix:

$$\begin{vmatrix} -y & x & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \end{vmatrix}.$$

Die dreireihigen Determinanten verschwinden sämtlich identisch, die Gruppe ist intransitiv. Die zweireihigen Determinanten verschwinden nicht sämtlich identisch. Daher kommt gerade eine Invariante vor, nämlich die bereits früher bestimmte $\frac{x^2 + y^2}{z^2}$, die gleich Constans gesetzt, eine Kegelschar vorstellt. Die zweireihigen Determinanten verschwinden aber einmal für $x = y = 0$, dann auch für $z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, also für die Punkte der z-Axe und für die beiden imaginären Geraden, die in der xy-Ebene vom Anfangspunkt aus nach den imaginären Kreispunkten gehen. Die einreihigen Determinanten verschwinden sämtlich im Endlichen nur für den Anfangspunkt $x = y = z = 0$. Es bleiben also ausser den schon früher bestimmten Kegeln im Endlichen nur noch die genannten drei Geraden und der Anfangspunkt invariant. Alle diese Gebilde sind kleinste invariante Mannigfaltigkeiten, mit anderen Worten: Ein Punkt eines derselben geht vermöge der Gruppe in alle Punkte desselben über. Die Gruppe besteht, wie man zeigen kann, aus allen projectiven Transformationen, die jeden der obigen ∞^1 Kegel in Ruhe lassen.

5. *Beispiel:* Die dreigliedrige projective Gruppe:

Proj. Gruppe einer Fläche 2. Ordnung und einer Ebene.

$$\begin{gathered} p + q + (x + y)r \\ xp + yq + 2zr \\ (x^2 + xy - z)p + (xy + y^2 - z)q + (x + y)zr \end{gathered}$$

ist intransitiv, da ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x + y \\ x & y & 2z \\ x^2 + xy - z & xy + y^2 - z & xz + yz \end{vmatrix} \equiv 0$$

ist. Die zweireihigen Determinanten verschwinden nicht sämtlich iden-

tisch. Die Gruppe besitzt daher nur eine Invariante Φ, die sich aus dem vollständigen System

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + 2z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

leicht bestimmen lässt:

$$\Phi \equiv \frac{z - xy}{(x-y)^2}.$$

Daher bleiben alle Flächen zweiten Grades

$$z - xy - \text{Const.}\,(x-y)^2 = 0$$

einzeln invariant. Sie bilden ein Büschel, in dem die Ebene $x - y = 0$ enthalten ist. Alle zweireihigen Determinanten verschwinden nur für

$$z - xy = 0, \quad x - y = 0,$$

also für alle Punkte des allen unseren Flächen gemeinsamen Kegelschnittes. Die einreihigen Determinanten verschwinden für keinen im Endlichen gelegenen Punkt identisch. Hier also kann sich vermöge der Gruppen jeder Punkt allgemeiner Lage auf der durch ihn gehenden Fläche des Büschels beliebig bewegen; jeder Punkt des obigen Kegelschnittes aber kann sich nur noch längs dieses Kegelschnittes bewegen; kein im Endlichen gelegener Punkt bleibt für sich invariant. Die Gruppe besteht, wie gezeigt werden kann, aus allen projectiven Transformationen, welche die Fläche zweiten Grades $z = xy$ und die Ebene $x = y$ in Ruhe lassen.

Proj. Gruppe eines Kegels und einer Taugentialebene.

6. Beispiel: Betrachten wir die Gruppe

$$x_3 p_1 + x_1 p_2$$

$$x_1 p_1 + 2x_2 p_2$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & 0 \\ x_1 & 2x_2 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \equiv - x_3(x_1{}^2 - 2x_2x_3).$$

Diese Determinante verschwindet nicht identisch. Setzen wir sie gleich Null, so kommt:

$$x_3 = 0 \text{ oder } x_1{}^2 - 2x_2x_3 = 0.$$

Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten giebt

$$x_1 = x_3 = 0,$$

Nullsetzen aller einreihigen:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Deuten wir x_1, x_2, x_3 als gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume, so sehen wir: Die Gruppe ist transitiv. Es bleibt bei ihr der Kegel zweiten Grades

$$x_1^2 - 2x_2x_3 = 0$$

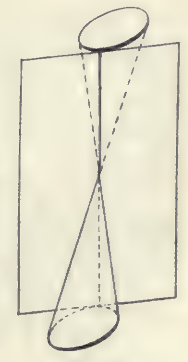
und eine Tangentialebene des Kegels

$$x_3 = 0$$

invariant. Ferner giebt es eine einzeln invariante Gerade

$$x_1 = x_3 = 0,$$

nämlich die Kegelkante, längs deren die Ebene berührt. Schliesslich bleibt noch die Spitze $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ des Kegels in Ruhe. (Fig. 36.) Jeder Punkt allgemeiner Lage auf dem Kegel bez. in der Ebene kann vermöge der Gruppe den ganzen Kegel bez. die ganze Ebene durchlaufen, ebenso ein Punkt jener Kante die ganze Kante. —


Fig. 36.

Auffassung als Gruppe in der Ebene.

Wenn wir nun andererseits x_1, x_2, x_3 *als* ***homogene*** *Coordinaten in der Ebene* (xy) *deuten*, indem wir etwa

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

setzen, so haben wir eine Gruppe der Ebene vor uns. Bei ihr bleibt der Kegelschnitt

$$x^2 - 2y = 0$$

in Ruhe, sowie eine unendlich ferne Tangente $(x_3 = 0)$. $x_1 = x_3 = 0$ stellt jetzt einen invarianten Punkt dar, nämlich den unendlich fernen Berührpunkt, während $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ jetzt, da wir es mit homogenen Coordinaten zu thun haben, kein invariantes geometrisches Gebilde liefert. Wenn wir die Incremente

$$\delta x = \delta \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_3 \delta x_1 - x_1 \delta x_3}{x_3^2},$$

$$\delta y = \delta \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3 \delta x_2 - x_2 \delta x_3}{x_3^2}$$

bei der Gruppe berechnen, so liefern die beiden ersten infinitesimalen Transformationen in x, y:

$$p + xq$$

$$xp + 2yq,$$

während bei der dritten x, y gar nicht geändert werden. $p + xq$, $xp + 2yq$ stellt aber die projective Gruppe dar, die den Kegelschnitt $x^2 - 2y = 0$ und seinen unendlich fernen Punkt in Ruhe lässt.

§ 4. Zur Bestimmung aller bei einer Gruppe in n Veränderlichen invarianten Gleichungensysteme.

Es ist nicht schwer, unsere Theorien auf Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen zu übertragen. Es gelingt dies ohne Mühe, wenn man den Begriff eines Raumes von n Dimensionen benutzt und überhaupt den Mannigfaltigkeitsbegriff auf beliebig viele Dimensionen ausdehnt.

Für unsere Zwecke mag es genügen, wenn wir nur das Ergebnis dieser Verallgemeinerung als Theorem formulieren und es durch Beispiele erläutern. Eine detaillierte Durchführung der früheren Betrachtungen für n Veränderliche findet der Leser an anderer Stelle*).

Allgemeines Ergebnis.

Theorem 29: *Erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen*

$$X_k f \equiv \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ eine r-gliedrige Gruppe, so besitzt sie keine Invarianten und heisst alsdann transitiv, wenn nicht alle n-reihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdot\,\cdot & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdot\,\cdot & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdot\,\cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

identisch verschwinden, sodass insbesondere dann auch $n \geqq r$ sein muss. Die Gruppe heisst im anderen Falle intransitiv und besitzt gerade ϱ von einander unabhängige Invarianten $\Phi_1, \Phi_2 \,.\,.\, \Phi_\varrho$, sobald zwar alle $(n - \varrho + 1)$-reihigen, nicht aber alle $(n - \varrho)$-reihigen Determinanten der Matrix identisch verschwinden. Alsdann wird der Raum der Wertsysteme $x_1 \,.\,.\, x_n$ in ∞^ϱ einzeln invariante Teilgebiete

$$\Phi_1 = a_1, \quad \Phi_2 = a_2, \quad .\,.\, \Phi_\varrho = a_\varrho$$

zerlegt. Auch ist jedes Gleichungensystem zwischen $\Phi_1 \,.\,.\, \Phi_\varrho$

*) Sophus Lie, Theorie der Transformationsgruppen, I. Abschnitt bearb. unter Mitwirkg. von Engel, Leipzig 1888, Kap. 14.

allein bei der Gruppe invariant und stellt eine invariante Mannigfaltigkeit dar. — *Es kann aber sowohl bei intransitiven als auch bei transitiven Gruppen noch andere invariante Gleichungensysteme geben. Sie zu finden, setze man alle* $(q+1)$-*reihigen Determinanten der Matrix gleich Null. Giebt es* ∞^p *Wertsysteme* $x_1 \ldots x_n$, *für welche zwar diese, nicht aber alle* q-*reihigen Determinanten verschwinden, so stellt ihre Gesamtheit ein invariantes Gleichungensystem dar, dem eine* p-*fach ausgedehnte invariante Mannigfaltigkeit im Raume der* $x_1 \ldots x_n$ *entspricht. Jeder Punkt* $(x_1 \ldots x_n)$ *dieses Raumes, der auf der Mannigfaltigkeit liegt, erfährt bei der Gruppe gerade* q *von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen, sodass die Mannigfaltigkeit, wenn* $q < p$ *ist, in* ∞^{q-p} *einzeln invariante Mannigfaltigkeiten zerfällt. Auf diese Weise findet man, indem man* q *alle Werte* 0, 1 .. r *bez.* n *durchlaufen lässt, alle bei der Gruppe einzeln invarianten kleinsten Mannigfaltigkeiten. Jede invariante Mannigfaltigkeit ist entweder eine dieser kleinsten, oder sie besteht aus einer Schar von solchen. Entsprechendes gilt von jedem invarianten Gleichungensystem.*

Beispiele. Proj. Gruppe einer Curve 3. Ordnung in homog. Coordinat.

1. Beispiel: Die vier von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:

$$x_4p_1 + 2x_1p_2 + 3x_2p_3$$
$$x_1p_1 + 2x_2p_2 + 3x_3p_3$$
$$2x_2p_1 + x_3p_2 + 3x_1p_4$$
$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

erzeugen eine Gruppe, wie man leicht beweist. Hier ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_4 & 2x_1 & 3x_2 & 0 \\ x_1 & 2x_2 & 3x_3 & 0 \\ 2x_2 & x_3 & 0 & 3x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} \equiv -3(4x_1^3x_3 - 3x_1^2x_2^2 + 4x_2^3x_4 - \\ - 6x_1x_2x_3x_4 + x_3^2x_4^2)$$

nicht identisch Null. Die Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 wollen wir — indem wir von obigen der Deutung im Raume von vier Dimensionen keinen Gebrauch machen — als *homogene* Punktcoordinaten eines Raumes von drei Dimensionen auffassen, indem wir

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

als gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten benutzen. Alsdann bestimmt

die Gruppe *projective* Transformationen des Raumes, denn die Gleichung einer beliebigen Ebene

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

wird vermöge der infinitesimalen Transformationen der Gruppe wieder in lineare homogene Gleichungen übergeführt. Die infinitesimale Transformation $x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$ ändert $x_1 .. x_4$ sämtlich um den gleichen Factor, lässt also die Punkte des Raumes (x, y, z) in Ruhe, da es bei homogenen Coordinaten nur auf die Verhältnisse ankommt. Daraus lässt sich schliessen, dass unsere Gruppe in gewöhnlichen Coordinaten x, y, z geschrieben bloss dreigliedrig ist. In der That bestimmt unsere Gruppe dieselben Transformationen des Raumes wie die in Beispiel 1 des § 3 behandelte. Man kann dies durch Berechnung der Incremente von x, y, z ohne Mühe einsehen. Nullsetzen der obigen Determinante giebt eine Fläche vierter Ordnung, für deren Punkte nicht auch sämtliche dreireihigen Determinanten identisch Null sind. Die dreireihigen Determinanten verschwinden vielmehr nur dann sämtlich, wenn

$$x_2x_4 = x_1^2, \quad x_3x_4^2 = x_1^3$$

oder, nicht-homogen geschrieben:

$$y = x^2, \quad z = x^3$$

ist. Dies giebt die uns bekannte Raumcurve dritter Ordnung. Die zweireihigen Determinanten sind Null für $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Diesen Werten entspricht aber kein Punkt des Raumes. *Der Vorzug der homogenen Behandlung* der projectiven Gruppe der Raumcurve dritter Ordnung vor der früheren besteht darin, dass wir jetzt auch das *Unendlichferne* behandeln können, denn $x_4 = 0$ stellt die unendlich ferne Ebene dar. Wir sehen, dass kein unendlich fernes Gebilde invariant bleibt.

Wie in diesem Beispiel, so ist allgemein zu bemerken, dass die in Theorem 29 gegebene *begriffliche* Deutung bei Benutzung *homogener* Coordinaten sich insofern ändert, als in diesem Falle ein Punkt nur dann q von einander unabhängige Fortschreitungen erfährt, sobald nicht alle $(q + 1)$ reihigen Determinanten für ihn Null sind. Wir begründen dies in Kap. 19 genauer.

Proj. Gruppe aller Geraden einer Schar auf einer Fläche 2. Ordnung.

2. Beispiel: Ähnlich behandelt man die anderen Beispiele des vorigen Paragraphen. So lässt die Gruppe

$$x_4p_2 + x_1p_3 \quad x_2p_2 + x_3p_3 \quad x_3p_1 + x_2p_4 \quad x_1p_1 + x_4p_4$$

bei Einführung nicht homogener Coordinaten x, y, z wie im 1. Beispiel alle Erzeugenden der einen Schar der Fläche zweiter Ordnung $z = xy$ in Ruhe.

Proj. Gruppe der Cayley-schen Fläche.

3. *Beispiel:* Bei der Gruppe

$$\begin{array}{l} x_4p_1 + 2x_1p_2 + 3x_2p_3 \\ x_1p_1 + 2x_2p_2 + 3x_3p_3 \\ \qquad\qquad x_4p_2 + 3x_1p_3 \\ x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4, \end{array}$$

die sich bei der Deutung von x_1, x_2, x_3, x_4 als homogene Punktcoordinaten des Raumes (x, y, z):

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

mit der projectiven Gruppe der Cayley'schen Linienfläche im 3. Beispiel des vorigen Paragraphen deckt, ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_4 & 2x_1 & 3x_2 & 0 \\ x_1 & 2x_2 & 3x_3 & 0 \\ 0 & x_4 & 3x_1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} \equiv 3x_4(3x_1x_2x_4 - x_3x_4^2 - 2x_1^3)$$

nicht identisch Null. Sie stellt gleich Null gesetzt die Cayley'sche Fläche und die Ebene $x_4 = 0$, d. h. die unendlich ferne Ebene dar. Nullsetzen der dreireihigen Determinanten giebt:

$$x_1 = x_4 = 0,$$

Nullsetzen der zweireihigen:

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0,$$

Nullsetzen der einreihigen:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Letzteres ist in homogenen Coordinaten bedeutungslos. Invariant sind also zunächst die Cayley'sche Fläche und die unendlich ferne Ebene, ferner die Gerade $x_1 = x_4 = 0$, d. h. die unendlich ferne Gerade der Ebene $x = 0$ und als einzeln invarianter Punkt der unendlich ferne Punkt der z-Axe. Alle diese Gebilde sind kleinste invariante Mannigfaltigkeiten. Die Invarianz der unendlich fernen Ebene bedeutet, da die Gruppe projectiv ist, dass Parallelen in Parallelen übergehen, die Invarianz der unendlich fernen Geraden der Ebene $x = 0$, dass Parallelen zu dieser Ebene in ebensolche, die Invarianz des unendlich

fernen Punktes der z-Axe, dass Parallelen zur z-Axe in ebensolche übergehen. Wir machen abermals darauf aufmerksam, dass man durch Benutzung der homogenen Schreibweise auch das Unendlichferne zu untersuchen vermag. Wie man zur homogenen Schreibweise einer vorgelegten projectiven Gruppe des Raumes gelangt, werden wir im 19. Kapitel erkennen.

Kapitel 17.

Ähnlichkeit zweier Gruppen. — Reciproke einfach transitive Gruppen.

Die Frage, wann eine gegebene Gruppe durch Einführung neuer Veränderlicher in eine andere gegebene Gruppe verwandelt werden kann, wird uns in diesem Kapitel zunächst beschäftigen. Es ist nicht schwer, Kriterien abzuleiten, die für diese Überführbarkeit notwendig sind. Dass sie auch hinreichen, wollen wir aber nur für einen wichtigen speciellen Fall, für die einfach transitiven Gruppen, beweisen. Mit diesen besonderen Gruppen werden wir uns alsdann eingehender beschäftigen.

§ 1. Kriterium der Ähnlichkeit zweier Gruppen.

Führen wir in die Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe

$$x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n) \tag{1}$$

neue Veränderliche $y_1 \,.\,.\, y_n$, $y_1' \,.\,.\, y_n'$ vermöge einer Substitution ein, indem wir

$$y_i = \omega_i(x_1 \,.\,.\, x_n) \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n)$$

und entsprechend

$$y_i' = \omega_i(x_1' \,.\,.\, x_n') \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n)$$

setzen, so bestimmen die hervorgehenden Gleichungen

$$y_i' = F_i(y_1 \,.\,.\, y_n,\ a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n) \tag{2}$$

wiederum eine r-gliedrige Gruppe. Dies zeigten wir in § 4 des 6. Kap. für den Fall $n = 2$; die damals gegebenen Betrachtungen gelten aber offenbar für beliebiges n.

Ersetzen wir nun in der Gruppe (2) die Parameter $a_1 \,.\,.\, a_r$ durch r andere Parameter:

$$\mathfrak{a}_k = \alpha_k(a_1 \,.\,.\, a_r) \quad (k = 1,\ 2 \,.\,.\, r),$$

die von einander unabhängige Functionen von $a_1 \dots a_r$ sind, so stellen selbstverständlich auch die hervorgehenden Gleichungen:

$$y_i' = \mathfrak{f}_i(y_1 \dots y_n, \mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

eine Gruppe dar, nämlich die Gruppe (2) selbst, nur in anderer analytischer Fassung.

Diese Bemerkungen führen uns dazu, den schon in § 4 des 6. Kap. angedeuteten Begriff der Ähnlichkeit zweier Gruppen in der folgenden Weise auf n Dimensionen auszudehnen und zu definieren:

Definition d. Ähnlichkeit.

Zwei r-gliedrige Grupqen

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{1}$$

$$y_i' = \mathfrak{f}_i(y_1 \dots y_n, \mathfrak{a}_1 \dots \mathfrak{a}_r) \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{3}$$

heissen ähnlich, wenn die eine durch Einführung neuer Veränderlicher und Parameter

$$y_i = \omega_i(x_1 \dots x_n) \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{4}$$

$$\mathfrak{a}_k = \alpha_k(a_1 \dots a_r) \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

in die andere übergeführt werden kann.

Durch Benutzung des Begriffes der infinitesimalen Transformationen gelingt es nun, dieser Definition eine wesentlich einfachere Form zu geben, die praktisch den Vorzug verdient.

Die inf. Trf. zweier ähnlicher Gruppen.

Die Gruppe (1) wird von r von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt:

$$X_k f \equiv \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \dots r),$$

die Gruppe (3) etwa von diesen:

$$Y_k f \equiv \sum_1^n {}_i\, \eta_{ki}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1, 2 \dots r).$$

Wir wissen, dass die Gruppe (1) in ∞^{r-1} eingliedrige Untergruppen zerfällt. Vermöge (4) geht jede dieser eingliedrigen Untergruppen in eine eingliedrige Untergruppe der Gruppe (3) über — nach Satz 5, § 4 des 6. Kap. Mithin geht auch jede infinitesimale Transformation $X_k f$ von (1) vermöge (4) in eine infinitesimale Transformation von (3) über*). $X_k f$ wird somit vermöge (4) die Form Σ Const. Yf annehmen.

---

*) Vgl. hierzu „Diffgln. m. inf. Trf.", § 2 des 14. Kap.

Wenn umgekehrt die infinitesimalen Transformationen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe (1) vermöge einer Substitution (4) in die infinitesimalen Transformationen Σ Const. Yf einer anderen r-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ übergehen, so gehen die von den $X_k f$ erzeugten eingliedrigen Gruppen vermöge (4) in die von den Σ Const. Yf erzeugten über, d. h. die Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ wird durch die Transformation (4) in die Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ verwandelt.

Daher sagen wir:

Satz 1: *Zwei r-gliedrige Gruppen in gleichvielen Veränderlichen sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn es eine Transformation giebt, die r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der einen in solche der andern überführt.*

Wir wissen ferner, dass eine Transformation, die Uf und Vf in, sagen wir, $\overline{U}f$ und $\overline{V}f$ überführt, auch

$$U(Vf) - V(Uf)$$

in

$$\overline{U}(\overline{V}f) - \overline{V}(\overline{U}f)$$

oder kurz (UV) in $(\overline{U}\,\overline{V})$ verwandelt*). Nach dem Hauptsatze bestehen nun zwischen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ paarweis Beziehungen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i,\ k = 1,\ 2\,.\,.\, r),$$

in denen die c_{iks} Constanten sind. Wenn nun $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ vermöge (4) in $\mathfrak{Y}_1 f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_r f$ übergehen, so muss also auch

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} \mathfrak{Y}_s f$$

sein. Die $\mathfrak{Y}_1 f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_r f$ sind aber bei der Voraussetzung, dass die Gruppen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ und $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ vermöge (4) mit einander ähnlich seien, r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$.

Daher folgt:

Die Klammerausdrücke zweier ähnlicher Gruppen.

Satz 2: *Sind zwei r-gliedrige Gruppen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ und $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ mit einander ähnlich, so enthält die Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ immer r solche*

---

*) Von diesem Satze haben wir schon hin und wieder stillschweigend Gebrauch gemacht. Er folgt sofort daraus, dass die Gleichungen

$$Uf = \overline{U}f, \quad Vf = \overline{V}f,$$

die vermöge der Transformation identisch bestehen, die Gleichung

$$U(Vf) - V(Uf) = \overline{U}(\overline{V}f) - \overline{V}(\overline{U}f)$$

nach sich ziehen.

von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1 f \,..\, \mathfrak{Y}_r f$, *dass in den Gleichungen*

$$(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, d_{iks} \mathfrak{Y}_s f \quad (i,\ k = 1,\ 2\,..\, r)$$

die Constanten d_{iks} *dieselben Zahlenwerte wie die entsprechenden Constanten in den Gleichungen*

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i,\ k = 1,\ 2\,..\, r)$$

besitzen, sodass also $d_{iks} = c_{iks}$ *ist.*

Dieser Satz lässt sich unter Benutzung einer sich von selbst darbietenden Redeweise kürzer so ausdrücken:

Satz 3: *Zwei mit einander ähnliche Gruppen sind immer gleichzusammengesetzt**).

Jedoch das hiermit gefundene Kriterium reicht noch nicht für die Ähnlichkeit zweier Gruppen aus. Z. B. die Gruppen in $x,\ y$: $p \quad yp$ und $p \quad q$ sind beide zweigliedrig und gleichzusammengesetzt. Dennoch giebt es offenbar keine Transformation, vermöge deren die erste in die zweite übergehen könnte, denn bei der ersten bleiben ∞^1 Curven $y = \text{Const.}$ einzeln in Ruhe, während bei der zweiten keine ∞^1 einzeln invariante Curven vorhanden sind.

Zur Ableitung hinreichend. Kriterien d. Ähnlichkeit.

Um zu hinreichenden Kriterien für die Ähnlichkeit der beiden Gruppen $X_1 f \,..\, X_r f$ und $Y_1 f \,..\, Y_r f$ zu gelangen, stellen wir folgende Überlegungen an:

Da die r infinitesimalen Transformationen $X_1 f \,..\, X_r f$ von einander unabhängig sind, so besteht zwischen ihnen keine lineare Relation mit constanten Coefficienten. Wohl aber können zwischen ihnen lineare Relationen mit von $x_1 \,..\, x_n$ abhängigen Coefficienten bestehen. Um sogleich den allgemeinen Fall ins Auge zu fassen, wollen wir annehmen, dass sie durch $r - q$ verschiedene lineare Relationen verbunden sind. Alsdann können wir die infinitesimalen Transformationen der Gruppe so auswählen, dass zwischen den q ersten: $X_1 f \,.\, X_q f$ keine lineare Relation vorhanden ist, während die $r-q$ übrigen: $X_{q+1} f \,..\, X_r f$ sich durch jene in dieser Weise ausdrücken lassen:

---

*) Führt man den Begriff des holoedrischen Isomorphismus ein, der zum Schluss des § 4 des 5. Kap. gestreift wurde, so kann man zeigen, dass zwei gleichzusammengesetzte Gruppen immer holoedrisch isomorph sind, und umgekehrt. Infolgedessen lässt sich der obige Satz auch so aussprechen: *Zwei mit einander ähnliche Gruppen sind stets holoedrisch isomorph.*

$$(5)\qquad X_{q+j}f \equiv \varphi_{j1}(x_1 \,.\,.\, x_n) X_1 f + \cdot\cdot + \varphi_{jq}(x_1 \,.\,.\, x_n) X_q f$$
$$(j = 1,\ 2 \,.\,.\, r - q).$$

Sind nun die Gruppen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ und $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ mit einander ähnlich, d. h. giebt es solche neue Veränderliche

$$(4)\qquad y_i = \omega_i(x_1 \,.\,.\, x_n) \quad (i = 1,\ 2 \cdot\cdot n),$$

welche die $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ auf die Form

$$X_k f = \mathfrak{Y}_k f \equiv \sum_1^r {}^l\, e_{kl} Y_l f \quad (k = 1,\ 2 \,.\,.\, r)$$

bringen, so können $\mathfrak{Y}_1 f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_q f$ durch keine lineare Relation mit einander verknüpft sein, während $\mathfrak{Y}_{q+1} f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_r f$ sich durch jene ausdrücken lassen müssen in der Form:

$$(6)\qquad \mathfrak{Y}_{q+j} f \equiv \psi_{j1}(y_1 \,.\,.\, y_n) \mathfrak{Y}_1 f + \cdot\cdot + \psi_{jq}(y_1 \,.\,.\, y_n) \mathfrak{Y}_q f$$
$$(j = 1,\ 2 \,.\,.\, r - q),$$

indem allgemein der Coefficient $\varphi_{jl}(x_1 \,.\,.\, x_n)$ vermöge der Substitution (4) in den Coefficienten $\psi_{jl}(y_1 \,.\,.\, y_n)$ übergeht. Also folgt:

Allgem. Satz über ähnl. Gruppen.

Satz 4: *Sind zwei r-gliedrige Gruppen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ und $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ in den n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ bez. $y_1 \,.\,.\, y_n$ mit einander ähnlich, und besteht zwischen $X_1 f \,.\,.\, X_q f$ $(q \leqq r)$ keine lineare Relation, während allgemein*

$$X_{q+j} f \equiv \varphi_{j1}(x_1 \,.\,.\, x_n) X_1 f + \cdot\cdot + \varphi_{jq}(x_1 \,.\,.\, x_n) X_q f$$
$$(j = 1,\ 2 \,.\,.\, r - q)$$

ist, so lassen sich unter den infinitesimalen Transformationen der Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_r f$ r von einander unabhängige $\mathfrak{Y}_1 f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_r f$ derart auswählen, dass erstens die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_k) &\equiv \sum_1^r {}^s\, c_{iks} X_s f \\ \textit{und}\qquad & \\ (\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_k) &\equiv \sum_1^r {}^s\, d_{iks} \mathfrak{Y}_s f \end{aligned}\right\} (i,\ k = 1,\ 2 \,.\,.\, r)$$

dieselbe Form haben, also $c_{iks} = d_{iks}$ ist, dass zweitens zwischen $\mathfrak{Y}_1 f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_q f$ keine lineare Relation besteht, aber drittens Beziehungen von der Form

$$\mathfrak{Y}_{q+j} f \equiv \psi_{j1}(y_1 \,.\,.\, y_n) \mathfrak{Y}_1 f + \cdot\cdot + \psi_{jq}(y_1 \,.\,.\, y_n) \mathfrak{Y}_q f$$
$$(j = 1,\ 2 \,.\,.\, r - q)$$

vorhanden sind und viertens die $q(r - q)$ Gleichungen

$$\varphi_{jl}(x_1 \,.\,.\, x_n) = \psi_{jl}(y_1 \,.\,.\, y_n)$$
$$(j = 1,\ 2 \,.\,.\, r - q, \quad l = 1,\ 2 \,.\,.\, q)$$

weder einander widersprechen noch eine Relation zwischen $x_1 \ldots x_n$ *allein oder* $y_1 \ldots y_n$ *allein nach sich ziehen.*

Es kann umgekehrt bewiesen werden, dass die vier hier angegebenen Bedingungen auch für die Ähnlichkeit der beiden Gruppen $X_1 f \ldots X_r f$ und $Y_1 f \ldots Y_r f$ hinreichen. Wir wollen aber diesen Beweis der Umkehrung hier nicht bringen*), sondern nur einen speciellen, aber besonders interessanten Fall vollständig behandeln, den Fall nämlich, dass $n = r = q$ ist.

Immerhin giebt uns Satz 4 doch schon Mittel an die Hand, in bestimmten Beispielen die Frage, ob zwei vorgelegte Gruppen mit einander ähnlich sind, zu entscheiden.

Beispiel.

Beispiel: Wir wollen untersuchen, ob die Gruppe

$$q \quad p + xq \quad xp + 2yq$$

in x, y sich in die Gruppe

$$q_1 \quad p_1 \quad x_1 p_1 + 2 y_1 q_1$$

in x_1, y_1 überführen lässt. Zunächst sind beide Gruppen gleichzusammengesetzt. Zwischen den beiden ersten infinitesimalen Transformationen jeder der Gruppen besteht keine lineare Relation. Wohl aber ist die dritte infinitesimale Transformation jedesmal durch die beiden ersten linear ausdrückbar, denn es ist:

$$(5') \qquad \begin{aligned} xp + 2yq &\equiv (2y - x^2) \cdot q + x \cdot (p + xq), \\ x_1 p_1 + 2 y_1 q_1 &\equiv 2 y_1 \cdot q_1 + x_1 \cdot p_1 . \end{aligned}$$

Vermöge der Transformation, welche die drei ersten infinitesimalen Transformationen in die drei letzten überführt, muss also — wenn überhaupt eine solche existiert:

$$2y - x^2 = 2y_1, \quad x = x_1$$

sein. Diese Transformation kann also nur so lauten:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y - \frac{x^2}{2}.$$

Sie führt in der That die erste Gruppe in die zweite über. Wünschen wir die *allgemeinste* Transformation zu kennen, vermöge deren die beiden Gruppen mit einander ähnlich sind, so haben wir in der zweiten

---

*) Siehe Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Archiv for Math. Bd. 3 (1878); Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine endliche continuierliche Gruppe gestatten, Math. Ann. Bd. XXV (1884); Theorie der Transformationsgruppen, I. Abschnitt bearb. unter Mitw. von Engel, Leipzig, 1888, Kap. 19.

in der allgemeinsten Weise drei infinitesimale Transformationen so zu wählen, dass ihre Klammerausdrücke sich durch diese drei in derselben Weise ausdrücken, wie die Klammerausdrücke von $q, p + xq, xp + 2yq$ durch diese drei. Diese allgemeinste Auswahl der infinitesimalen Transformationen ist, wie man ohne Mühe findet:

$$\lambda q_1 \quad \mu p_1 \quad \varrho q_1 + \sigma p_1 + x_1 p_1 + 2 y_1 q_1.$$

Dabei bedeuten λ, μ, ϱ, σ irgend welche Constanten, von denen λ und μ nicht Null sind. Hier ist die dritte infinitesimale Transformation durch die beiden ersten linear ausdrückbar in der Form:

$$(6') \quad \varrho q_1 + \sigma p_1 + x_1 p_1 + 2 y_1 q_1 \equiv \frac{1}{\lambda}(\varrho + 2 y_1) \cdot \lambda q_1 + \frac{1}{\mu}(\sigma + x_1) \cdot \mu p_1.$$

Die gesuchte Transformation, vermöge deren die beiden Gruppen mit einander ähnlich sind, muss daher, wie aus (5′) und (6′) hervorgeht, die Relationen erfüllen:

$$2y - x^2 = \frac{1}{\lambda}(\varrho + 2 y_1), \quad x = \frac{1}{\mu}(\sigma + x_1).$$

Sie lautet daher — vorausgesetzt, dass sie überhaupt das Gewünschte leistet — notwendig so:

$$x_1 = \mu x - \sigma, \quad y_1 = \lambda y - \frac{\lambda}{2} x^2 - \frac{1}{2} \varrho.$$

In der That führt sie die erste Gruppe in die zweite über, wie man verificieren kann.

§ 2. Ähnlichkeit einfach transitiver Gruppen.

Die Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ ist transitiv, wenn $r \geqq n$ ist und unter $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ n infinitesimale Transformationen vorhanden sind, zwischen denen keine lineare Relation mit von $x_1 \,.\,.\, x_n$ abhängigen Coefficienten besteht. (Vgl. Theorem 29, § 4 des 16. Kap.) Wir nennen sie *einfach transitiv*, wenn insbesondere noch $n = r$ ist.

Einfach transitive Gruppe.

Eine n-gliedrige transitive Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_n f$ in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ heisst also eine einfach transitive Gruppe. In einer solchen Gruppe, deren endliche Gleichungen

$$x_i' = f_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ a_1 \,.\,.\, a_n) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

also nach $a_1 \,.\,.\, a_n$ auflösbar sind, giebt es gerade eine Transformation, die ein allgemeines Wertsystem $x_1 \,.\,.\, x_n$ in ein anderes allgemeines Wertsystem überführt. Ist in einer transitiven Gruppe die Gliederzahl $r > n$, so giebt es offenbar eine continuierliche Schar von ∞^{r-n} derartigen Transformationen.

Bei einer einfach transitiven Gruppe $X_1 f \dots X_n f$ besteht zwischen ihren n infinitesimalen Transformationen keine lineare Relation mit von $x_1 \dots x_n$ abhängigen Coefficienten. Gleichungen von der Form (5) des vorigen Paragraphen kommen hier also nicht vor; es ist eben die damalige Zahl q jetzt auch gleich n. Hieraus folgt, dass eine einfach transitive Gruppe nur mit solchen Gruppen ähnlich sein kann, die ebenfalls einfach transitiv sind.

Mithin ist es unsere Aufgabe — wenn wir die Umkehrung des Satzes 4 des vorigen Paragraphen für die einfach transitiven Gruppen beweisen wollen — zu zeigen, dass zwei einfach transitive Gruppen in gleich vielen Veränderlichen mit einander ähnlich sind, sobald sie nur gleiche Zusammensetzung haben.

Wir betrachten also zwei n-gliedrige einfach transitive Gruppen $X_1 f \dots X_n f$ und $Y_1 f \dots Y_n f$ in $x_1 \dots x_n$ bez. $y_1 \dots y_n$ und setzen voraus, dass sie gleich zusammengesetzt seien. Wir können annehmen, die infinitesimalen Transformationen seien schon so gewählt, dass mit

$$\left.\begin{aligned}(X_i X_k) &\equiv \sum_1^n {}_s\, c_{iks} X_s f \\ \text{auch}\qquad (Y_i Y_k) &\equiv \sum_1^n {}_s\, c_{iks} Y_s f\end{aligned}\right\} (i, k = 1, 2 \dots n)$$

ist. Alsdann bilden die n Differentialgleichungen:

$$X_i f + Y_i f = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{7}$$

ein gerade n-gliedriges vollständiges System in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$, da ja:

$$(X_i f + Y_i f,\ X_k f + Y_k f) \equiv \sum_1^n {}_s\, c_{iks} (X_s f + Y_s f)$$

ist. Dieses System besitzt also n Lösungen $\Omega_1 \dots \Omega_n$, die von einander unabhängig sind sowohl hinsichtlich $x_1 \dots x_n$ als auch hinsichtlich $y_1 \dots y_n$, denn die Gleichungen des vollständigen Systems (7) lassen sich sowohl nach $\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ als auch nach $\frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_n}$ auflösen. Lösen wir daher die n Gleichungen:

$$\Omega_k(x_1 \dots x_n,\ y_1 \dots y_n) = a_k \quad (k = 1, 2 \dots n) \tag{8}$$

nach $y_1 \dots y_n$ auf, so erhalten wir ein Gleichungensystem

$$y_i = \Phi_i(x_1 \dots x_n,\ a_1 \dots a_n) \quad (i = 1, 2 \dots n), \tag{9}$$

das eine Transformation von $x_1 \dots x_n$ in $y_1 \dots y_n$ darstellt. Unter $a_1 \dots a_n$

Trf., die einf. trans. Gr. in gleich zusammengesetzte überführen.

sollen hierbei beliebige Parameter verstanden werden. Diese Transformation (9) führt nun, behaupten wir, die Gruppe $X_1 f \dots X_n f$ in die Gruppe $Y_1 f \dots Y_n f$ über.

Nachweis.

Zum Beweise bemerken wir, dass das Gleichungensystem (8) in den $2n$ Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$ bei den n infinitesimalen Transformationen $X_i f + Y_i f$ *in sich übergeht*, also *invariant* bleibt oder — wie man sich auszudrücken pflegt — diese infinitesimalen Transformationen *gestattet**). Denn das Increment von Ω_k bei $X_i f + Y_i f$, d. h. $(X_i \Omega_k + Y_i \Omega_k)\delta t$ ist gleich Null, sodass Ω_k bei Ausführung von $X_i f + Y_i f$ beständig constant, gleich a_k, bleibt. Daher muss auch das dem System (8) äquivalente Gleichungensystem (9) die n infinitesimalen Transformationen $X_k f + Y_k f$ gestatten, mit anderen Worten: Wenn die Beziehungen (9) zwischen $x_1 \dots x_n$ und $y_1 \dots y_n$ hergestellt werden, so bleiben sie ungeändert, wenn man auf $x_1 \dots x_n$, $y_1 \dots y_n$ die n infinitesimalen Transformationen $X_k f + Y_k f$ ausführt. Es müssen daher die Gleichungen

$$(10) \qquad Y_k y_i = X_k \Phi_i \quad (i, k = 1, 2 \dots n),$$

die durch Ausübung von $X_k f + Y_k f$ auf (9) hervorgehen, vermöge (9) identisch bestehen.

Wenn andererseits in den $X_1 f \dots X_n f$ die neuen Veränderlichen $y_i = \Phi_i$ eingeführt werden sollen, so bildet man bekanntlich**)

$$\sum_1^n {}_i \, X_k \Phi_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

und eliminiert daraus $x_1 \dots x_n$ vermöge (9). Nach (10) sind also die so aus $X_1 f \dots X_n f$ entstehenden infinitesimalen Transformationen in $y_1 \dots y_n$ diese:

$$\sum_1^n {}_i \, Y_k y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \quad (k = 1, 2 \dots n),$$

d. h. $Y_1 f \dots Y_n f$ selbst, was zu beweisen war.

Allgemeinste derartige Transform.

Es lässt sich auch umgekehrt zeigen, dass diese Methode die *allgemeinste* Transformation (9) liefert, vermöge deren jedes $X_k f$ gerade in $Y_k f$ übergeht. Denn soll vermöge (9) allgemein $X_k f$ in $Y_k f$ übergehen, so muss vermöge (9) $X_k \Phi_i$ identisch mit $Y_k y_i$ werden, es muss also vermöge (9) der Ausdruck $X_k f + Y_k f$ verschwinden, sobald

---

*) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.", an vielen Stellen.

**) Vgl. Schluss des § 2 des 3. Kap.

darin f durch $y_k - \Phi_k$ ersetzt wird. Die Gleichungen (9) müssen folglich ein Lösungensystem des vollständigen Systems (7) darstellen.

Somit gilt das

Theorem 30: *Zwei einfach transitive Gruppen $X_1 f \, . \, . \, X_n f$ und $Y_1 f \, . \, . \, Y_n f$ in gleich vielen Veränderlichen $x_1 \, . \, . \, x_n$ bez. $y_1 \, . \, . \, y_n$ sind dann und nur dann mit einander ähnlich, wenn sie gleichzusammengesetzt sind. Will man sie in allgemeinster Weise in einander überführen, so hat man die n infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \, . \, . \, Y_n f$ der zweiten Gruppe in allgemeinster Weise so auszuwählen, dass mit*

Ähnlichkeit gleichzusammengesetzter einfach transitiver Gruppen.

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_k) &\equiv \sum_1^n {}^s\, c_{iks}\, X_s f \\ \textit{auch} \qquad (Y_i Y_k) &\equiv \sum_1^n {}^s\, c_{iks}\, Y_s f \end{aligned}\right\} \quad (i,\, k = 1,\, 2\, . \, . \, n)$$

ist, hat alsdann das vollständige System

$$X_i f + Y_i f = 0 \quad (i = 1,\, 2\, . \, . \, n)$$

zu integrieren und seine Integralgleichungen

$$\Omega_k(x_1 \, . \, . \, x_n,\, y_1 \, . \, . \, y_n) = a_k \quad (k = 1,\, 2\, . \, . \, n)$$

nach $y_1 \, . \, . \, y_n$ aufzulösen. Die dadurch hervorgehenden Transformationen

$$y_i = \Phi_i(x_1 \, . \, . \, x_n,\, a_1 \, . \, . \, a_n) \quad (i = 1,\, 2\, . \, . \, n)$$

sind die allgemeinsten, welche die Überführung der beiden Gruppen in einander leisten. $a_1 \, . \, . \, a_n$ können dabei als beliebige Constanten gewählt werden, für die $\Phi_1 \, . \, . \, \Phi_n$ von einander unabhängig bleiben.

Beispiel: Die allgemeine projective Gruppe der Curve dritter Ordnung des Raumes (x, y, z):

Beispiel.

$$y = x^2, \quad z = x^3$$

lautet, wie wir in einem früheren Beispiel bemerkten (siehe § 3 des 16. Kap.):

$$\begin{gathered} p + 2xq + 3yr \\ xp + 2yq + 3zr \\ 3(x^2 p + xyq + xzr) - 2yp - zq. \end{gathered}$$

Sie ist einfach transitiv, da ihre Determinante nicht identisch verschwindet und hier $n = r = 3$ ist. Bezeichnen wir ihre infinitesi-

malen Transformationen der Reihe nach mit X_1f, X_2f, X_3f, so haben wir

$$(X_1X_2) \equiv X_1f, \quad (X_1X_3) \equiv 2X_2f, \quad (X_2X_3) \equiv X_3f.$$

Andererseits ist die allgemeine projective Gruppe, welche die geradlinigen Erzeugenden der einen Schar der Fläche zweiten Grades

$$z_1 - x_1y_1 = 0$$

in Ruhe lässt, die ebenfalls schon besprochene:

$$q_1 + x_1r_1 \qquad y_1q_1 + z_1r_1 \qquad (x_1y_1 - z_1)p_1 + y_1^2q_1 + y_1z_1r_1.$$

Sie ist ebenfalls einfach transitiv. Bezeichnen wir ihre infinitesimalen Transformationen mit Y_1f, Y_2f, Y_3f, so haben wir

$$(Y_1Y_2) \equiv Y_1f, \quad (Y_1Y_3) \equiv 2Y_2f, \quad (Y_2Y_3) \equiv Y_3f.$$

Die beiden betrachteten Gruppen sind somit gleichzusammengesetzt. Es giebt daher wenigstens eine (selbstverständlich nicht projective, aber doch algebraische) Transformation, welche die eine Gruppe in die andere verwandelt. Es gründet sich hierauf ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Theorie der Fläche zweiten Grades und der Raumcurve dritten Grades.

Einfach transitive Gruppe mit vertauschbaren Transformationen.

Um eine andere zwar sehr einfache, aber auch sehr wichtige Anwendung von unserem Theorem zu machen, betrachten wir die einfach transitive Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Ihre Klammerausdrücke sind sämtlich Null. Bezeichnen wir allgemein zwei infinitesimale Transformationen Uf, Vf, deren Klammerausdruck $U(Vf) - V(Uf)$ oder (UV) identisch verschwindet, als *vertauschbar*, so folgt aus unserem Theorem unmittelbar der

Satz 5: *Jede n-gliedrige Gruppe in n Veränderlichen mit lauter vertauschbaren infinitesimalen Transformationen, zwischen denen keine lineare Relation besteht, lässt sich durch passende Wahl der Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ auf die Form bringen*):*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots\cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Satz 12 in § 3 des 14. Kap. ist hiervon wieder ein specieller Fall. Man ersieht daraus, wie umfassend das Theorem 30 ist.

---

*) Diesen einfachen, aber fundamentalen Satz entdeckte Lie im Jahre 1869. Er benutzte ihn in den Jahren 1870—72 zur Entwickelung mehrerer Integrationstheorien und dehnte ihn in den Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania, 30. April 1872, auf infinitesimale Berührungstransformationen aus.

Vertauschbare inf. Transformationen.

Wir wollen hier die soeben eingeführte Bezeichnung: *vertauschbare infinitesimale Transformationen* gruppentheoretisch erklären. Sind Uf und Vf zwei infinitesimale Transformationen, so erzeugt jede eine eingliedrige Gruppe mit endlichen Transformationen $S_a \dots$ bez. $T_b \dots$ Im allgemeinen wird bei der Aufeinanderfolge von beliebigen Transformationen beider Gruppen die Reihenfolge nicht gleichgültig sein. Man kann aber zeigen, dass allgemein stets $S_a T_b = T_b S_a$ dann und nur dann ist, wenn der Klammerausdruck $(UV) \equiv 0$ ist, sodass der Satz gilt:

Satz 6: *Die endlichen Transformationen S_a, T_b zweier eingliedriger Gruppen Uf, Vf sind dann und nur dann stets mit einander vertauschbar: $S_a T_b = T_b S_a$, wenn der Klammerausdruck*

$$(UV) \equiv U(Vf) - V(Uf) \equiv 0$$

ist.

Der Ausdruck: vertauschbare infinitesimale Transformationen soll sich also auf zwei infinitesimale Transformationen oder eingliedrige Gruppen beziehen, deren *endliche* Transformationen mit einander vertauschbar sind.

Zum Beweis des Satzes bemerken wir: Eine endliche Transformation S_a der eingliedrigen Gruppe Vf führt eine beliebige Function f über in

$$f' = f + \frac{a}{1} Uf + \frac{a^2}{1 \cdot 2} UUf + \cdots,$$

f' wird von einer endlichen Transformation T_b der eingliedrigen Gruppe Vf weiter übergeführt in:

$$f'' = f' + \frac{b}{1} Vf' + \frac{b^2}{1 \cdot 2} VVf' + \cdots.$$

Die Aufeinanderfolge $S_a T_b$ giebt also:

$$f'' = f + \frac{1}{1}(aUf + bVf) + \frac{1}{1 \cdot 2}(a^2 UUf + 2ab VUf + b^2 VVf) + \cdots.$$

Entsprechend giebt die Aufeinanderfolge $T_b S_a$:

$$\bar{\bar{f}} = f + \frac{1}{1}(bVf + aUf) + \frac{1}{1 \cdot 2}(b^2 VVf + 2ba UVf + a^2 UUf) + \cdots.$$

Soll $f'' \equiv \bar{\bar{f}}$ für alle Werte von a und b sein, so lehrt zunächst der Vergleich der quadratischen Glieder, dass $VUf \equiv UVf$, also $(UV) \equiv 0$ sein muss. Hieraus folgt, da dies für jeden Ausdruck f gelten muss, dass dann im Übrigen stets, wo ein V einem U unmittelbar vorausgeht, V mit U vertauscht werden kann, sodass also f'' auch in den Gliedern höherer Ordnung genau mit $\bar{\bar{f}}$ übereinstimmt*).

---

*) Vgl. „Diffgln. m. inf. Trf.“, § 4 des 14. Kap.

§ 3. Einfach transitive Gruppen, die zu einander reciprok sind.

Transf. einf. transitiver Gruppe in sich.

Die vorhergehenden Entwickelungen gestatten ohne weiteres, *alle* Transformationen zu bestimmen, die eine gegebene einfach transitive Gruppe $X_1 f \ldots X_n f$ in sich überführen. Unter allen diesen Transformationen suchen wir nun insbesondere diejenigen, welche die Form jedes einzelnen $X_i f$ bewahren und nicht einmal um einen *constanten* Factor ändern. Dadurch gelangen wir zu einer wichtigen reciproken Beziehung zweier einfach transitiver Gruppen zu einander.

Liegt eine einfach transitive Gruppe in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ vor:

$$X_i f \equiv \sum_1^n {}_k \, \xi_{ik}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und schreiben wir sie statt in $x_1 \ldots x_n$ in anderen Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$:

$$X_i' f \equiv \sum_1^n {}_k \, \xi_{ik}(x_1' \ldots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_k'} \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

indem wir einfach jedes x_k durch x_k' ersetzen, so haben wir zwei gleichzusammengesetzte einfach transitive Gruppen $X_1 f \ldots X_n f$ und $X_1' f \ldots X_n' f$ vor uns, die im Grunde genommen mit einander identisch sind, da die erste vermöge der identischen Transformation

$$x_k' = x_k \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

in die zweite übergeht.

Wir fragen nun nach *allen* Transformationen der $x_1 \ldots x_n$ in die $x_1' \ldots x_n'$, vermöge deren jedes $X_i f$ gerade in $X_i' f$ übergeht. Nach Theorem 30 des vorigen Paragraphen müssen wir zu diesem Zweck das n-gliedrige vollständige System bilden:

$$X_i f + X_i' f = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und seine Integralgleichungen

$$\Omega_k(x_1 \ldots x_n, x_1' \ldots x_n') = a_k \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

nach $x_1' \ldots x_n'$ auflösen. Die hervorgehenden Gleichungen

$$x_i' = \Phi_i(x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{11}$$

mit den n wesentlichen Parametern $a_1 \ldots a_n$ stellen alsdann die Schar aller ∞^n Transformationen von $x_1 \ldots x_n$ in $x_1' \ldots x_n'$ dar, die jede infinitesimale Transformation $X_i f$ in die entsprechende $X_i' f$ überführen. Dass alle n Parameter $a_1 \ldots a_n$ wesentlich sind, folgt daraus, dass $\Omega_1 \ldots \Omega_n$ sämtlich von einander unabhängig sind. Bei einer solchen Transformation (11) geht also die ursprüngliche Gruppe, ja jede (infinitesimale) Transformation der Gruppe bis auf eine andere Bezeichnung

der Veränderlichen in sich selbst über. Dasselbe gilt daher, wenn wir zwei Transformationen (11) nach einander anwenden, d. h. wenn wir die Gruppe $X_1'f \dots X_n'f$ fernerhin vermöge

$$(12) \qquad x_i'' = \Phi_i(x_1' \dots x_n', b_1 \dots b_n) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

in eine neue Gruppe $X_1''f \dots X_n''f$ verwandeln. Denn es wird dann auch

$$X_i''f \equiv \sum_1^n {}_k \, \xi_{ik}(x_1'' \dots x_n'') \frac{\partial f}{\partial x_k''} \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

sein. Die Aufeinanderfolge der Transformationen (11) und (12) ist mithin einer einzigen Transformation derselben Art äquivalent: *alle* ∞^n *Transformationen* (11) *bilden eine continuierliche Gruppe.* Diese Gruppe enthält, da sie aus *allen* Transformationen besteht, die $X_1 f \dots X_n f$ je in sich überführen, paarweis inverse Transformationen, sowie die identische $x_i' = x_i$. Sie wird daher von infinitesimalen Transformationen erzeugt. Es seien $U_1 f \dots U_n f$ n von einander unabhängige unter diesen ∞^{n-1} infinitesimalen Transformationen.

Gruppe aller dieser Transformationen.

Die n-gliedrige Gruppe $U_1 f \dots U_n f$ ist *einfach transitiv.* Dies folgt unmittelbar daraus, dass sich die Gleichungen (11) in der Form $\Omega_k = a_k$ nach $a_1 \dots a_n$ auflösen lassen, dass also die Gruppe (11) stets eine Transformation enthält, die ein beliebiges Wertsystem $x_1 \dots x_n$ in ein beliebiges anderes Wertsystem $x_1' \dots x_n'$ verwandelt.

Neue einf. transitive Gruppe.

Wir werden nunmehr zeigen, dass jeder Klammerausdruck $(X_i U_k) \equiv 0$ ist, dass also — nach dem zum Schluss des vorigen Paragraphen eingeführten Sprachgebrauch — die $X_1 f \dots X_n f$ mit den $U_1 f \dots U_n f$ *vertauschbar* sind.

Vertauschbarkeit der Trf. beider Gruppen.

In der That: Es mögen für den Augenblick mit $S_a \dots$ die endlichen Transformationen der Gruppe $X_1 f \dots X_n f$, mit $T_b \dots$ die der Gruppe $U_1 f \dots U_n f$ bezeichnet werden. Wir wissen, dass jede Transformation T_b jede infinitesimale Transformation der Gruppe $X_1 f \dots X_n f$ genau in sich überführt, also auch jede endliche Transformation S_a dieser Gruppe. S_a geht aber bei Ausführung von T_b über in $T_b^{-1} S_a T_b$. (Vgl. Satz 5, § 2 des 3. Kap.) Also ist:

$$T_b^{-1} S_a T_b = S_a$$

und in Folge dessen

$$S_a T_b = T_b S_a.$$

Nach Satz 6 des vorigen Paragraphen ist also auch jedes $(X_i U_k) \equiv 0$.

Diesem begrifflichen Beweise fügen wir noch einen analytischen hinzu, der von Satz 6 keinen Gebrauch macht: $X_i f$ geht vermöge irgend einer infinitesimalen Transformation

$$Uf \equiv \sum_1^n {}_k \, v_k(x_1 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

der Gruppe $U_1 f \,.\,.\, U_n f$ in sich über. Uf führt aber die neuen Veränderlichen:

$$x_k' = x_k + v_k(x)\delta t \quad (k = 1,\ 2 \,.\,.\, n) \tag{13}$$

in $X_i f$ ein, und diese Gleichungen geben aufgelöst:

$$x_k = x_k' - v_k(x')\delta t \quad (k = 1,\ 2 \,.\,.\, n),$$

und zwar ist dies — wie die folgenden Formeln überhaupt — genau in den unendlich kleinen Grössen erster Ordnung in δt. Eine beliebige Function $f(x_1 \,.\,.\, x_n)$ wird also durch Uf übergeführt in:

$$F(x') \equiv f(x_1' \,.\,.\, x_n') - (Uf(x))' \delta t, \tag{14}$$

entsprechend $X_i f(x)$ in:

$$X_i' f(x') - (U(X_i f(x))' \delta t.$$

Der Accent bedeutet hier, dass nach Bildung des accentuierten Ausdruckes allgemein x_k durch x_k' ersetzt werden soll. Nach (13) oder auch nach (14) ist noch:

$$f(x') \equiv F(x') + (UF(x))' \delta t. \tag{15}$$

$X_i f$ erteilt einer beliebigen Function $f(x)$ einen Zuwachs $X_i f \delta\tau$. Die infinitesimale Transformation, in die $X_i f$ vermöge (13) übergeht, erteilt nach dem Vorhergehenden einer beliebigen Function $F(x')$ das Increment

$$\left[X_i' f(x') - \left(U(X_i f(x))\right)' \delta t\right] \delta\tau,$$

wenn darin $f(x')$ vermöge (15) durch F ausgedrückt wird, also das Increment:

$$\left[X_i F(x) + X_i(UF(x))\delta t - U(X_i F(x))\delta t\right] \delta\tau,$$

wenn darin überall x_k durch x_k' ersetzt wird. Dies lässt sich kürzer so aussprechen: Die infinitesimale Transformation, in die $X_i f$ vermöge Uf übergeht, hat das Symbol:

$$X_i' f + (X_i U)' \delta t.$$

Sie soll aber mit $X_i' f$ identisch sein. Daher ist

$$(X_i U) \equiv 0,$$

was wir beweisen wollten.

Es giebt also jedenfalls n von einander unabhängige infinitesimale Transformtionen

$$U_i f \equiv \sum_1^n {}^k v_{ik}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

die mit $X_1 f \ldots X_n f$ vertauschbar sind.

Alle Transf., die mit d. Transf. einer geg. Gruppe vertauschbar sind.

Man kann auch direct *alle* infinitesimalen Transformationen

$$Wf \equiv \sum_1^n {}^k \omega_k(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

suchen, für die jedes

$$(X_i W) \equiv X_i(Wf) - W(X_i f) \equiv 0$$

ist. Diese Forderung giebt für die n Functionen $\omega_1 \ldots \omega_n$ die n^2 Bedingungen:

$$X_i \omega_k = W \xi_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

Sie enthalten links die n^2 ersten partiellen Differentialquotienten von $\omega_1 \ldots \omega_n$, rechts $\omega_1 \ldots \omega_n$ selbst linear und homogen. Sie bestimmen, da die Determinante der linken Seiten, $|\xi_{ik}|$, nicht identisch Null ist, alle n^2 ersten partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}$ als lineare und homogene Functionen von $\omega_1 \ldots \omega_n$ mit bekannten von $x_1 \ldots x_n$ abhängigen Coefficienten. Also sind auch alle zweiten partiellen Differentialquotienten von $\omega_1 \ldots \omega_n$ bekannte lineare homogene Functionen von $\omega_1 \ldots \omega_n$ u. s. f. In den Reihenentwickelungen

$$\omega_k = \omega_k(x^0) + \sum_1^n {}^j \frac{\partial \omega_k(x^0)}{\partial x_j^0}(x_j - x_j^0) + \cdots \quad (k = 1, 2 \ldots n)$$

sind folglich alle Glieder bestimmt, sobald die n Anfangsglieder $\omega_k(x^0)$ bestimmt sind. Daher hängen $\omega_1 \ldots \omega_n$ von nicht mehr als gerade n willkürlichen Constanten ab. Nun aber wissen wir, dass die Annahmen:

$$\omega_k = e_1 v_{1k} + e_2 v_{2k} + \cdots + e_n v_{nk} \quad (k = 1, 2 \ldots n) \tag{16}$$

die Bedingungen erfüllen, da jedes $(X_i U_j) \equiv 0$ ist, und dass hierin die n Constanten $e_1 \ldots e_n$ von einander unabhängig sind, weil die $U_1 f \ldots U_n f$ eine einfach transitive Gruppe darstellen und also die Determinante $|v_{ik}| \not\equiv 0$ ist. Die Werte (16) geben daher die *allgemeinste* Art an, wie man die Bedingungen $(X_i W) \equiv 0$ sämtlich erfüllen kann.

Ausser $U_1 f \ldots U_n f$ und den aus diesen linear ableitbaren $\Sigma e_i U_i f$ giebt es folglich keine infinitesimale Transformation, die mit allen

$X_1 f .. X_n f$ vertauschbar wäre. Mithin ist die Gruppe $U_1 f .. U_n f$ durch die Forderungen:

$$(X_i U_j) \equiv 0 \quad (i, j = 1, 2 .. n)$$

vollständig bestimmt.

Umkehrung d. Beziehung beider Gruppen zu einander.

Denkt man sich andererseits nicht $X_1 f .. X_n f$, sondern $U_1 f .. U_n f$ als ursprünglich gegebene einfach transitive Gruppe, so bestimmen ebenso diese Forderungen die Gruppe $X_1 f .. X_n f$. Zwischen den beiden einfach transitiven Gruppen $X_1 f .. X_n f$ und $U_1 f .. U_n f$ besteht also eine vollkommen umkehrbare Beziehung:

Die eine Gruppe definiert alle Transformationen, welche jede infinitesimale Transformation der anderen Gruppe in sich überführen.

Gleiche Zusammensetzung beider Gruppen.

Weiterhin ist es nun äusserst bemerkenswert, *dass beide Gruppen gleich zusammengesetzt sind.* Ist nämlich allgemein

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^n {}^s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 .. n),$$

so lassen sich $U_1 f .. U_n f$ aus der Schar aller Σ Const. Uf so auswählen, dass auch jedes

$$(U_i U_k) \equiv \sum_1^n {}^s c_{iks} U_s f \quad (i, k = 1, 2 .. n)$$

ist.

Um dies zu beweisen, denken wir uns, wie schon in früheren Fällen, die Coefficienten in den infinitesimalen Transformationen in der Umgebung eines Wertsystems allgemeiner Lage $(x_1^0 .. x_n^0)$ nach Potenzen von $x_1 - x_1^0, \ldots x_n - x_n^0$ entwickelt. Als solches Wertsystem allgemeiner Lage können wir ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit das Anfangssystem $x_i^0 = 0$ wählen, um dadurch die Formeln etwas handlicher zu gestalten.

Wir dürfen also annehmen, es sei

$$X_i f \equiv \sum_1^n {}^k a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_1^n {}^k \sum {}^l b_{ikl} x_l \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots,$$

indem wir nur die Glieder nullter und erster Ordnung wirklich hinschreiben. Da die Gruppe $X_1 f .. X_n f$ einfach transitiv ist, so erteilt sie einem Wertsysteme allgemeiner Lage, also auch dem Anfangssystem $x_i = 0$, gerade n von einander unabhängige Incremente. Für $x_1 = \cdot \cdot = x_n = 0$ reducieren sich aber die $X_i f$ auf

$$\sum_1^n {}^k a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Demnach ist die Determinante der a_{ik} sicher von Null verschieden. Indem wir passende lineare Combinationen Σ Const. Xf als $X_1 f \ldots X_n f$ herausgreifen, deren Coefficienten Unterdeterminanten der Determinante $| a_{ik} |$ sind, können wir also erreichen, dass insbesondere in $X_i f$ alle $a_{ik} = 0$ sind mit Ausnahme von a_{ii}. Wir dürfen somit die $X_i f$ in der Form annehmen:

$$(17) \qquad X_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n {}^k \sum {}^l b_{ikl} x_l \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots$$
$$(i = 1, 2 \ldots n).$$

Entsprechend wählen wir die infinitesimalen Transformationen der zweiten einfach transitiven Gruppe $U_1 f \ldots U_n f$ so:

$$U_j f \equiv - \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_1^n {}^k \sum {}^l \beta_{jkl} x_l \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots$$
$$(j = 1, 2 \ldots n).$$

Nun ist:

$$(18) \qquad \begin{cases} (X_i X_j) \equiv \sum_1^n {}^k (b_{jki} - b_{ikj}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots, \\ (U_i U_j) \equiv - \sum_1^n {}^k (\beta_{jki} - \beta_{ikj}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots, \\ (X_i U_j) \equiv \sum_1^n (\beta_{jki} + b_{ikj}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \cdots. \end{cases}$$

Hierin sind die Glieder erster und höherer Ordnung in $x_1 \ldots x_n$ überall nur angedeutet. Wir wissen aber, dass jedes $(X_i U_j) \equiv 0$ ist. Die letzte Relation (18) giebt daher:

$$(19) \qquad \beta_{jki} = - b_{ikj} \quad (i, k, j = 1, 2 \ldots n).$$

Ferner wissen wir, dass allgemein:

$$(X_i X_j) \equiv \sum_1^n {}^s c_{ijs} X_s f$$

ist. Vergleichen wir diesen Wert mit dem Werte in der ersten Relation (18) hinsichtlich der von $x_1 \ldots x_n$ freien Glieder, so folgt unmittelbar nach (17):

$$b_{jki} - b_{ikj} = c_{ijk}.$$

Wenn also die Ausdrücke (17) eine einfach transitive Gruppe darstellen, so sind ihre Klammerausdrücke:

$$(20) \qquad (X_i X_j) \equiv \sum_1^n {}^k (b_{jki} - b_{ikj}) X_k f \quad (i, j = 1, 2 \ldots n).$$

Entsprechend sind bei der Gruppe $U_1 f \ldots U_n f$ die Klammerausdrücke:

$$(U_i U_j) \equiv \sum_1^n {}^k (\beta_{jki} - \beta_{ikj}) U_k f \quad (i, j = 1, 2 \ldots n).$$

Nach (19) können wir hierfür schreiben:

$$(21) \qquad (U_i U_j) \equiv \sum_1^n {}^k (b_{jki} - b_{ikj}) U_k f \quad (i, j = 1, 2 \ldots n).$$

Der Vergleich von (20) mit (21) lehrt, dass die Gruppen $X_1 f \ldots X_n f$ und $U_1 f \ldots U_n f$ gleichzusammengesetzt sind.

Wir fassen schliesslich die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen in dem

Zu einander reciproke einf. trans. Gruppen.

Theorem 31: *Sind $X_1 f \ldots X_n f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer einfach transitiven Gruppe in den n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, so definieren die n Gleichungen $(X_i U) \equiv 0$ die allgemeine infinitesimale Transformation Uf einer zweiten einfach transitiven Gruppe $U_1 f \ldots U_n f$, die mit der Gruppe $X_1 f \ldots X_n f$ gleichzusammengesetzt und ähnlich ist. Die Beziehung zwischen diesen beiden Gruppen ist eine umkehrbare: jede der beiden Gruppen besteht aus dem Inbegriff aller eingliedrigen Gruppen, deren Transformationen mit jeder Transformation der anderen Gruppe vertauschbar sind.*

Wir nennen diese beiden Gruppen *zu einander reciproke einfach transitive Gruppen.*

Beispiel.

Beispiel: Die einfach transitive Gruppe in x, y, z:

$$q + xr \quad yq + zr \quad (xy - z)p + y^2 q + yzr,$$

die wir schon früher in Beispielen besprochen, ist projectiv, nämlich die grösste projective Gruppe, die alle Erzeugenden der einen Schar $x =$ Const. der Fläche zweiten Grades

$$z - xy = 0$$

einzeln in Ruhe lässt. Entsprechend ist die einfach transitive Gruppe

$$p + yr \quad xp + zr \quad x^2p + (xy - z)q + xzr$$

die zweite projective Gruppe, die alle Erzeugenden der anderen Schar $y =$ Const. der Fläche in Ruhe lässt. Die Transformationen der beiden Gruppen sind paarweis vertauschbar, wie man durch Bildung der Klammerausdrücke sieht. Auch sind beide Gruppen gleich zusammengesetzt. Sie sind daher zu einander reciprok und es giebt Transformationen, welche die eine Gruppe in die andere überführen.

Kapitel 18.

Die adjungierte Gruppe.

Die Theorie der projectiven Gruppen, d. h. der Gruppen von Transformationen, die lineare Gleichungen zwischen den Veränderlichen stets wieder in solche überführen, besitzt eine hervorragende Wichtigkeit für die ganze Gruppentheorie überhaupt. *Mit jeder r-gliedrigen Gruppe hängt nämlich eine lineare homogene Gruppe in ganz bestimmter Weise zusammen, die adjungierte Gruppe.* Sie ist besonders wichtig für die Bestimmung und Discussion der in einer gegebenen Gruppe enthaltenen Untergruppen. Ihrer Einführung ist das gegenwärtige Kapitel gewidmet. Wenn wir später die linearen homogenen Gruppen ausführlicher besprechen, werden wir Gelegenheit haben, die Theorie der adjungierten Gruppe weiter zu entwickeln.

Man kann vielleicht sagen, dass die überraschende Einfachheit unserer Gruppentheorie in erster Linie auf der Einführung der Begriffe: infinitesimale Transformation und adjungierte Gruppe beruht.

§ 1. Begriff der adjungierten Gruppe.

Zunächst wollen wir einige bestimmte Beispiele ins Auge fassen:

Betrachten wir eine infinitesimale oder endliche Translation T in der Ebene. Sie kann in der Zeichnung durch eine Schar paralleler und gleichlanger Pfeile dargestellt werden, die von den ursprünglichen zu den transformierten Punkten führen. Ausserdem sei eine Rotation P um einen gewissen Punkt O und mit einer gewissen Amplitude ϑ gegeben. Führen wir nun in bekannter Weise die Rotation P auf die Translation T aus, so erhalten wir die Transformation $T' = \mathsf{P}^{-1}T\mathsf{P}$ (nach Satz 5, § 2 des 3. Kap.), und diese ist wieder

Beispiele.

eine Translation. Dass dies der Fall ist, macht die Fig. 37 anschaulich klar.

Betrachten wir nun allgemein die Ausführung einer Bewegung auf eine Bewegung. (Vgl. § 3 des 4. Kap.) Eine Bewegung ist bekanntlich im allgemeinen eine Rotation, im besonderen eine Translation. Letztere kann als Rotation mit unendlich fernem Drehpunkt aufgefasst werden. Wir wollen also allgemein auf eine Bewegung B eine andere Bewegung B ausführen. Die Bewegung B wird bildlich durch Pfeile in Kreisbogen um einen Drehpunkt, die Bewegung B durch solche um einen andern Drehpunkt darstellbar sein. Führen wir B auf B aus, so ergiebt sich natürlich wieder eine Bewegung $\mathsf{B}^{-1}B\mathsf{B}$, denn alle Bewegungen bilden eine Gruppe und die Aufeinanderfolge mehrerer Bewegungen ist daher stets wieder eine. Fig. 38 soll die Bildung von $\mathsf{B}^{-1}B\mathsf{B}$ veranschaulichen.

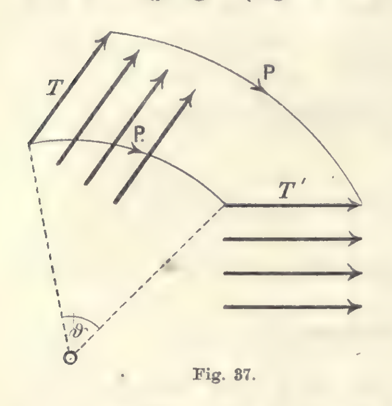


Fig. 37.

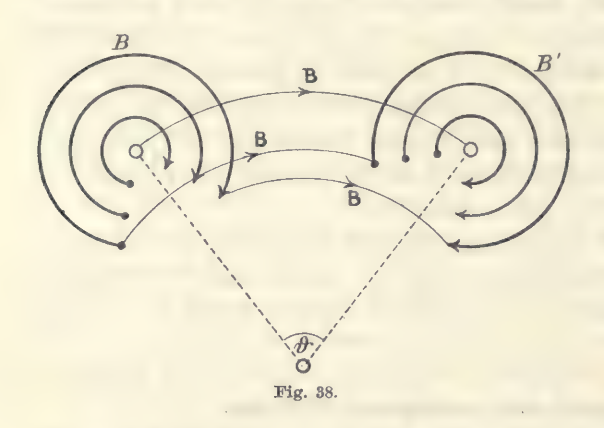


Fig. 38.

Wenn wir nicht nur auf eine einzelne Bewegung B, sondern auf die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen in der Ebene die bestimmte Bewegung B ausüben, so vertauscht B diese Bewegungen unter einander. B selbst gehört der Schar aller Bewegungen an. Wir haben also auf alle Transformationen einer gewissen Gruppe eine Transformation dieser Gruppe ausgeübt.

Die dadurch entstehenden Vertauschungen der Bewegungen unter einander können auch *analytisch* ausgedrückt werden:

Die Bewegung B ist bekannt, sobald die Coordinaten $x = a$, $y = b$ ihres Drehpunktes und ihre Amplitude Θ gegeben sind, und stellt sich so dar:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = (x - a)\cos\Theta - (y - b)\sin\Theta + a, \\ y' = (x - a)\sin\Theta + (y - b)\cos\Theta + b. \end{cases}$$

Fassen wir hierin a, b, Θ als Parameter auf, so stellen diese Gleichungen die dreigliedrige Gruppe aller Bewegungen in der Ebene dar. Die Translationen sind darin für den Fall enthalten, dass einer der Parameter a, b unendlich gross und gleichzeitig Θ unendlich klein wird. Die bestimmte Bewegung B möge den Drehpunkt $x = \alpha$, $y = \beta$ und die Amplitude ϑ haben. Sie führt B in eine Bewegung $B' = \mathsf{B}^{-1} B \mathsf{B}$ mit der ursprünglichen Amplitude $\Theta' = \Theta$ über und zwar ist ihr Drehpunkt (a', b') der Punkt, in den der Drehpunkt (a, b) vermöge B übergeht. Es ist also:

$$(2) \qquad \begin{cases} a' = (a - \alpha)\cos\vartheta - (b - \beta)\sin\vartheta + \alpha, \\ b' = (a - \alpha)\sin\vartheta + (b - \beta)\cos\vartheta + \beta, \\ \Theta' = \Theta. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind der analytische Ausdruck für die Vertauschungen, welche die Bewegungen $B(a, b, \Theta)$ vermöge einer Bewegung $\mathsf{B}(\alpha, \beta, \vartheta)$ erfahren.

Führen wir zwei solche Vertauschungen nach einander aus, üben wir also auf alle Bewegungen B zunächst eine bestimmte B und dann noch eine zweite bestimmte $\bar{\mathsf{B}}$ aus, so ist das Ergebnis dasselbe, als ob wir sofort die Bewegung $\mathsf{B}\bar{\mathsf{B}}$ ausgeübt hätten, die der Aufeinanderfolge von B und $\bar{\mathsf{B}}$ äquivalent ist. Es erhellt dies daraus, dass B vermöge B in

$$B' = \mathsf{B}^{-1} B \mathsf{B},$$

diese Bewegung B' vermöge $\bar{\mathsf{B}}$ in

$$B'' = \bar{\mathsf{B}}^{-1} B' \bar{\mathsf{B}},$$

also in

$$B'' = \bar{\mathsf{B}}^{-1}(\mathsf{B}^{-1} B \mathsf{B})\bar{\mathsf{B}} = \bar{\mathsf{B}}^{-1}\mathsf{B}^{-1} B \mathsf{B}\bar{\mathsf{B}} = (\mathsf{B}\bar{\mathsf{B}})^{-1} B (\mathsf{B}\bar{\mathsf{B}})$$

übergeht. Analytisch ausgedrückt heisst dies:

Die Gleichungen (2) stellen, wenn man darin α, β, ϑ als Parameter auffasst, eine *Gruppe* von Transformationen dar, vermöge deren a, b, Θ in a', b', Θ' übergehen. Dies Ergebnis ist bloss eine Folge davon, dass alle Bewegungen selbst eine Gruppe bilden.

Deshalb lässt sich das Ergebnis sofort auf beliebige Gruppen verallgemeinern. Wenn auch diese Verallgemeinerung auf der Hand liegt, so wollen wir sie doch zum Überfluss vollständig entwickeln.

Es liege eine r-gliedrige Gruppe vor:

Allgemeine Betrachtung.

$$(3) \qquad x_i' = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_r) \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

mit den infinitesimalen Transformationen:

$$X_k f \equiv \xi_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n} \quad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Die zu den Parametern $a_1 \ldots a_r$ gehörige Transformation der Gruppe heisse T_a. Führt man nun eine bestimmte derselben, etwa T_α, auf alle T_a aus, so ergeben sich die Transformationen $T_\alpha^{-1} T_a T_\alpha$, die wieder der Gruppe (3) angehören, wie schon in Satz 6, § 4 des 6. Kap., gesagt wurde.

Ausführung von Transf. einer Gruppe auf die Gruppe.

Die Transformation, in die T_a vermöge T_α übergeht, habe die Parameter $a_1' \ldots a_r'$, so dass

$$T_{a'} = T_\alpha^{-1} T_a T_\alpha$$

ist. Die Parameter $a_1' \ldots a_r'$ sind dabei Functionen von $a_1 \ldots a_r$ und $\alpha_1 \ldots \alpha_r$:

$$(4) \qquad a_k' = F_k(a_1 \ldots a_r,\ \alpha_1 \ldots \alpha_r) \quad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Es ist nun ohne Mühe einzusehen, dass diese Gleichungen, wenn man darin $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ als Parameter auffasst, eine *Gruppe* von Transformationen darstellen, die $a_1 \ldots a_r$ in $a_1' \ldots a_r'$ überführen.

In der That, wenn weiterhin auf die $T_{a'}$ eine Transformation T_β der Gruppe (3) ausgeführt wird, so kommt:

$$T_{a''} = T_\beta^{-1} T_{a'} T_\beta$$

und es ist analog (4):

$$(5) \qquad a_k'' = F_k(a_1' \ldots a_r',\ \beta_1 \ldots \beta_r) \quad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Da aber $T_{a'}$ mit $T_\alpha^{-1} T_a T_\alpha$ identisch ist, so ist auch

$$T_{a''} = T_\beta^{-1} T_\alpha^{-1} T_a T_\alpha T_\beta = (T_\alpha T_\beta)^{-1} T_a (T_\alpha T_\beta).$$

$T_\alpha T_\beta$ ist aber einer Transformation T_γ der Gruppe (3) äquivalent:

$$T_\gamma = T_\alpha T_\beta,$$

sodass $\gamma_1 \ldots \gamma_r$ gewisse Functionen von $\alpha_1 \ldots \alpha_r$, $\beta_1 \ldots \beta_r$ sind:

$$(6) \qquad \gamma_k = \varphi_k(\alpha_1 \ldots \alpha_r,\ \beta_1 \ldots \beta_r) \quad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Es ist also auch:

$$T_{a''} = T_\gamma^{-1} T_a T_\gamma$$

und demnach analog (4):

$$(7) \qquad a_k'' = F_k(a_1 \ldots a_r,\ \gamma_1 \ldots \gamma_r) \quad (k = 1, 2 \ldots r).$$

Eine mit der geg. Gruppe zusammenhängende Gruppe.

Wir sehen somit: Die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen (4) und (5) ist äquivalent der einen Transformation (7). Alle Transformationen (4) bilden also eine Gruppe.

Ist die zu T_a inverse Transformation T_a^{-1} in der Gruppe der T enthalten, so liefert die Ausführung dieser auf die T_a:

$$T_\alpha T_a T_\alpha^{-1},$$

und diese Transformation ist invers zu $T_\alpha T_a^{-1} T_\alpha^{-1}$. Daraus folgt, dass auch die Gruppe (4) paarweis inverse Transformationen enthält, sobald dies bei der ursprünglichen Gruppe (3) der Fall ist.

Satz 1: *Führt man auf die Transformationen T_a einer r-gliedrigen Gruppe in $x_1 \,..\, x_n$ mit paarweis inversen Transformationen*

$$x_i' = f_i(x_1 \,..\, x_n,\ a_1 \,..\, a_r) \quad (i = 1,\ 2 \,..\, r)$$

alle Transformationen T_α eben dieser Gruppe aus, so werden die Transformationen der Gruppe unter einander vertauscht, indem ihre Parameter $a_1 \,..\, a_r$ Transformationen erfahren:

$$a_k' = F_k(a_1 \,..\, a_r,\ \alpha_1 \,..\, \alpha_r) \quad (k = 1,\ 2 \,..\, n). \tag{4}$$

Diese Gleichungen stellen, wenn man darin $\alpha_1 \,..\, \alpha_r$ als Parameter auffasst, eine Gruppe in $a_1 \,..\, a_r$ mit paarweis inversen Transformationen dar.

Andere mit geg. Gruppe zusammenhängende Gruppen.

Wir heben hervor, dass die Gruppe (4) nicht mit einer gewissen anderen Gruppe verwechselt werden darf: Es stellen nämlich auch die früheren Gleichungen:

$$\gamma_k = \varphi_k(\alpha_1 \,..\, \alpha_r,\ \beta_1 \,..\, \beta_r) \quad (k = 1,\ 2 \,..\, r)$$

eine Gruppe dar, wenn man darin $\beta_1 \,..\, \beta_r$ als Parameter, $\alpha_1 \,..\, \alpha_r$ als ursprüngliche, $\gamma_1 \,..\, \gamma_r$ als transformierte Veränderliche auffasst. Da wir die Gruppeneigenschaft der Gleichungen $\gamma_k = \varphi_k(\alpha, \beta)$ in diesem Kapitel nicht benutzen, bemerken wir hier nur, dass sie unmittelbar aus dem sogenannten *associativen* Princip, d. h. aus der symbolischen Gleichung

$$(T_\alpha T_\beta) T_\gamma = T_\alpha (T_\beta T_\gamma)$$

Parametergruppe.

hervorgeht. Die Gruppe $\gamma_k = \varphi_k(\alpha, \beta)$ sagt aus, wie sich die *Aufeinanderfolge zweier Transformationen* der Gruppe (3) darstellt, und heisst ihre *Parametergruppe.*

Gruppe der Parameter einer Schar.

Die Parametergruppe wiederum darf nicht verwechselt werden mit der *Gruppe der Parameter* einer invarianten Schar von Mannigfaltigkeiten. Eine solche trat in § 1 des 10. Kap. auf.

Der analytische Ausdruck der Gruppe (4) ist im allgemeinen recht compliciert. Denn man bedenke, dass zu seiner Bildung die Herstellung der Aufeinanderfolge $T_\alpha^{-1} T_a T_\alpha$ *dreier* Transformationen der Gruppe (3) erforderlich ist. Auch ist die Gruppe (4) nicht völlig bestimmt, d. h. es gehört zu einer Gruppe (3) *nicht nur eine* Gruppe (4). Denn die Gruppe (3) ändert ja ihre analytische Form, wenn man ihre *Parameter* $a_1 \,..\, a_r$ anders wählt, wenn man also r von einander unabhängige Functionen dieser Parameter als neue Parameter einführt.

Gleichzeitig erhält natürlich auch die Gruppe (4) im Allgemeinen eine neue Form. Allerdings kann man alle verschiedenen Gruppen (4) aus einer derselben erhalten, wenn man sowohl neue Veränderliche als auch cogredient neue Parameter in die Gruppe (4) einführt. Alle Gruppen (4) sind also mit einander *ähnlich.*

Unter allen diesen Formen, welche die Gruppe (4) erhalten kann, giebt es eine ausgezeichnete.

Anderer Ausgangspunkt.

Auf diese ausgezeichnete Form der Gruppe (4) wird man am einfachsten geführt, indem man eine andere Definition zu Grunde legt. Nachher werden wir zeigen, dass diese neue Definition mit der früheren übereinstimmt.

Ausführung von Transf. einer Gruppe auf ihre inf. Transform.

Führen wir in gegebenen infinitesimalen Transformationen $X_1 f .. X_r f$ neue Veränderliche ein, so erhalten sie neue Formen. Sind nun $x_i' = f_i(x, a)$ die endlichen Gleichungen einer Gruppe mit den infinitesimalen Transformationen $X_1 f .. X_r f$, so geht durch Einführung der $x_1' .. x_n'$ als neue Veränderliche jede eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ wieder in eine eingliedrige Untergruppe über, da nach Satz 6, § 4 des 6. Kap., jede Gruppe mit paarweis inversen Transformationen in eine ebensolche übergeht. Da nun die allgemeine Form einer eingliedrigen Untergruppe auch in den neuen Veränderlichen $\Sigma \text{Const.} X_k' f$ ist, wobei der Accent bedeuten soll, dass überall $x_1 .. x_n$ direct durch $x_1' .. x_n'$ ersetzt worden sind, so folgt, dass vermöge der neuen Veränderlichen $x_1' .. x_n'$ oder (3) allgemein identisch etwa

$$X_k f = \sum_1^r {}^l \vartheta_{kl}(a_1 .. a_r) X_l' f \quad (k = 1, 2 .. r)$$

sein wird, indem die Coefficienten ϑ, da sie Constanten sein müssen, höchstens von den Constanten $a_1 .. a_r$ abhängen können. Ebenso wird die allgemeinste eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ in eine eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_k' X_k' f$ übergehen, in der dann $e_1' .. e_r'$ ausser von $a_1 .. a_r$ noch von $e_1 .. e_r$ abhängen werden. Es wird also vermöge (3) identisch

$$\sum_1^r {}^k e_k X_k f = \sum_1^r {}^k e_k' X_k' f \tag{8}$$

sein, wenn die $e_1' .. e_r'$ in gewisser Weise sich durch $e_1 .. e_r$ und $a_1 .. a_r$ ausdrücken:

$$e_k' = H_k(e_1 .. e_r, a_1 .. a_r) \quad (k = 1, 2 .. r).$$

Über die Form dieser Functionen $H_1 .. H_r$ lässt sich aber noch Näheres aussprechen. Setzen wir nämlich in der Gleichung (8), die

ja vermöge (3) für alle Functionen f von $x_1 \dots x_n$ identisch bestehen muss, f und f' gleich $x_1, x_2 \dots x_n$, so kommt:

$$e_1 \xi_{1i} + \cdots + e_r \xi_{ri} = e_1' X_1' x_i + \cdots + e_r' X_r' x_i$$
$$(i = 1, 2 \dots n).$$

Erteilen wir $x_1 \dots x_n$ bestimmte Werte, so werden $x_1' \dots x_n'$ bestimmte Functionen von $a_1 \dots a_r$. Erteilen wir $x_1 \dots x_n$ andere bestimmte Werte, so werden $x_1' \dots x_n'$ andere bestimmte Functionen von $a_1 \dots a_r$. So können wir eine beliebige Anzahl von linearen homogenen Gleichungen zwischen $e_1 \dots e_r$, $e_1' \dots e_r'$ herstellen:

$$e_1 \xi_{1i}^{(j)} + \cdots + e_r \xi_{ri}^{(j)} = e_1' X_1' x_i^{(j)} + \cdots + e_r' X_r' x_i^{(j)}$$
$$(i = 1, 2 \dots n, \quad j = 1, 2 \dots),$$

in denen der Index j anzeigen soll, dass für $x_1 \dots x_n$ bestimmte Werte $x_1^{(j)} \dots x_n^{(j)}$ gesetzt worden sind. Nun kann, wie in § 2 des 7. Kap. für die Determinanten der dortigen Matrix (19), auch hier gezeigt werden, dass sich aus den vorstehenden Gleichungen sicher r auswählen lassen, deren Determinante links nicht Null ist, sodass sie sich nach $e_1 \dots e_r$ auflösen lassen. Alsdann kommen Relationen von der Form:

$$e_l = \sum_1^r {}_k \, \sigma_{lk}(a_1 \dots a_r) e_k' \quad (k = 1, 2 \dots r).$$

Man bemerkt aber, dass die Beziehung zwischen $e_1 \dots e_r$ und $e_1' \dots e_r'$ eine umkehrbare ist, da die Gruppe (3) zu jeder ihrer Transformationen die inverse enthält. Man kann also die letzten Gleichungen auch umgekehrt nach $e_1' \dots e_r'$ auflösen, sodass sie sich in der Form darstellen:

Gleichungen der Transf. der inf. Transform. unter einander.

$$(9) \qquad e_k' = \sum_1^r {}_l \, \varrho_{kl}(a_1 \dots a_r) e_l \quad (k = 1, 2 \dots r).$$

Wir sehen also, dass die obigen Functionen $H_1 \dots H_r$ linear und homogen in $e_1 \dots e_r$ sind. Insbesondere ist die Determinante der ϱ_{kl} nicht identisch Null.

Es ist leicht einzusehen, dass die Gleichungen (9), wenn man darin $e_1 \dots e_r$ als ursprüngliche, $e_1' \dots e_r'$ als neue Veränderliche und $a_1 \dots a_r$ als Parameter auffasst, eine *Gruppe* darstellen.

Nachweis d. Gruppeneigenschaft.

Denn die Relation

$$(8) \qquad \sum_1^r {}_k \, e_k X_k f = \sum_1^r {}_k \, e_k' X_k' f$$

besteht identisch vermöge

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n,\ a_1 \dots a_r), \quad e_k' = \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(a_1 \dots a_r) e_l$$

$$(i = 1, 2 \dots n, \quad k = 1, 2 \dots r),$$

analog die Relation

$$\sum_1^r {}^k e_k' X_k' f = \sum_1^r {}^k e_k'' X_k'' f$$

identisch vermöge

$$x_i'' = f_i(x_1' \dots x_n',\ b_1 \dots b_r), \quad e_k'' = \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(b_1 \dots b_r) e_l'$$

$$(i = 1, 2 \dots n, \quad k = 1, 2 \dots r).$$

Mithin folgt durch Elimination der Zwischenwerte $x_1' \dots x_n'$ und $e_1' \dots e_r'$, da sich dann wegen der Gruppeneigenschaft der Schar (3) nach (6) gewisse Grössen $c_1 \dots c_r$ als Functionen von $a_1 \dots a_r$, $b_1 \dots b_r$ derart aufstellen lassen:

$$c_k = \varphi_k(a_1 \dots a_r,\ b_1 \dots b_r),$$

dass:

$$x_i'' = f_i(x_1 \dots x_n,\ c_1 \dots c_r) \quad (i = 1, 2 \dots n) \tag{10}$$

wird: Die Relation

$$\sum_1^r {}^k e_k X_k f = \sum_1^r {}^k e_k'' X_k'' f$$

besteht identisch, sobald man darin die Substitutionen (10) macht und

$$\left.\begin{aligned} e_k' &= \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(a_1 \dots a_r) e_l \\ e_k'' &= \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(b_1 \dots b_r) e_l' \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2 \dots r) \tag{11}$$

setzt. Andererseits aber besteht sie ja auch identisch, sobald man darin die Substitutionen (10) macht und entsprechend:

$$e_k'' = \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(c_1 \dots c_r) e_l \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

setzt. Die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen (11) ist also dieser letzten äquivalent. Mit anderen Worten, alle Transformationen (9) bilden eine *Gruppe*. Sie enthält paarweis inverse Transformationen, da sich $b_1 \dots b_r$ so als Functionen von $a_1 \dots a_r$ wählen lassen, dass die Gleichungen (10) sich auf $x_i'' = x_i$ reducieren, also dann $\Sigma e_k X_k f = \Sigma e_k'' X_k f$, daher $e_k'' = e_k$ wird.

Rückkehr zur ursprüngl. Betrachtung.

Wir behaupten nun, dass die Gruppe (9) eine der früher betrachteten unter einander ähnlichen Gruppen (4) ist. Bemerken wir nämlich, dass sich die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ so in eine zusammenfassen lassen (vgl. § 5 des 15. Kap.), wenn wir für den Augenblick die transformierten Veränderlichen mit $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ bezeichnen:

$$(12)\quad \begin{cases} f(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = f(x_1 \dots x_n) + \sum_1^r {}^k e_k X_k f(x) + \\ \qquad + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}^k e_k X_k \left(\sum_1^r {}^l e_l X_l f(x) \right) + \cdots, \end{cases}$$

und führen wir auf sie eine Transformation unserer Gruppe aus, indem wir also gleichzeitig setzen:

$$x_i' = f_i(x_1 \dots x_n,\ a_1 \dots a_r), \quad \bar{x}_i' = f_i(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n,\ a_1 \dots a_r)$$
$$(i = 1,\ 2 \dots n),$$

so wird die allgemeine Function $f(x_1 \dots x_n)$ in eine gewisse Function $F(x_1' \dots x_n')$, die übrigens auch $a_1 \dots a_r$ enthält, entsprechend $f(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ in die Function $F(\bar{x}_1' \dots \bar{x}_n')$ übergehen. Nun wird, wie wir soeben sahen, vermöge der Einführung von $x_1' \dots x_n'$ identisch

$$\sum_1^r {}^k e_k X_k f = \sum_1^r {}^k e_k' X_k' f,$$

sobald $e_1' \dots e_n'$ die obigen Functionen (9) bedeuten. Es kommt also auch:

$$\sum_1^r {}^k e_k X_k \left(\sum_1^r {}^l e_l X_l f \right) = \sum_1^r {}^k e_k' X_k' \left(\sum_1^r {}^l e_l' X_l' f \right)$$

u. s. w., daher:

$$F(\bar{x}_1' \dots \bar{x}_n') = F(x_1' \dots x_n') + \sum_1^r {}^k e_k' X_k' F(x') +$$
$$+ \sum_1^r {}^k e_k' \left(\sum_1^r {}^l e_l' X_l' (F(x')) \right) + \cdots.$$

Dies aber sagt aus, dass alle endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma e_k X_k f$ vermöge einer Transformation der Gruppe $x_i' = f_i(x,\ a)$ wieder in alle endlichen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe $\Sigma e_k' X_k' f$ übergeben, sobald $e_1' \dots e_r'$ die Form (9) haben. Die Formeln (9) lassen sich also genau so ableiten, wie früher die Formeln (4), nämlich durch Ausführung von Transformationen der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ auf diese Gruppe. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die besondere Form der endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, von der wir hier ausgegangen sind, nämlich die Reihenentwickelung (12) nennen wir *die canonische Form der Gruppe.* In dieser Form sind $e_1 \ldots e_r$ die Parameter der Gruppe. Wir nennen sie entsprechend *canonische Parameter.* Die canonische Form hat offenbar die Eigenschaft, dass sie alle Transformationen einer eingliedrigen Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ darstellt, sobald man $e_1 \ldots e_r$ so ändert, dass ihre Verhältnisse dieselben bleiben, indem man also etwa $e_k = e_k^0 \cdot t$ setzt und t variiert.

Canonische Form einer Gruppe.

Unser Ergebnis ist dieses:

Theorem 32: *Sind*

$$x_i' = x_i + \sum_1^r {}^k e_k X_k x_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}^k \sum {}^l e_k e_l X_k X_l x_i + \cdots$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

die canonischen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, und führt man auf diese ihre Transformationen mit den Parametern $e_1 \ldots e_r$ eine beliebige ihrer Transformationen in beliebiger, nicht notwendig auch canonischer Form:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n,\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

aus, so gehen die Transformationen $(e_1 \ldots e_r)$ der Gruppe wieder in Transformationen $(e_1' \ldots e_r')$ der Gruppe in canonischer Form über. Die Parameter der letzteren drücken sich alsdann in der Weise aus:

$$e_k' = \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(a_1 \ldots a_r) e_l \quad (k = 1, 2 \ldots r),$$

indem die Determinante der ϱ_{kl} nicht identisch Null ist. Diese r Gleichungen stellen eine Gruppe mit paarweis inversen Transformationen dar, wenn man $e_1 \ldots e_r$ als Veränderliche und $a_1 \ldots a_r$ als Parameter auffasst. Insbesondere wird die infinitesimale Transformation $\Sigma e_k X_k f$ in die infinitesimale Transformation $\Sigma e_k' X_k' f$ übergeführt, ebenso die von ersterer erzeugte eingliedrige Gruppe in die von der letzteren erzeugte.

Diese in ganz bestimmter Weise mit der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ zusammenhängende lineare homogene Gruppe

$$e_k' = \sum_1^r {}^l \varrho_{kl}(a_1 \ldots a_r) e_l \quad (k = 1, 2 \ldots r) \tag{9}$$

in den r Veränderlichen $e_1 \ldots e_r$ nennen wir *die der Gruppe* $X_1 f \ldots X_r f$ *adjungierte Gruppe.* Sie zeigt, wie die endlichen Transformationen, die eingliedrigen Untergruppen und die infinitesimalen Transformationen der gegebenen Gruppe unter einander vertauscht werden, sobald man auf die gegebene Gruppe eine ihrer Transformationen ausübt.

Adjungierte Gruppe.

Wenn in die endlichen Gleichungen (3) der ursprünglichen Gruppe Functionen der Parameter $a_1 \ldots a_r$ als neue Parameter eingeführt werden, so findet dies in gleicher Weise in den Gleichungen (9) der adjungierten Gruppe statt.

Schliesslich erhellt aus dem Vorausgehenden, dass man die Gleichungen (9) der adjungierten Gruppe ohne Mühe aufstellen kann, sobald man die endlichen Gleichungen $x_i' = f_i(x, a)$ der gegebenen Gruppe kennt. Wir wollen dies in den zu Beginn des Paragraphen besprochenen Beispielen durchführen.

Beispiele. Gruppe der Bewegungen in der Ebene.

1. Beispiel: Wenden wir die Theorie an auf die Gruppe aller Bewegungen in der (xy)-Ebene, die man bekanntlich so schreiben kann:

$$(3') \quad \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b, \end{cases}$$

mit den Parametern α, a, b. Die infinitesimalen Transformationen sind hier p, q, $xq - yp$. Führen wir auf $e_1 p + e_2 q + e_3(xq - yq)$ die Transformation (3') aus, so kommt:

$$\begin{aligned} e_1 p + e_2 q + e_3(xq - yp) = {} & e_1[\cos \alpha \cdot p' + \sin \alpha \cdot q'] + \\ & + e_2[- \sin \alpha \cdot p' + \cos \alpha \cdot q'] + \\ & + e_3[(b - y')p' - (a - x')q']. \end{aligned}$$

Es ist dies gleich

$$e_1' p' + e_2' q' + e_3'(x'q' - y'p')$$

zu setzen. Dies liefert sofort:

$$(9') \quad \begin{cases} e_1' = \cos \alpha \cdot e_1 - \sin \alpha \cdot e_2 + b e_3, \\ e_2' = \sin \alpha \cdot e_1 + \cos \alpha \cdot e_2 - a e_3, \\ e_3' = e_3 \end{cases}$$

als Gleichungen der adjungierten Gruppe. Man kann ohne Mühe die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe ableiten. Sie ist offenbar dreigliedrig. Die Annahme $\alpha = a = b = 0$ liefert die identische Transformation und die Annahme $\alpha = \lambda \delta t$, $a = \mu \delta t$, $b = \nu \delta t$ die allgemeine infinitesimale, die linear aus den dreien ableitbar ist:

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} \quad e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1}.$$

Man sieht, dass die zur Gruppe der Bewegungen adjungierte Gruppe (11') wieder die Gruppe aller Bewegungen darstellt, wenn e_1, e_2, e_3 als homogene Punktcoordinaten, also $\frac{e_1}{e_3}$ und $\frac{e_2}{e_3}$ als Cartesische Punktcoordinaten in der Ebene gedeutet werden. Die adjungierte Gruppe ist mit anderen Worten die Gruppe der Bewegungen selbst in homogener Schreibweise. Dies hat seinen geometrischen Grund darin, dass die infinitesimale Bewegung

$$e_1 p + e_2 q + e_3(xq - yp)$$

eine eingliedrige Gruppe von Rotationen erzeugt, deren Mittelpunkt die Coordinaten $-\frac{e_2}{e_3}$, $+\frac{e_1}{e_3}$ hat, während $e_3 t$ ihre Amplitude ist. (Vgl. § 3 des 4. Kap.) Der Mittelpunkt $\left(-\frac{e_2}{e_3}, \frac{e_1}{e_3}\right)$ wird aber durch (3') transformiert, wie jeder Punkt der Ebene, nämlich in Rotation, indem er übergeht in

$$-\frac{e_2'}{e_3'} = -\frac{e_2}{e_3}\cos\alpha - \frac{e_1}{e_3}\sin\alpha + a,$$

$$+\frac{e_1'}{e_3'} = -\frac{e_2}{e_3}\sin\alpha + \frac{e_1}{e_3}\cos\alpha + b,$$

während die Amplitude ungeändert bleibt:

$$e_3' = e_3.$$

Diese drei Gleichungen decken sich aber mit den Gleichungen (9').

Wir können jede infinitesimale Bewegung $e_1 p + e_2 q + e_3(xq - yp)$ als Punkt in einer Ebene mit den homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3 abbilden. Alsdann ist, wie gesagt, die adjungierte Gruppe wieder die aller Bewegungen in dieser Ebene. Da diese Gruppe transitiv ist, so folgt: Durch Ausführung einer passenden Bewegung kann jede Bewegung in der Ebene in jede andere übergeführt werden, mit anderen Worten: Alle eingliedrigen Gruppen von Bewegungen sind innerhalb der Gruppe aller Bewegungen gleichberechtigt.

Gruppe aller Rotat. des Raumes um einen festen Pkt.

2. Beispiel: Wir betrachten noch die dreigliedrige Gruppe aller Rotationen des Raumes (x, y, z) um einen festen Punkt, den Anfangspunkt:

$$zq - yr \quad xr - zp \quad yp - xq,$$

deren endliche Gleichungen lauten:

$$(3'') \quad \begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z, \end{cases}$$

wenn a_1, a_2, a_3 u. s. w. die bekannten Relationen zwischen den Richtungscosinus dreier zu einander senkrechter Geraden erfüllen:

$$(13)\quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \\ \text{u. s. w.,} \\ a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = 0, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

sodass nur drei von ihnen als willkürliche Parameter verbleiben. Die Auflösung der Gleichungen (3″) nach x, y, z liefert bekanntlich

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'. \end{aligned}$$

Wir führen nun in

$$\Sigma e_k X_k f \equiv e_1(zq - yr) + e_2(xr - zp) + e_3(yp - xq)$$

die neuen Veränderlichen x', y', z' vermöge (3″) ein und setzen das Ergebnis gleich

$$\Sigma e_k' X_k' f \equiv e_1'(z'q' - y'r') + e_2'(x'r' - z'p') + e_3'(y'p' - x'q').$$

Es ist nach (3″):

$$\begin{aligned} p &= a_1 p' + a_2 q' + a_3 r', \\ q &= b_1 p' + b_2 q' + b_3 r', \\ r &= c_1 p' + c_2 q' + c_3 r', \end{aligned}$$

sodass $\Sigma e_k X_k f$ in x', y', z' die Form annimmt:

$$[(b_2 c_3 - c_2 b_3)e_1 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)e_3 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)e_3](z'q' - y'r') + \cdots.$$

Die beiden nur angedeuteten Glieder gehen aus diesem einen durch gleichzeitige cyklische Vertauschung von 1, 2, 3, von x, y, z und von p, q, r hervor. Der Vergleich mit $\Sigma e_k' X_k' f$ giebt nun:

$$\begin{aligned} e_1' &= (b_2 c_3 - c_2 b_3)e_1 + (c_2 a_3 - a_2 c_3)e_2 + (a_2 b_3 - b_2 a_3)e_3, \\ e_2' &= \cdots \\ e_3' &= \cdots. \end{aligned}$$

Es ist aber bekanntlich für die durch (13) gebundenen Richtungscosinus

$$b_2 c_3 - c_2 b_3 = a_1, \quad c_2 a_3 - a_2 c_3 = b_1, \quad a_2 b_3 - b_2 a_3 = c_1$$

u. s. w., sodass einfach folgt:

$$(9'')\quad \begin{cases} e_1' = a_1 e_1 + b_1 e_2 + c_1 e_3, \\ e_2' = a_2 e_1 + b_2 e_2 + c_2 e_3, \\ e_3' = a_3 e_1 + b_3 e_2 + c_3 e_3. \end{cases}$$

Die adjungierte Gruppe der Gruppe aller Rotationen um einen festen Punkt ist also mit dieser Gruppe identisch, ihre infinitesimalen Transformationen sind also auch

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3} \qquad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} \qquad e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2}.$$

Dies hat seine geometrische Erklärung: Ein Punkt, dessen Coordinaten proportional e_1, e_2, e_3 sind, wird bei der infinitesimalen Rotation $\Sigma e_k X_k f$ gar nicht transformiert, wie deren Form sofort lehrt. Also sind

$$\frac{x}{e_1} = \frac{y}{e_2} = \frac{z}{e_3}$$

die Gleichungen der Axe der infinitesimalen Rotation und ihrer eingliedrigen Gruppe von Rotationen. Wenn wir ferner für den Augenblick δt als Zeitelement betrachten, so können wir sagen: Die infinitesimalen Rotation $\Sigma e_k X_k f$, die in der Zeit δt stattfindet, setzt sich aus drei Rotationen um die Coordinatenaxen zusammen. Bei der ersten $e_1 X_1 f$ ist der Rotationswinkel gleich $e_1 \delta t$, also die Winkelgeschwindigkeit e_1, bei der zweiten ist diese e_2, bei der dritten e_3. Da sich die wirkliche Winkelgeschwindigkeit nach dem Parallelogramm zerlegen lässt, so folgt, dass diese Grösse gleich $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}$ ist. Bei der infinitesimalen Rotation $\Sigma e_k X_k f$ findet also eine Drehung um die Axe

$$\frac{x}{e_1} = \frac{y}{e_2} = \frac{z}{e_3}$$

mit dem Winkel $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}\, \delta t$ statt. Führt man nun auf die Rotationen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma e_k X_k f$ die endliche Rotation (3″) aus, so entsteht eine neue eingliedrige Gruppe von Rotationen $\Sigma e_k' X_k' f$, deren Axe die Gerade ist, in welche die ursprüngliche Axe vermöge (3″) übergeht. Dies ist in der That der Fall, wie die Gleichungen (9″) aussagen. Ferner hat $\Sigma e_k' X_k' f$ denselben Rotationswinkel wie $\Sigma e_k X_k f$, wie geometrisch einleuchtet. Hieraus aber folgt, dass $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}\, \delta t = \sqrt{e_1'^2 + e_2'^2 + e_3'^2}\, \delta t$ sein muss. Deuten wir also e_1, e_2, e_3 als gewöhnliche Punktcoordinaten in einem Raume von drei Dimensionen, so sehen wir, dass vermöge der adjungierten Gruppe jeder Abstand $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}$ eines Punktes (e_1, e_2, e_3) dieses Raumes vom Anfangspunkt invariant bleibt. Dies ist aber bei der Gruppe der Bewegungen (9″) der Fall, die offenbar nur die eine Invariante $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ besitzt, da die Gleichungen

Abbildung aller Rotat. um einen Punkt als Punkte eines Raumes.

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3} = 0, \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} = 0, \quad e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} = 0$$

ein zweigliedriges vollständiges System in den drei Veränderlichen e_1, e_2, e_3 bilden. Bei der soeben benutzten Deutung wird jede Rotation (3″) durch einen bestimmten Punkt (e_1, e_2, e_3) eines Raumes dargestellt und die Rotationen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma e_k^0 X_k f$ durch die Punkte

$$e_1 = e_1^0 t, \quad e_2 = e_2^0 t, \quad e_3 = e_3^0 t$$

einer Geraden durch den Anfangspunkt. Die adjungierte Gruppe (9″), die ja angiebt, wie die Rotationen (3″) vermöge solcher Rotationen unter einander vertauscht werden, stellt dann eine Gruppe von Transformationen dieses neuen Raumes dar und zwar in diesem Beispiele wieder die Gruppe der Rotationen um den Anfangspunkt.

Wir können aber auch von einer anderen geometrischen Deutung Gebrauch machen: *Wir stellen jede infinitesimale Rotation $\Sigma e_k X_k f$ durch einen Punkt in einer Ebene mit den homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3 dar. Alsdann werden die Punkte dieser Ebene durch die adjungierte Gruppe* (9) *projectiv transformiert, und dabei bleibt ein Kegelschnitt invariant;* man erkennt dies ohne weiteres, wenn man die Grössen $\mathfrak{x}' = \frac{e_1}{e_3}$ und $\mathfrak{y}' = \frac{e_2}{e_3}$ als Cartesische Coordinaten einführt. Man sieht dies auch rein geometrisch sofort ein, wenn man als die Ebene (e_1, e_2, e_3) die unendlich ferne Ebene des Punktraumes (x, y, z) benutzt, jede infinitesimale Rotation mithin durch den unendlich fernen Punkt ihrer Axe darstellt. Führt man eine Rotation (3″) auf alle Rotationen aus, deren Axen in einer Ebene (natürlich durch den Anfangspunkt) liegen, die also in der unendlich fernen Ebene durch eine Gerade dargestellt werden, so gehen sie wieder in Rotationen über, deren Bildpunkte in einer Geraden liegen, da die Rotation (3″) jede Ebene in eine Ebene überführt. Hieraus erhellt auch sofort, dass die adjungierte Gruppe in der Ebene mit den homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3 dreigliedrig und transitiv ist und einen Kegelschnitt invariant lässt. Denn die Rotationen (3″) transformieren die Geraden durch den festen Anfangspunkt dreigliedrig und lassen die imaginäre Nullkugel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ invariant. Dementsprechend ist die adjungierte Gruppe in der Ebene (e_1, e_2, e_3) die allgemeine projective Gruppe des imaginären Kugelkreises

Abbildung aller Rotat. um einen Punkt als Punkte einer Ebene.

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0,$$

die, wie bekannt (vgl. z. B. Anfang des § 3 des 11. Kap.), gerade dreigliedrig und transitiv ist. Dass die adjungierte Gruppe transitiv

ist, sagt aus: Man kann durch Ausübung einer Rotation unserer Gruppe aller Rotationen um einen festen Punkt jede dieser Rotationen in jede überführen, oder auch: Innerhalb dieser Gruppe sind alle eingliedrigen Untergruppen allgemeiner Lage $\Sigma e_k X_k f$ gleichberechtigt.

Princip der Abbildung aller Transf. einer Gruppe als Punkte.

Wir haben in diesen Beispielen von geometrischen Deutungen der Transformationen einer vorgelegten Gruppe als Punkte eines neuen Raumes Gebrauch gemacht. Diese Deutungen wurden schon früher einige Male gelegentlich benutzt, so bei der Bestimmung gewisser Gruppen in der Ebene in § 2 des 13. Kap. unter III und bei der begrifflichen Auseinandersetzung des Beweises des ersten Fundamentalsatzes in § 2 des 15. Kap. Wir wollen hier auch für den allgemeinen Fall einer beliebigen Gruppe diese Deutungen durchführen.

Erste Abbildung.

Wir wissen, dass jede Transformation der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ in der Form dargestellt werden kann:

$$f' = f + \sum_1^r {}_k e_k X_k f + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}_k \sum {}_l e_k e_l X_k(X_l f) + \cdots,$$

sodass $e_1 \ldots e_r$ ihre canonischen Parameter sind. Verstehen wir unter $e_1 \ldots e_r$ *gewöhnliche* Punktcoordinaten in einem Raume von r Dimensionen, so wird jeder Transformation unserer Gruppe ein bestimmter Punkt dieses Raumes zugeordnet und umgekehrt. Die Transformationen einer eingliedrigen Untergruppe $\Sigma e_k^0 X_k f$ erhält man, wenn man

$$e_1 = e_1^0 t, \quad \ldots e_r = e_r^0 t$$

setzt und t variieren lässt. Sie werden also in dem neuen Raume dargestellt durch die Punkte $(e_1 \ldots e_r)$ einer Geraden durch den Anfangspunkt:

$$\frac{e_1}{e_1^0} = \frac{e_2}{e_2^0} = \cdots = \frac{e_r}{e_r^0}.$$

Vermöge einer beliebigen Transformation der Gruppe werden ihre Transformationen, also auch die Bildpunkte $(e_1 \ldots e_r)$ dieser Transformationen, unter einander vertauscht. Wie dies geschieht, das sagt die adjungierte Gruppe aus. Die adjungierte Gruppe (9) erscheint daher in unserem Bildraume als eine gewisse Gruppe von Punkttransformationen. Sie ist linear und homogen in $e_1 \ldots e_r$. Dies sagt aus, dass erstens bei ihr jede Gleichung ersten Grades, d. h. jede ebene Mannigfaltigkeit des Bildraumes

$$c_1 e_1 + \cdots + c_r e_r + c_0 = 0$$

wieder in eine ebene Mannigfaltigkeit übergeht, zweitens, dass der Anfangspunkt des neuen Raumes in Ruhe bleibt, und drittens, dass parallele

Richtungen in parallele Richtungen übergehen. Dies ist leicht zu beweisen, wir werden übrigens hierauf später zurückkommen, wenn wir allgemein von linearen homogenen Gruppen sprechen. Dass jede eingliedrige Untergruppe der gegebenen Gruppe vermöge einer Transformation der Gruppe wieder in eine solche übergeht, drückt sich nun auch so aus: Jede Gerade durch den Anfangspunkt im neuen Raume $(e_1 \ldots e_r)$ geht vermöge der adjungierten Gruppe (9) wieder in eine Gerade durch den Anfangspunkt über.

Zweite Abbildung.

Die zweite geometrische Deutung, von der wir in diesem Kapitel nachher noch ausführlicher zu sprechen haben, besteht darin, dass man $e_1 \ldots e_r$ als *homogene* Punktcoordinaten in einem Raume von $r-1$ Dimensionen, also, wie man zu sagen pflegt, in einem Raume r^{ter} Stufe deutet. Dabei werden alle Transformationen einer eingliedrigen Untergruppe, da für sie $e_1 \ldots e_r$ in constanten Verhältnissen stehen, durch ein und denselben Punkt dargestellt. *Jeder Punkt* $(e_1 \ldots e_r)$ *des neuen Raumes repräsentiert* in Folge dessen *eine einzige infinitesimale Transformation*, nämlich: $\Sigma e_k X_k f$. Dass diese Abbildung eine hervorragende Wichtigkeit besitzt, werden wir im Folgenden an vielen Beispielen erläutern.

§ 2. Die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe.

Bisher haben wir die adjungierte Gruppe bei der Annahme berechnet, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ gegeben seien. Es ist aber möglich, die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe durch einfache Rechnungen zu finden, sobald nur die Zusammensetzungscoefficienten c_{iks} bekannt sind.

Dabei wollen wir von jetzt ab ein für allemal annehmen, dass die allgemeine Transformation $x_i' = f_i(x, a)$ der gegebenen Gruppe, durch deren Ausübung auf die in canonischer Form vorliegenden Transformationen die adjungierte Gruppe hervorging, *ebenfalls in canonischer Form*, etwa zur Unterscheidung mit den Parametern $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$, gewählt sei.

Wir wissen, dass sich die Werte von $e_1' \ldots e_r'$, ausgedrückt in $e_1 \ldots e_r$ und r Parametern, aus der Forderung ergeben, dass vermöge einer allgemeinen Transformation der vorgelegten Gruppe identisch

Bedingung, von der auszugehen ist.

$$\sum_1^r {}_k\, e_k' X_k' f = \sum_1^r {}_k\, e_k X_k f \tag{14}$$

sein muss. Ausgehend von dieser Gleichung ist es möglich, in den canonischen Gleichungen der adjungierten Gruppe die Glieder erster Ordnung zu finden.

Vorbemerkung.

Zu diesem Zwecke schicken wir voraus:

Die endlichen Gleichungen irgend einer eingliedrigen Gruppe

$$Yf \equiv \sum_1^n {}^i \eta_i (x_1 \,.\,.\, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

haben die Form:

$$(15) \begin{cases} x_i' = x_i + \varepsilon \eta_i(x) + \cdots \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n) \\ \text{und aufgelöst nach } x_1 \,.\,.\, x_n \text{ die Form} \\ x_i = x_i' - \varepsilon \eta_i(x') + \cdots \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n). \end{cases}$$

Die nur angedeuteten Glieder sind dabei von höherer Ordnung in dem Parameter ε. Vermöge dieser Transformation ist nun:

$$X_k f = \sum_1^n {}^i X_k x_i' \frac{\partial f}{\partial x_i'} = \sum_1^n {}^i X_k (x_i + \varepsilon \eta_i + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_i'} =$$

$$= \sum_1^n {}^i (\xi_{ki}(x) + \varepsilon X_k \eta_i + \cdots) \frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

also wegen (15):

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \Big(\xi_{ki}(x') - \varepsilon \sum_1^n {}^j \frac{\partial \xi_{ki}(x')}{\partial x_j'} \eta_j(x') + \varepsilon X_k' \eta_i(x')\Big) \frac{\partial f}{\partial x_i'},$$

wenn der Accent andeutet, dass überall x_i' statt x_i zu schreiben ist. Also kommt:

$$X_k f = \Big(\sum_1^n {}^i \xi_{ki}(x') - \varepsilon Y' \xi_{ki}(x') + \varepsilon X_k' \eta_i(x') + \cdots \Big) \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$
$$= X_k' f + \varepsilon (X_k' Y') + \cdots,$$

und zwar ist diese Formel in den Gliedern erster Ordnung in ε sicher exact. Wenn die Forderung (14) vermöge der Transformation (15) bestehen soll, so erhalten wir folglich:

$$(16) \qquad \sum_1^r {}^k e_k' X_k' f = \sum_1^r {}^k e_k X_k' f + \varepsilon \sum_1^r {}^k e_k (X_k' Y') + \cdots.$$

Nunmehr setzen wir voraus, dass Yf, also auch die Transformation (15) unserer Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ angehöre, also die Form $\Sigma \,\text{Const.}\, Xf$ habe. Alsdann sind die nicht geschriebenen Glieder höherer Ordnung auch Klammerausdrücke, denn wir sahen in § 1, dass vermöge einer

Transformation der Gruppe jede canonische Darstellung der Gruppe wieder in eine solche übergeht. Nach dem Hauptsatze wird sein:

$$(17) \qquad (X_\mu X_\nu) \equiv \sum_1^r {}^k c_{\mu\nu k} X_k f \quad (\mu, \nu = 1, 2 \,.\,.\, r),$$

sodass auch $(X_k' Y')$ sowie die höheren Glieder in (16) sich als Ausdrücke von der Form $\Sigma \,\text{Const.}\, X'f$ darstellen. In (16) wird also jetzt jedes Glied rechts und links diese Form haben, sodass sich (16) so schreiben lässt:

$$\sum_1^r {}^k e_k' X_k' f = \sum_1^r {}^k (e_k + \cdots) X_k' f,$$

indem die nur angedeuteten Glieder Potenzreihen nach ε mit constanten Coefficienten sein werden. Da aber $X_1'f \,.\,.\, X_r'f$ von einander unabhängig sind, so zerfällt diese Relation in r einzelne:

$$(\overline{16}) \qquad e_k' = e_k + \cdots \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r),$$

deren rechte Seiten Potenzreihen nach ε sind, deren Coefficienten von den Constanten $e_1 \,.\,.\, e_r$ allein abhängen.

Reihenentwickelg. der adj. Gruppen.

Wir wählen nun Yf als die *allgemeine* infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$. Alsdann werden die Gleichungen $(\overline{16})$ offenbar alle Transformationen der adjungierten Gruppe darstellen in Form von Reihenentwickelungen nach Potenzen von $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_r$. Da wir die *infinitesimalen* Transformationen der adjungierten Gruppe suchen, so genügt es — wie wir nachher streng beweisen — in unseren Reihenentwickelungen nur die Glieder erster Ordnung in $\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_r$ zu berechnen. Wir werden nämlich zeigen, dass, wenn etwa die Glieder erster Ordnung sämtlich Null sind, dasselbe dann auch von allen Gliedern höherer Ordnung gilt.

Zunächst liefern uns nun die Gleichungen (16) für $Yf \equiv \Sigma \varepsilon_k X_k f$:

$$(18) \qquad \sum_1^r {}^k e_k' X_k' f = \sum_1^r {}^k e_k X_k' f + \sum_1^r {}^\mu \sum {}^\nu \varepsilon_\nu e_\mu (X_\mu' X_\nu') + \cdots$$

oder nach (17):

$$\sum_1^r {}^k e_k' X_k' f = \sum_1^r {}^k e_k X_k' f + \sum_{\mu, \nu, k}^{1 \,.\,.\, r} \varepsilon_\nu c_{\mu\nu k} e_\mu X_k' f + \cdots,$$

woraus nach den obigen Auseinandersetzungen einzeln folgt:

$$(\overline{18}) \qquad e_k' = e_k + \sum_1^r {}^\mu \sum {}^\nu \varepsilon_\nu c_{\mu\nu k} e_\mu + \cdots \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Inf. Transf. $E_1 f \,..\, E_r f$ der adjung. Gruppe.

Indem wir nach einander je eine der Grössen $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ gleich δt, die übrigen gleich Null setzen, erhalten wir infinitesimale Transformationen der adjungierten Gruppe, so allgemein, wenn wir $\varepsilon_\nu = \delta t$, alle übrigen $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ gleich Null wählen:

$$\delta e_k = e_k' - e_k = \sum_1^r {}^\mu c_{\mu\nu k} e_\mu \delta t + \cdots \quad (k = 1, 2 \,..\, r).$$

Diese hat das Symbol:

$$E_\nu f \equiv \sum_1^r {}^k \sum {}^\mu c_{\mu\nu k} e_\mu \frac{\partial f}{\partial e_k}. \tag{19}$$

So ergeben sich r infinitesimale Transformationen $E_1 f \,..\, E_r f$. Wenn wir in (18) alle ε irgendwie infinitesimal gewählt hätten, so hätten wir eine infinitesimale Transformation erhalten, die aus $E_1 f \,..\, E_r f$ linear ableitbar ist: Σ Const. $E_\nu f$.

Es fragt sich nun nur noch, ob wir hiermit auch *alle* infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe gefunden haben. Um diese Frage zu beantworten, wollen wir untersuchen, ob es möglich ist, r nicht sämtlich verschwindende Constanten $c_1 \,..\, c_r$ so zu bestimmen, dass identisch

Relation zwischen $E_1 f \,..\, E_r f$.

$$c_1 E_1 f + c_2 E_2 f + \cdots + c_r E_r f = 0 \tag{20}$$

wird. Dies würde bedeuten, dass in den Reihenentwickelungen (18) für $\varepsilon_\nu = c_\nu \delta t$ ($\nu = 1, 2 \,..\, r$) alle Glieder erster Ordnung Null wären.

Die Annahme (20) giebt nach (19):

$$\sum_{\mu, \nu, k}^{1..r} c_\nu c_{\mu\nu k} e_\mu \frac{\partial f}{\partial e_k} = 0$$

oder einzeln:

$$\sum_1^r {}^\nu c_\nu c_{\mu\nu k} = 0 \quad (\mu, k = 1, 2 \,..\, r),$$

da die Forderung für alle Werte von $e_1 \,..\, e_r$ und f bestehen soll. Offenbar ist nun nach (17) und der letzten Formel:

$$\left(X_\mu f, \sum_1^r {}^\nu c_\nu X_\nu f \right) = \sum_1^r {}^k \left(\sum_1^r {}^\nu c_\nu c_{\mu\nu k} \right) X_k f = 0 \tag{21}$$

für jedes μ. Also in diesem Falle existiert in der gegebenen Gruppe eine infinitesimale Transformation $\Sigma c_\nu X_\nu f$, die mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist. Dies sagt nach Satz 6 des § 2, 17. Kap., aus, dass die endlichen Transformationen T

der eingliedrigen Gruppe $\Sigma c_\nu X_\nu f$ mit allen endlichen Transformationen S der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar sind: $TS = ST$. Eine beliebige Transformation T der eingliedrigen Gruppe $\Sigma c_\nu X_\nu f$ führt also jede Transformation S der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ in sich über, da dann $T^{-1} S T = T^{-1} T S = S$ ist. Mit anderen Worten: Wenn wir als Yf eine infinitesimale Transformation $\Sigma c_\nu X_\nu f$ der Gruppe wählen, die mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe vertauschbar ist, so lässt jede endliche Transformation (15) der eingliedrigen Gruppe Yf alle Transformationen in Ruhe, indem die zu $e_1 \dots e_r$ gehörige in sich übergeht, d. h. dann reducieren sich die Reihenentwickelungen $(\overline{18})$ exact auf $e_k' = e_k$.

Damit ist bewiesen, dass in den Reihenentwickelungen der adjungierten Gruppe *alle* Glieder verschwinden, sobald die von *erster* Ordnung Null sind, dass also keine infinitesimalen Transformationen in der adjungierten Gruppe vorhanden sind, die etwa mit höheren Potenzen von $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$ beginnen. Wir sind also sicher, dass jede infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe die Form hat: $\Sigma c_\nu E_\nu f$.

Gleichzeitig haben wir gesehen, dass, sobald zwischen $E_1 f \dots E_r f$ eine lineare Relation mit constanten Coefficienten identisch besteht:

$$c_1 E_1 f + \cdots + c_r E_r f \equiv 0,$$

alsdann in der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ eine mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe vertauschbare infinitesimale Transformation $\Sigma c_\nu X_\nu f$ vorhanden ist. Der Schluss von (20) auf (21) lässt sich offenbar auch rückwärts anwenden. Um dies Ergebnis bequemer aussprechen zu können, führen wir eine neue Bezeichnung ein:

Ausgezeichnete inf. Trf. einer Gruppe.

Wir nennen eine infinitesimale Transformation $\Sigma c_\nu X_\nu f$ einer Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation der Gruppe, sobald sie mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe vertauschbar, also jeder Klammerausdruck

$$\left(\sum_1^r c_\nu X_\nu f,\; X_\mu f \right) \equiv 0 \quad (\mu = 1, 2 \dots r)$$

*ist**).

*) Nach Lie's Terminologie ist eine *ausgezeichnete* infinitesimale Transformation einer Gruppe immer *invariant*, während eine invariante infinitesimale Transformation nicht immer ausgezeichnet, oder wenn man will, *ausgezeichnet invariant* ist. Wie es scheint, haben Klein und seine Schüler den Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen nicht hinlänglich beachtet. (Vgl. S. 485 unten.)

Dann können wir sagen: Wenn zwischen $E_1 f \,..\, E_r f$ gerade q von einander unabhängige lineare Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, wenn also unter $E_1 f \,..\, E_r f$ gerade $r - q$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen vorhanden sind, d. h. die adjungierte Gruppe gerade $(r - q)$-gliedrig ist, so existieren in der Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ gerade q von einander unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen.

Klammer-ausdrücke der adjung. Gruppe.

Bilden wir die Klammerausdrücke der infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe. Es kommt

$$(E_\nu E_\pi) \equiv \sum_{k,\mu,\varrho}^{1..r} (c_{\mu\nu k} c_{k\pi\varrho} - c_{\mu\pi k} c_{k\nu\varrho}) e_\mu \frac{\partial f}{\partial e_\varrho}.$$

Aber zwischen den Coefficienten $c_{\mu\nu k}$ der Klammerausdrücke (16) bestehen nach dem dritten Fundamentalsatz die Relationen:

$$\sum_1^r{}^k (c_{\mu\nu k} c_{k\pi\varrho} + c_{\nu\pi k} c_{k\mu\varrho} + c_{\pi\mu k} c_{k\nu\varrho}) = 0$$

und

$$c_{\mu\pi k} = - c_{\pi\mu k}, \quad c_{k\mu\varrho} = - c_{\mu k\varrho},$$

sodass kommt:

$$(E_\nu E_\pi) \equiv \sum_{k,\mu,\varrho}^{1..r} c_{\nu\pi k} c_{\mu k\varrho} e_\mu \frac{\partial f}{\partial e_\varrho}$$

oder nach (19):

$$(E_\nu E_\pi) \equiv \sum_1^r{}^k c_{\nu\pi k} E_k f.$$

Es ist daher, wie wir uns ausdrücken (vgl. S. 429), die adjungierte Gruppe $E_1 f \,..\, E_r f$ mit der ursprünglichen Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ *isomorph*.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in dem

Gesamt-ergebnis.

Theorem 33: *Erzeugen $X_1 f \,..\, X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe in $x_1 \,..\, x_n$ und ist*

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}^s c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 \,..\, r),$$

so wird die adjungierte Gruppe von den infinitesimalen Transformationen erzeugt:

$$E_\nu f \equiv \sum_1^r{}^k \sum{}^\mu c_{\mu\nu k} e_\mu \frac{\partial f}{\partial e_k} \quad (\nu = 1, 2 \,..\, r)$$

und es ist

$$(E_i E_k) \equiv \sum_1^r {}^s c_{iks} E_s f \quad (i,\ k = 1,\ 2\,..\,r).$$

Unter diesen infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe sind gerade $r - q$ von einander unabhängige enthalten, sobald die Gruppe $X_1 f\,..\,X_r f$ gerade q von einander unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen besitzt.

Man sieht, dass

$$E_k f \equiv \sum_1^r {}^s \sum {}^i c_{iks}\, e_i \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

ist. Vergleicht man dies mit

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}^s c_{iks} X_s f,$$

so ergiebt sich eine einfache Regel zur Bildung der infinitesimalen Transformationen $E_k f$ der adjungierten Gruppe: Man stellt den Ausdruck $(\Sigma e_i X_i,\ X_k) \equiv \Sigma e_i c_{iks} X_s f$ her und setzt darin schliesslich statt $X_s f$ allgemein $\frac{\partial f}{\partial e_s}$. Hiernach kann man die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe sofort hinschreiben, wenn man nur die Constanten c_{iks}, also die Zusammensetzung der ursprünglichen Gruppe kennt.

Regel zur Berechnung der $E_k f$.

1. Beispiel: Bei der Gruppe aller Bewegungen in der Ebene

Beispiele.

$$p \quad q \quad xq - yp$$

ist

$$(p,\ q) \equiv 0, \quad (p,\ xq - yp) \equiv q, \quad (q,\ xq - yp) \equiv -p,$$

also nach der soeben angegebenen Regel:

$$E_1 f \equiv -e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2}, \quad E_2 f \equiv e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1}, \quad E_3 f \equiv e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1}.$$

Dies stimmt mit dem 1. Beispiel in § 1 überein. Die Gruppe der Bewegungen enthält keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation. Dies steht in Einklang damit, dass die adjungierte Gruppe ebenfalls dreigliedrig ist.

2. Beispiel: Bei der Gruppe aller Rotationen um den Coordinatenanfang des Raumes $(x,\ y,\ z)$:

$$X_1 f \equiv zq - yr, \quad X_2 f \equiv xr - zp, \quad X_3 f \equiv yp - xq$$

ist

$$(X_1 X_2) \equiv X_3 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_1) \equiv X_2 f,$$

also nach der obigen Regel:

$$E_1 f \equiv - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2}, \quad E_2 f \equiv - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_1 \frac{\partial f}{\partial e_3},$$
$$E_3 f \equiv - e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1}.$$

Man vergleiche das 2. Beispiel in § 1. Auch die hier vorliegende Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ enthält keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation.

3. Beispiel: Betrachten wir die viergliedrige Gruppe aller homogenen linearen Transformationen in der Ebene:

$$xp \quad yp \quad xq \quad yq.$$

Hier ist

$$(xp, yp) \equiv - yp, \quad (xp, xq) \equiv xq, \quad (xp, yq) \equiv 0,$$
$$(yp, xq) \equiv yq - xp, \quad (yp, yq) \equiv - yp,$$
$$(xq, yq) \equiv xq,$$

also die adjungierte Gruppe:

$$E_1 f \equiv e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}, \quad E_2 f \equiv e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} + (e_4 - e_1) \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_4},$$
$$E_3 f \equiv - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} + (e_1 - e_4) \frac{\partial f}{\partial e_3} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_4}, \quad E_4 f \equiv - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}.$$

Man sieht, dass zwischen $E_1 f \ldots E_4 f$ die lineare Relation besteht:

$$E_1 f + E_4 f \equiv 0.$$

Die adjungierte Gruppe ist also nur dreigliedrig. Dies liegt darin, dass die gegebene Gruppe eine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält, nämlich $xp + yq$.

§ 3. Untergruppen, gleichberechtigte Untergruppen, invariante Untergruppen.

Jetzt gehen wir zu den eigentlichen Anwendungen der adjungierten Gruppe über, indem wir dem Problem näher treten, die Untergruppen einer gegebenen Gruppe zu bestimmen.

Vorgelegt sei wieder eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, und $E_1 f \ldots E_r f$ sei ihre adjungierte Gruppe. Alsdann stellen wir eine infinitesimale Transformation $\Sigma e_k X_k f$, also auch die von ihr erzeugte eingliedrige Untergruppe als Punkt eines Raumes von $r - 1$ Dimensionen oder also r^{ter} Stufe R_{r-1} mit den *homogenen* Coordinaten $e_1 \ldots e_r$ dar, wie zum Schluss des § 1. Die adjungierte Gruppe vertauscht die eingliedrigen Untergruppen der gegebenen Gruppe unter einander, dementsprechend auch die Punkte $(e_1 : \cdots : e_r)$

Abbildung der eingl. Untergr. als Punkte eines R_{r-1}.

des R_{r-1}. In diesem Raume finden eben diese Vertauschungen ihr anschauliches Bild.

Trf. dieses R_{r-1} durch d. adjung. Gruppe.

Aber jeder Punkt des R_{r-1} hat zweierlei Bedeutung: Bei der adjungierten Gruppe werden ja die Transformationen der gegebenen Gruppe einmal als *Individuen* aufgefasst, die unter einander vertauscht werden, das andere Mal als *Operationen*, denen diese Individuen unterworfen werden. Wir haben demnach einen Punkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ des R_{r-1} erstens als Individuum, nämlich als Repräsentanten einer eingliedrigen Untergruppe der ursprünglichen Gruppe, zweitens aber als Bildpunkt von Transformationen der adjungierten Gruppe aufzufassen, nämlich derjenigen, die anzeigen, wie die Transformationen der ursprünglichen Gruppe unter einander vertauscht werden, sobald man auf sie Transformationen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ ausübt. Es stellt also jeder Punkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ des Raumes R_{r-1} zwar einerseits einen Punkt, andererseits aber auch Transformationen in diesem Raume dar.

Doppelte Deutung jedes Punktes.

Beispiel: Diese doppelte Auffassung tritt z. B. bei der Gruppe aller Rotationen um einen festen Punkt, den Anfangspunkt O:

Beispiel.

$$zq - yr \quad xr - zp \quad yp - xq$$

mit der adjungierten Gruppe

$$e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3} \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_3} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} \quad e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2}$$

auch geometrisch deutlich hervor. Wir deuten e_1, e_2, e_3 als homogene Coordinaten eines Punktes einer Ebene und zwar wählen wir als diese Ebene wie im 2. Beispiel des § 1 die unendlich ferne Ebene des Raumes (x, y, z), indem wir als Punkt $(e_1 : e_2 : e_3)$ den Punkt dieser Ebene bezeichnen, in dem der Strahl vom Anfangspunkt O

$$\frac{x}{e_1} = \frac{y}{e_2} = \frac{z}{e_3}$$

sie trifft. Dann stellt ein unendlich ferner Punkt $(e_1 : e_2 : e_3)$ oder P alle Rotationen dar um die Axe OP. Andererseits stellt er aber auch Transformationen der adjungierten Gruppe dar. Nun ist die adjungierte Gruppe in e_1, e_2, e_3 identisch mit der vorgelegten in x, y, z. Da wir sie in der unendlich fernen Ebene deuten, so stellt sie also die Rotationen der unendlich fernen Ebene in sich dar. Jeder Punkt P ist also der Ausdruck aller Rotationen der unendlich fernen Ebene in sich um den Punkt P. Bei einer solchen Rotation werden alle Punkte Q dieser Ebene unter einander vertauscht, nnd die Punkte Q sind dann als Bildpunkte der Rotationen der gegebenen Gruppe um die Axen OQ zu betrachten.

Üben wir auf die ∞^{r-1} eingliedrigen Untergruppen $\Sigma e_k X_k f$ der ursprünglichen Gruppe nach und nach alle Transformationen der eingliedrigen Gruppe $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ aus, so werden sie continuierlich unter einander vertauscht: Die Punkte $(e_1 : \cdots : e_r)$ beschreiben also im R_{r-1} *Bahnen.* Insbesondere wird die Tangentialrichtung der Bahncurve im Punkte $(e_1 : \cdots : e_r)$ dadurch bestimmt, dass man auf die Transformation $\Sigma e_k X_k f$ die infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ ausübt. Dies haben wir zu Beginn des vorigen Paragraphen gethan, indem wir dort in Formel (16) bez. (18) die Grössen ε bez. $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ schliesslich unendlich klein wählten. Wenn wir die beiden infinitesimalen Transformationen mit Xf und Yf bezeichnen, so können wir das dortige Ergebnis zunächst so formulieren:

Bahncurven der Punkte des R_{r-1}.

Satz 2: *Die infinitesimale Transformation Xf geht durch Ausführung einer infinitesimalen Transformation Yf auf sie über in die infinitesimale Transformation*

$$Xf + (XY)\delta t.$$

Wählen wir Xf als $\Sigma e_k X_k f$ und Yf als $\Sigma \varepsilon_k X_k f$, so finden wir, dass $\Sigma e_k X_k f$ vermöge $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ übergeht in*)

$$\Sigma e_k' X_k f \equiv \sum_1^r{}^k e_k X_k f + \delta t \sum_1^r{}^k \sum{}^l e_k \varepsilon_l (X_k X_l).$$

$e_1 \ldots e_r$ erfahren also gewisse Incremente, sie erleiden eben die in § 2 berechnete infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_k E_k f$. Nun ist $\Sigma e_k X_k f$ durch einen Punkt und auch der Klammerausdruck $(\Sigma e_k X_k, \Sigma \varepsilon_l X_l)$, da er wieder eine infinitesimale Transformation der gegebenen Gruppe darstellt, durch einen Punkt des Raumes R_{r-1} repräsentiert. Unsere Formel giebt also den wichtigen

Satz üb. die Bewegungsrichtg. eines Punktes des R_{r-1}.

Satz 3: *Deutet man die ∞^{r-1} eingliedrigen Untergruppen $\Sigma e_k X_k f$ einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ als Punkte eines $(r-1)$-fach ausgedehnten Raumes mit den homogenen Coordinaten $e_1 \ldots e_r$, und führt man auf die eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ alle Transformationen einer anderen eingliedrigen Untergruppe $\Sigma \varepsilon_l X_l f$ aus, so beschreibt der Bildpunkt*

*) Wir wollen beiläufig darauf aufmerksam machen, dass sich der Hauptsatz der Gruppentheorie infolge dieser Formel so aussprechen lässt:

Die von einer Schar von infinitesimalen Transformationen erzeugten endlichen Transformationen T_a stellen dann und nur dann eine Gruppe dar, wenn auch jede Aufeinanderfolge $T_a^{-1} T_b T_a$ der Schar der T_a angehört, das heisst: wenn die Schar der T_b in sich übergeht, sobald man auf sie irgend eine Transformation T_a ausübt. Die Gruppeneigenschaft $T_a T_b = T_c$ wird also in dem Hauptsatze auf die Eigenschaft $T_a^{-1} T_b T_a = T_d$ zurückgeführt.

von $\Sigma e_k X_k f$ eine Curve, deren Tangente im Punkte $(e_1 : \cdots : e_r)$ die Gerade ist, die diesen Punkt mit dem Bildpunkt von $(\Sigma e_k X_k f, \Sigma \varepsilon_i X_i f)$ verbindet. Werden umgekehrt auf die eingliedrige Untergruppe $\Sigma \varepsilon_i X_i f$ alle Transformationen der eingliedrigen Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ ausgeübt, so beschreibt der Bildpunkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ eine Curve, deren Tangente im Punkte $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ die Gerade ist, die diesen Punkt mit dem Bildpunkt von $(\Sigma e_k X_k f, \Sigma \varepsilon_i X_i f)$ verbindet.

Beispiele.

1. Beispiel: Bei der dreigliedrigen Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit

$$p \quad xp \quad x^2 p$$

stellen wir allgemein $e_1 p + e_2 xp + e_3 x^2 p$ durch einen Punkt einer Ebene dar mit den homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3, sodass die Ecken des Coordinatendreiecks insbesondere die Bildpunkte von p, xp, x^2p sind. (Siehe Fig. 39.) Es ist $(p, xp) \equiv p$. Mithin geht p vermöge xp über in $p + p\delta t$, also in sich, ferner xp vermöge p in $xp + p\delta t$, sodass sich der Bildpunkt von xp vermöge p in der Richtung nach p bewegt. Dies ist in Fig. 39 durch den Pfeil vom Punkte xp zum Punkte p zum Ausdruck gebracht. Weiterhin ist $(xp, x^2p) \equiv x^2p$. Daher der Pfeil von xp nach x^2p. xp geht vermöge x^2p in $xp + x^2p\delta t$ über, während x^2p vermöge xp in sich übergeführt wird. Endlich ist $(p, x^2p) = 2xp$. Mithin geht p vermöge x^2p in $p + xp\delta t$ über und x^2p vermöge p in $x^2p + xp\delta t$. Beides ist in der Figur durch die mit Pfeilen nach xp zeigende, sich zum Teil an die Gerade von p nach x^2p anschmiegende Linie angedeutet. Das hiermit gewonnene schematische Bild für die Zusammensetzung der vorgelegten Gruppe ist, wie wir sehen werden, für die Praxis recht nützlich.

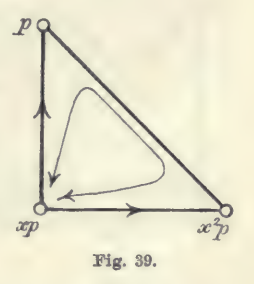


Fig. 39.

Wenn insbesondere zwei infinitesimale Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ und $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ mit einander vertauschbar sind, also

$$(\Sigma e_k X_k f, \ \Sigma \varepsilon_k X_k f) \equiv 0$$

ist, so sind nach Satz 6, § 2 des 17. Kap., die endlichen Transformationen S der Gruppe $\Sigma e_k X_k f$ mit den endlichen Transformationen T der Gruppe $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ vertauschbar. Es ist also auch $T^{-1}ST = S$ und $S^{-1}TS = T$. Also bleibt dann die Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ ungeändert, wenn man auf die Gruppe $X_1 f .. X_r f$ irgend eine Transforma-

tion der Untergruppe $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ ausübt. Man kann in diesem Falle auch nicht von einer Bahncurve sprechen.

2. Beispiel: Die Gruppe p, xp, q sei vorgelegt. Wir deuten $e_1 p + e_2 xp + e_3 q$ als Punkt der Ebene mit den homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3, sodass p, xp, q die Ecken des Coordinatendreiecks dieser Ebene bilden. (Fig. 40.) Die Beziehung $(p, xp) \equiv p$ wird wie im vorigen Beispiel durch einen Pfeil ausgedrückt, der vom Punkte xp zum Punkte p weist. Da $(p, q) \equiv 0$ ist, so wird die eingliedrige Untergruppe p vermöge q gar nicht transformiert, ebenso q nicht vermöge p. Wir drücken dies in der Figur dadurch aus, dass wir die Gerade von p nach q durch Querstriche unterbrechen. Dasselbe gilt von q und xp.

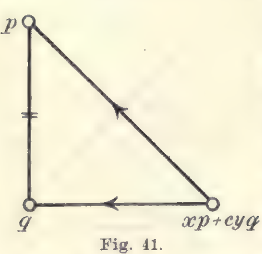


Fig. 40.

3. Beispiel: Sei die Gruppe p, q, $xp + cyq$ gegeben. Hier ist $(p, q) \equiv 0$, in Fig. 41 durch Querstriche markiert; ferner $(p, xp + cyq) \equiv p$, durch einen Pfeil, und $(q, xp + cyq) \equiv cq$, durch einen Pfeil angedeutet. $xp + cyq$ geht also vermöge p über in $xp + cyq + p\delta t$ u. s. w.

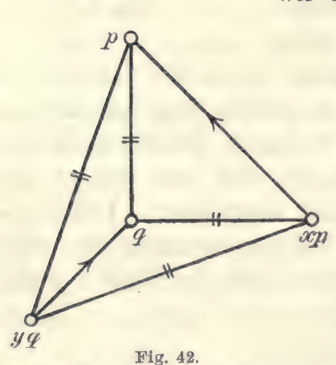


Fig. 41.

4. Beispiel: Die Gruppe p, q, xp, yq stellen wir durch die Punkte des gewöhnlichen Raumes dar, p, q, xp, yq selbst als Ecken eines Coordinatentetraeders, in bezug auf welches der Bildpunkt von $e_1 p + e_2 q + e_3 xp + e_4 yq$ die homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3, e_4 besitzt. (Fig. 42.) Die Kanten des Tetraeders sind, wie man sofort sieht, in der angegebenen Weise zu markieren.

Fig. 42.

5. Beispiel: Die Gruppe p, q, xq giebt zu dem in Fig. 43 dargestellten Schema Anlass.

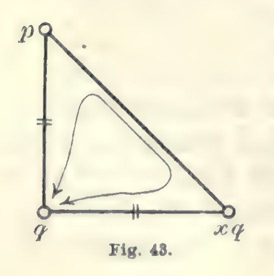


Fig. 43.

Kehren wir zur allgemeinen Betrachtung zurück. Wenn mehrere infinitesimale Transformationen $\Sigma e_k X_k f$, $\Sigma \bar{e}_k X_k f$, $\Sigma \bar{\bar{e}}_k X_k f \dots$ durch ihre Bildpunkte $(e_1 : \cdots : e_r)$, $(\bar{e}_1 : \cdots : \bar{e}_r)$, $(\bar{\bar{e}}_1 : \cdots : \bar{\bar{e}}_r) \dots$ dargestellt sind, so wird eine von ihnen abhängige

$$\text{Const.}\, \Sigma e_k X_k f + \text{Const.}\, \Sigma \bar{e}_k X_k f + \\ + \text{Const.}\, \Sigma \bar{\bar{e}}_k X_k f + \cdots,$$

deren homogene Coordinaten Const. e_k + Const. $\bar{e}_k$ + Const. $\bar{\bar{e}}_k + \cdots$ $(k = 1, 2 \ldots r)$ sind, offenbar durch einen Punkt der von jenen Bildpunkten bestimmten kleinsten *ebenen Mannigfaltigkeit*, d. h. Mannigfaltigkeit, die durch *lineare* Gleichungen dargestellt wird, gegeben. Dies lässt sich sofort umkehren, und wir sehen:

Ebene Mannigfaltigkeit im R_{r-1}.

Bei unserer Abbildungsmethode werden alle infinitesimalen Transformationen Σ Const. $X_k f$, die von s von einander unabhängigen abhängen, durch die Punkte einer *ebenen* Mannigfaltigkeit s^{ter} Stufe dargestellt, und umgekehrt stellen alle Punkte einer ebenen Mannigfaltigkeit s^{ter} Stufe im R_{r-1} alle ∞^{s-1} infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ dar, die aus gewissen s von einander unabhängigen linear ableitbar sind.

Liegt nun eine s-gliedrige *Untergruppe* der gegebenen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ vor, also eine in dieser Gruppe enthaltene Gruppe $(s < r)$, so besitzt sie ∞^{s-1} infinitesimale Transformationen, die aus s von einander unabhängigen linear ableitbar sind. Mithin folgt, dass jede s-gliedrige Untergruppe g_s der gegebenen Gruppe durch eine ebene Mannigfaltigkeit s^{ter} Stufe des R_{r-1} dargestellt wird.

Abbildung einer Untergruppe.

Beispiel: Betrachten wir die Gruppe p, q, xq. Ihre allgemeine eingliedrige Untergruppe $e_1 p + e_2 q + e_3 xq$ wird durch einen Punkt der Bildebene (vgl. das 5. obige Beispiel) dargestellt. Ihre allgemeine zweigliedrige Untergruppe sei zunächst:

Beispiel.

$$\lambda p + \mu q + \nu xq \qquad \varrho p + \sigma q + \tau xq.$$

Klammeroperation liefert, dass auch $(\lambda\tau - \varrho\nu)q$ der Untergruppe angehört. Sind also die infinitesimalen Transformationen der Untergruppe vertauschbar, so ist $\lambda\tau - \varrho\nu = 0$ und also die Untergruppe von der Gestalt:

$$\lambda(p + \alpha xq) + \mu q \qquad \varrho(p + \alpha xq) + \sigma q$$

oder einfacher

$$q \quad \lambda p + \alpha xq.$$

Sind aber die infinitesimalen Transformationen nicht vertauschbar, so ist $\lambda\tau - \varrho\nu \neq 0$, also gehört dann q der Untergruppe an, die daher so zu schreiben wäre:

$$q \quad \varrho p + \tau xq.$$

Dann besteht sie aber doch aus vertauschbaren Transformationen. Jede zweigliedrige Untergruppe hat mithin die Form

$$q \quad \lambda p + \alpha xq.$$

$\lambda p + \alpha x q$ hat zum Bild (Fig. 44) einen Punkt auf der Geraden von p nach xq. Mithin wird jede zweigliedrige Untergruppe durch einen der von q ausgehenden Strahlen dargestellt. Wir werden bald sehen, wie umgekehrt das schematische Bild wertvolle Hülfe zur schnellen Bestimmung der Untergruppen zu leisten vermag.

Fig. 44.

Gleichberechtigte Untergr.

Wir nennen zwei Untergruppen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ *mit einander gleichberechtigt innerhalb dieser Gruppe*, wenn sie vermöge einer Transformation der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ in einander überführbar sind. Offenbar braucht man von allen mit einander gleichberechtigten Untergruppen immer nur eine, einen Typus, zu kennen, um damit alle zu haben, denn alle gleichberechtigten ergeben sich, indem man auf den Typus alle Transformationen der gegebenen Gruppe ausübt.

Gleichberechtigte eingl. Untergruppen.

Sprechen wir zunächst von den *eingliedrigen Untergruppen*. Jede solche wird durch einen Punkt abgebildet. Zwei eingliedrige Untergruppen sind mit einander innerhalb der gegebenen Gruppe gleichberechtigt, wenn sie vermöge einer Transformation der gegebenen Gruppe in einander verwandelt werden können, mit anderen Worten, wenn es eine Transformation der adjungierten Gruppe giebt, die den Bildpunkt der einen in den der anderen überführt. Ist die adjungierte Gruppe im Raume R_{r-1} *transitiv*, so kann jeder Punkt allgemeiner Lage des R_{r-1} in jeden solchen verwandelt werden. Dann sind also alle allgemeinen eingliedrigen Untergruppen $\Sigma e_k X_k f$ innerhalb der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ mit einander gleichberechtigt. Dagegen giebt es dann eventuell Punkte specieller Lage $(e_1 : \cdots : e_r)$, d. h. Punkte, welche die adjungierte Gruppe nicht in alle Punkte des R_{r-1} überzuführen vermag, die also auf Mannigfaltigkeiten im R_{r-1} liegen, die bei der adjungierten Gruppe invariant sind. Diese sind dann Bildpunkte von eingliedrigen Untergruppen, die nicht mit der allgemeinen eingliedrigen Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ gleichberechtigt sind.

Adj. Gruppe sei transitiv.

Beispiel.

Beispiel: Die allgemeine projective Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit p, xp, $x^2 p$ besitzt die adjungierte Gruppe

$$-e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - 2 e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} \qquad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} \qquad 2 e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3}.$$

Diese Gruppe transformiert die Ebene mit den homogenen Coordinaten $e_1 : e_2 : e_3$ transitiv, wie man z. B. dadurch einsehen kann, dass man

nicht-homogene Coordinaten $\mathfrak{x} = \frac{e_1}{e_3}$, $\mathfrak{y} = \frac{e_2}{e_3}$ einführt, wodurch sie die offenbar transitive Form annimmt:

$$-\mathfrak{y}\mathfrak{p} - 2\mathfrak{q} \qquad 2\mathfrak{x}\mathfrak{p} + \mathfrak{y}\mathfrak{q} \qquad -\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{p} + (2\mathfrak{x} - \mathfrak{y}^2)\mathfrak{q}.$$

Man könnte in dieser nicht-homogenen Schreibweise die vorhandenen invarianten Gebilde untersuchen. Wir wollen jedoch die homogene Schreibweise beibehalten. Dabei haben wir aber zu bedenken, dass es bei e_1, e_2, e_3 nur auf ihre Verhältnisse ankommt. Wir müssen daher noch zu den infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe die hinzufügen, die alle Verhältnisse ungeändert lässt:

$$e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}.$$

Nun ergeben sich die invarianten Gebilde nach § 4 des 16. Kap. in bekannter Weise. Wir bilden die Matrix:

$$\begin{vmatrix} -e_2 & -2e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

und setzen ihre dreireihigen Determinanten gleich Null. Dies giebt da e_1, e_2, e_3 nicht sämtlich Null sein dürfen:

$$e_2^2 - 4e_1e_3 = 0,$$

während alle zweireihigen Determinanten überhaupt nur für

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0$$

verschwinden. Das einzige invariante Gebilde ist also der Kegelschnitt (Fig. 45):

$$e_2^2 - 4e_1e_3 = 0.$$

Die vorliegende adjungierte Gruppe ist nämlich die allgemeine projective Gruppe dieses Kegelschnittes. (Vgl. § 3 des 11. Kap.) Wir sehen also: Es sind alle eingliedrigen Untergruppen

$$e_1p + e_2xp + e_3x^2p$$

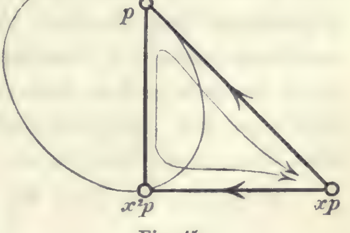


Fig. 45.

der gegebenen Gruppe mit einander gleichberechtigt, in denen $e_2^2 - 4e_1e_3 \neq 0$ ist. Eine solche dagegen, bei der $e_2^2 - 4e_1e_3 = 0$ ist, ist nur mit denen gleichberechtigt, für die dasselbe stattfindet. Dies stimmt mit den Ergebnissen des § 1 des 5. Kap. überein. Bei Untergruppen der

letzten Art ist nämlich $e_1 + e_2 x + e_3 x^2$ ein vollständiges Quadrat. Da durch Nullsetzen dieses Ausdrucks die bei $e_1 p + e_2 xp + e_3 x^2 p$ invarianten Punkte sich ergeben, so sehen wir: die eingliedrigen Untergruppen vom ersten Typus sind diejenigen, bei denen zwei getrennte, die vom zweiten Typus diejenigen, bei denen zwei zusammenfallende Stellen der einfachen Mannigfaltigkeit (x) in Ruhe bleiben.

Dies Ergebnis lässt sich leicht verallgemeinern: Die obige adjungierte Gruppe gehört nämlich überhaupt zu jeder dreigliedrigen Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, bei der

$$(X_1 X_2) \equiv X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_3 f$$

ist. Wir werden später (Kap. 20, § 2) zeigen, dass jede dreigliedrige Gruppe $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$, deren drei Klammerausdrücke $(Y_1 Y_2)$, $(Y_1 Y_3)$, $(Y_2 Y_3)$ keine lineare Relation erfüllen, durch passende Auswahl der infinitesimalen Transformationen auf die vorstehende Form gebracht werden kann*). Also folgt:

Jede dreigliedrige Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, deren Klammerausdrücke $(X_1 X_2)$, $(X_2 X_3)$, $(X_3 X_1)$ von einander unabhängig sind, besitzt zwei Arten von gleichberechtigten eingliedrigen Untergruppen. Die einen sind in der Ebene der adjungierten Gruppe durch die Punkte allgemeiner Lage, die anderen durch die eines Kegelschnitts dargestellt.

Gruppen von dieser Gestalt spielen in der Gruppentheorie an vielen Stellen eine besonders wichtige Rolle.

Adj. Gruppe sei intransit.

Nehmen wir jetzt an, die adjungierte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ der gegebenen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ sei im Raume R_{r-1} *intransitiv*. Dann wird dieser Raum in Scharen von invarianten Mannigfaltigkeiten zerlegt und Punkte auf verschiedenen invarianten Mannigfaltigkeiten stellen wesentlich verschiedene Typen von eingliedrigen Untergruppen der gegebenen Gruppen dar. Dasselbe gilt von den Punkten etwa vorhandener einzelner invarianter Mannigfaltigkeiten. In diesem Falle giebt es also sicher eine unendliche Anzahl von Typen eingliedriger Untergruppen, das allgemeine Symbol eines solchen Typus enthält also dann noch wesentliche willkürliche Constanten oder Functionen.

Beispiel.

Beispiel: Es liege die Gruppe vor:

$$p \quad xp \quad q$$

mit der adjungierten

$$-e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1},$$

*) Siehe auch „Diffgln. m. inf. Trf.", § 2 des 21. Kap.

die intransitiv ist. Diese adjungierte besitzt also eine Invariante (vgl. § 1 des 8. Kap.). Sie zu finden, hat man das vollständige System zu bilden:

$$-e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} = 0, \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} = 0, \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} = 0,$$

wobei die letzte Gleichung deshalb hinzuzufügen ist, weil wir eine Invariante suchen, die in e_1, e_2, e_3 homogen von nullter Ordnung ist. Es ergiebt sich sofort als Invariante $\frac{e_2}{e_3}$. Also bei der adjungierten Gruppe bleibt jede Gerade $\frac{e_2}{e_3} = \text{Const.}$ in Ruhe, d. h. jeder Strahl durch den Bildpunkt von p. (Fig. 46.) Um die einzeln invarianten Curven oder Punkte zu finden, setzen wir alle zweireihigen Determinanten der verschwindenden dreireihigen

$$\begin{vmatrix} -e_2 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

gleich Null. Dies giebt $e_2 = 0$ und $e_1 e_3 = 0$, d. h. entweder den Bildpunkt von p oder den von q. Alle einreihigen Determinanten sind nur für $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, also für ausgeschlossene Werte, gleich Null.

Fig. 46.

Ein Punkt des Strahles $\frac{e_2}{e_3} = c\ (c \neq 0)$ stellt eine eingliedrige Untergruppe $q + cxp + \text{Const.}\, p$ dar und kann in jeden anderen Punkt dieses Strahles mit Ausnahme des einzeln invarianten Punktes p übergeführt werden. Jede solche ist also gleichberechtigt mit $q + cxp$. c dagegen ist wesentlich, denn die adjungierte Gruppe kann zwei Strahlen durch p nicht in einander überführen. Ist $c = 0$, also $q + \text{Const.}\, p$ die Untergruppe, so liegt ihr Bildpunkt auf der Geraden, die p mit q verbindet. Jeder Punkt dieser Geraden kann in jeden anderen, mit Ausnahme der für sich invarianten Punkte p, q übergeführt werden, also etwa in $p + q$. Daher haben wir hier die Typen von eingliedrigen Untergruppen:

$$q + cxp\ (c \neq 0), \quad p + q, \quad p, \quad q.$$

Der erste stellt, da c beliebig ist, ∞^1 Typen dar.

Wir kommen nun allgemein zu s-gliedrigen Untergruppen g_s der gegebenen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$. Eine solche wird, wie gesagt, durch eine ebene Mannigfaltigkeit M_{s-1} von s^{ter} Stufe im Raume R_{r-1} dar-

s-gliedr. Untergr.

gestellt. Es fragt sich nun, welches Kriterium sich dafür aufstellen lässt, dass eine ebene Mannigfaltigkeit M_{s-1} des R_{r-1} eine Untergruppe der gegebenen Gruppe repräsentiere. Da die adjungierte Gruppe linear ist, so führt sie, wie wir wissen, *jede* ebene Mannigfaltigkeit in ebene Mannigfaltigkeiten über. Die ebenen Mannigfaltigkeiten, die Untergruppen der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ darstellen, müssen also noch eine besondere charakteristische Eigenschaft haben.

Um diese zu finden, bedenken wir, dass jede Gruppe bei Ausführung *einer ihrer eigenen* Transformationen auf sie in sich übergeht, nach Satz 6, § 4 des 6. Kap. Ist also z. B. $X_1 f \,.\,.\, X_s f$ eine s-gliedrige Untergruppe g_s der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$, d. h. ist jedes $(X_i X_k)$ für $i, k \leqq s$ linear aus $X_1 f \,.\,.\, X_s f$ allein ableitbar, so geht im Raume R_{r-1} der Bildpunkt einer beliebigen eingliedrigen Untergruppe $e_1 X_1 f + \cdots + e_s X_s f$ der Gruppe g_s, also ein Punkt der g_s darstellenden Mannigfaltigkeit s^{ter} Stufe M_{s-1}, wieder in einen Bildpunkt über, der in der M_{s-1} gelegen ist, sobald eine solche Transformation $(\varepsilon_1 \,.\,.\, \varepsilon_r)$ der adjungierten Gruppe ausgeübt wird, deren Bildpunkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ ebenfalls in der ebenen Mannigfaltigkeit M_{s-1} liegt.

Char. Eigenschaft einer ebenen M_s, die eine Untergruppe darstellt.

Wenn umgekehrt im Raume R_{r-1} eine $(s-1)$fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit M_{s-1} existiert derart, dass jeder ihrer Punkte $(e_1 : \cdots : e_r)$ bei Ausführung irgend einer Transformation der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ ebenfalls in der M_{s-1} liegt, stets wieder in einen Punkt der M_{s-1} übergeht, so stellt, wie wir zeigen werden, dieser M_s eine s-gliedrige Untergruppe g_s der Gruppe G_r dar.

In der That, zunächst stellt die M_{s-1} eine lineare Schar von eingliedrigen Untergruppen der Gruppe G_r dar, die aus s von einander unabhängigen ableitbar ist. Ferner, wenn die Punkte $(e_1 : \cdots : e_r)$ und $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ auf ihr liegen, so soll nach Voraussetzung insbesondere die eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_k X_k f$ vermöge $\Sigma \varepsilon_l X_l f$ wieder in eine eingliedrige Untergruppe übergehen, deren Bildpunkt auf M_{s-1} liegt. Nun aber bewegt sich bei Ausführung von $\Sigma \varepsilon_l X_l f$ der Bildpunkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ in der Richtung auf den Bildpunkt von $(\Sigma e_k X_k f, \Sigma \varepsilon_l X_l f)$ zu, nach Satz 3. Daher liegt auch dieser Bildpunkt in der M_{s-1}, d. h. der Klammerausdruck irgend zweier auf der M_{s-1} dargestellten infinitesimalen Transformationen der G_r gehört der von der M_{s-1} bestimmten linearen Schar an. Nach dem Hauptsatze bildet mithin diese lineare Schar von ∞^s Transformationen der G_r, die durch M_{s-1} repräsentiert werden, eine s-gliedrige Gruppe.

Satz 4: *Deutet man die ∞^{r-1} eingliedrigen Untergruppen $\Sigma e_k X_k f$ einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ als Punkte eines $(r-1)$fach ausgedehnten Raumes mit den homogenen Coordinaten $e_1 \,.\,.\, e_r$, so ist die not-*

wendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine ebene Mannigfaltigkeit s^{ter} *Stufe* M_{s-1} *dieses Raumes eine s-gliedrige Untergruppe der Gruppe* $X_1 f \,.\,. X_r f$ *darstellt, diese: Jeder Punkt der* M_{s-1} *muss bei Ausführung irgend einer Transformation der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkt ebenfalls in der* M_{s-1} *liegt, wieder in einen Punkt der* M_{s-1} *übergehen, d. h. die* M_{s-1} *muss invariant sein gegenüber allen Transformationen der adjungierten Gruppe, die durch ihre eigenen Punkte dargestellt werden.*

Eine ebene M_{s-1}, die eine s-gliedrige Untergruppe, z. B. $X_1 f \,.\,. X_s f$, darstellt, geht also bei allen Transformationen, die von den $E_1 f \,.\,. E_s f$ erzeugt werden, in sich über. Ist nun die adjungierte Gruppe selbst r-*gliedrig*, so gestattet die M_{s-1} sicher mindestens ∞^s Transformationen der adjungierten Gruppe, sie geht daher in höchstens ∞^{r-s} verschiedene Lagen über. Dies letztere gilt offenbar auch, wenn die adjungierte Gruppe weniger als r-gliedrig ist.

1. Beispiel
$p \quad xp \quad x^2p$

1. Beispiel: Wir betrachten wieder die Gruppe $p \quad xp \quad x^2p$. Bei ihrer adjungierten Gruppe bleibt, wie wir sahen, ein Kegelschnitt in Ruhe (siehe Fig. 45). Jede zweigliedrige Untergruppe wird durch eine Gerade dargestellt. Der Klammerausdruck zweier Transformationen auf der Geraden muss wieder auf der Geraden liegen. Dies ist offenbar für die beiden Tangenten des Kegelschnittes der Fall, die vom Bildpunkt von xp ausgehen, wie die Pfeile zeigen. Nun aber ist die adjungierte Gruppe die allgemeine projective Gruppe des Kegelschnittes. Sie führt also jede Tangente in jede andere Tangente über. Alle Tangenten des Kegelschnittes stellen somit gleichberechtigte Untergruppen dar. Irgend eine andere Gerade der Ebene geht bei der adjungierten Gruppe, die selbst dreigliedrig ist, in jede beliebige Gerade allgemeiner Lage über. Sie ist daher nach dem obigen Zusatz zu Satz 4 sicher nicht die Bildgerade einer zweigliedrigen Untergruppe. Es sind somit alle zweigliedrigen Untergruppen der Gruppe $p \quad xp \quad x^2p$ gleichberechtigt. Als Typus können wir etwa die wählen, deren Bild die Tangente in p ist, also $p \quad xp$. Dies stimmt mit Satz 6 in § 2 des 5. Kap. überein.

p
q
xp
yq

Fig. 47.

2. Beispiel:
$p \quad xp \quad q \quad yq$

2. Beispiel: Vorgelegt sei die Gruppe

$$p \quad xp \quad q \quad yq,$$

die im Raume abzubilden ist. (Fig. 47.) Ihre adjungierte Gruppe lautet:

$$e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} \quad e_4 \frac{\partial f}{\partial e_3} \quad e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}.$$

Suchen wir zunächst die invarianten Punkte, Curven und Flächen. Offenbar ist die Gruppe intransitiv. Das vollständige System:

$$\frac{\partial f}{\partial e_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial e_3} = 0, \quad e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + \cdots + e_4 \frac{\partial f}{\partial e_4} = 0$$

liefert ihre Invariante $\frac{e_2}{e_4}$. Jede Ebene $\frac{e_2}{e_4} = \text{Const.}$, das heisst jede Ebene durch die Bildpunkte von p und q ist somit invariant. Um die isolierten invarianten Gebilde zu bestimmen, bilden wir die Matrix unter Hinzufügung der infinitesimalen Transformation

$$e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_4},$$

die wie immer aussagt, dass wir e_1, e_2, e_3 als homogene Veränderliche auffassen, in der Form:

$$\begin{vmatrix} e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}.$$

Die vierreihigen Determinanten der Matrix sind sämtlich Null. Nullsetzen der dreireihigen giebt entweder $e_1 = e_2 = 0$ oder $e_3 = e_4 = 0$ oder $e_2 = e_4 = 0$. Daher sind die drei Geraden von q nach yq, von p nach xp und von p nach q invariant, und zwar kann ein allgemeiner Punkt einer dieser Geraden in jeden anderen allgemeinen Punkt derselben Geraden übergehen, denn Nullsetzen der zweireihigen Determinanten liefert nur zwei invariante Punkte: $e_1 = e_2 = e_4 = 0$, d. h. q, und $e_2 = e_3 = e_4 = 0$, d. h. p. Mithin ergiebt sich: Ein Punkt allgemeiner Lage kann in jeden Punkt allgemeiner Lage übergeführt werden, der in der Ebene durch den ursprünglichen Punkt und p und q gelegen ist. Also ist etwa

$$xp + cyq \quad (c \neq 0)$$

der Typus der allgemeinen eingliedrigen Untergruppe der gegebenen Gruppe. c ist dabei wesentlich. Punkte specieller Lage sind erstens die der Ebene durch p, q und xp. Ein Punkt allgemeiner Lage dieser Ebene kann in jeden Punkt allgemeiner Lage in dieser Ebene übergehen, also z. B. in

$$q + xp.$$

Entsprechend ist

$$p + yq$$

Typus einer Schar von eingliedrigen Untergruppen. Punkte specieller Lage sind ferner die der invarianten Geraden. Ein allgemeiner Punkt der Geraden von p nach xp kann in

$$xp$$

übergeführt werden. Analog kommt der Typus

$$yq.$$

Ein Punkt allgemeiner Lage der Geraden von p nach q kann in

$$p + q$$

verwandelt werden. Schliesslich bleiben noch die beiden einzeln invarianten Punkte

$$p, \quad q.$$

Damit sind alle Typen von eingliedrigen Untergruppen der gegebenen Gruppe bestimmt.

Wir kommen zur Bestimmung der *zweigliedrigen Untergruppen*. Jede derselben wird durch eine Gerade dargestellt. Seien zunächst allgemein

$$e_1 p + e_2 xp + e_3 q + e_4 yq \qquad \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 xp + \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 yq$$

zwei Punkte einer solchen Geraden. Der Klammerausdruck liefert:

$$(e_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 e_2) p + (e_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3 e_4) q.$$

Besteht zunächst die Gruppe aus nicht vertauschbaren Transformationen, so muss also die sie darstellende Gerade die Gerade von p nach q schneiden. Enthält sie zunächst weder p noch q selbst, so dürfen wir die Untergruppe so annehmen:

$$p + \lambda q \quad \varepsilon_2 xp + \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 yq \quad (\lambda \neq 0).$$

Nun giebt der Klammerausdruck, der nicht Null sein soll:

$$\varepsilon_2 p + \lambda \varepsilon_4 q.$$

Dieser Punkt muss mit $p + \lambda q$ identisch sein, weil sonst die Gerade durch p und q ginge. Daher ist

$$\lambda \varepsilon_4 = \lambda \varepsilon_2 \text{ oder } \varepsilon_4 = \varepsilon_2,$$

d. h. wir haben die Gruppe:

$$p + \lambda q \quad \varepsilon_2(xp + yq) + \varepsilon_3 q.$$

Sie wird durch eine beliebige Gerade dargestellt, die in der Ebene durch p, q und $xp + yq$ liegt. Geht die Gerade dagegen durch p, aber nicht durch q, so haben wir:

$$p \quad \varepsilon_2 xp + \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 yq$$

und den Klammerausdruck $\varepsilon_2 p$. Es ist dies also eine beliebige Gerade durch p. Analog ergiebt sich eine beliebige Gerade durch q, als Specialfall die Gerade von p nach q. Wenn ferner die Untergruppe

$$e_1 p + e_2 xp + e_3 q + e_4 yq \qquad \varepsilon_1 p + \varepsilon_2 xp + \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 yq$$

aus vertauschbaren Transformationen besteht, so haben wir

$$e_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 e_2 = 0, \quad e_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3 e_4 = 0,$$

daher auch diese Form der Untergruppe:

$$e_1 p + e_2 xp \quad \varepsilon_3 q + \varepsilon_4 yq,$$

also eine beliebige Gerade, welche die beiden Geraden von p nach xp und q nach yq schneidet. Hiermit sind alle Geraden bestimmt, die zweigliedrige Untergruppen darstellen, nämlich *alle Geraden der Ebene durch* p, q, $xp + yq$, *alle Geraden durch* p, *alle durch* q, *alle Geraden, welche die beiden Geraden von* p *nach* xp *und von* q *nach* yq *treffen.* Sie sind in Fig. 48 angedeutet. Um nun die Typen zu bestimmen bemerken wir: Jede Gerade allgemeiner Lage der Ebene durch p, q, $xp + yq$ kann in jede andere Gerade allgemeiner Lage in dieser Ebene übergeführt werden, denn sonst wäre sie entweder einzeln invariant — und das ist nur die Gerade von p nach q —, oder sie geht in nur ∞^1 Gerade über, die ein invariantes Gebilde umhüllen. Da aber in dieser Ebene nur p und q in Ruhe bleiben, sehen wir: Dies Gebilde könnte nur der Punkt p oder q sein. Wir sehen also, dass jede Gerade in der Ebene durch p, q, $xp + yq$, die weder p noch q enthält, in jede Gerade in dieser Ebene übergehen kann. Wir dürfen daher als Typus benutzen:

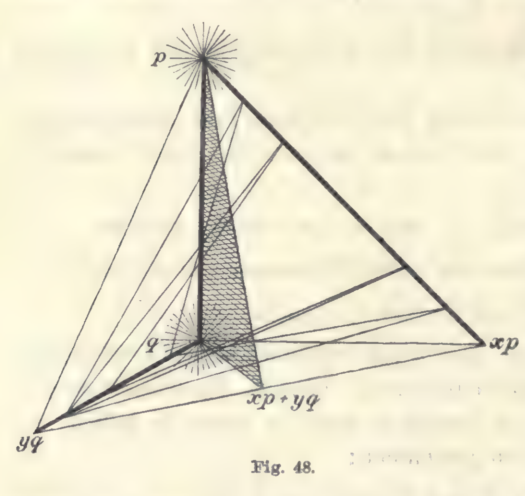


Fig. 48.

$$p + q \quad xp + yq.$$

Wir kommen zu den Geraden durch p. Eine solche kann nur in Geraden übergehen, die in der Ebene liegen, die sie mit q bestimmt, da diese Ebene invariant ist. Sie kann aber in jede Gerade allgemeiner Lage durch p übergehen, die in der durch sie und q bestimmten invarianten Ebene liegt, sobald sie nicht für sich invariant, d. h. die

Gerade nach q oder die nach xp ist. Es ergiebt sich also etwa dieser Typus

$$p \quad xp + cyq \quad (c \neq 0),$$

in dem c wesentlich ist, sowie die beiden besonderen Typen

$$p \quad q \quad \text{und} \quad p \quad xp.$$

Entsprechend ergeben sich noch diese

$$q \quad yq + cxp \quad (c \neq 0) \quad \text{und} \quad q \quad yq.$$

Endlich betrachten wir die Geraden, welche die beiden Geraden von p nach xp und von q nach yq schneiden. Solcher giebt es ∞^2. Liesse sich nicht jede allgemeiner Lage in jede überführen, so würden je ∞^1 eine invariante Regelfläche bilden. Solche giebt es aber nicht ausser den Ebenen durch p, q, xp und durch p, q, yq. Die Geraden in diesen Ebenen gehen durch q bez. p, sind also schon behandelt. Jede andere Gerade von der jetzt betrachteten Art kann folglich in jede solche verwandelt werden. Es kommt also noch etwa dieser Typus:

$$xp \quad yq.$$

Hiermit sind alle Typen zweigliedriger Untergruppen erschöpft.

Bestimmen wir nun noch die *dreigliedrigen Untergruppen*, die durch Ebenen dargestellt werden. Da eine solche Ebene bei allen in ihr gelegenen ∞^2 infinitesimalen Transformationen in sich übergehen muss und die adjungierte Gruppe nur viergliedrig ist, so kann sie bei der adjungierten Gruppe höchstens ∞^1 Lagen einnehmen, also ein invariantes Gebilde umhüllen. Da wir alle invarianten Punkte, Curven und Flächen kennen, so folgt: *Eine solche Ebene muss entweder eine der invarianten Ebenen sein oder eine Ebene durch eine der invarianten Geraden.* Die ersteren geben die typische Form:

$$p \quad q \quad xp + cyq \quad (c \neq 0),$$

in der c wesentlich ist, sowie die besonders ausgezeichneten:

$$p \quad q \quad xp \quad \text{und} \quad p \quad q \quad yq.$$

Betrachten wir ferner die Ebenen durch p und xp. Jede solche von allgemeiner Lage wird transformiert, sodass sich der Typus ergiebt:

$$p \quad xp \quad yq.$$

Specieller Lage ist nur die Ebene durch p, q, xp, die für sich invariant ist und schon vorher bestimmt ist. Analog kommt nur noch der Typus

$$q \quad yq \quad xp.$$

Somit sind alle Typen von Untergruppen der vorgelegten Gruppe

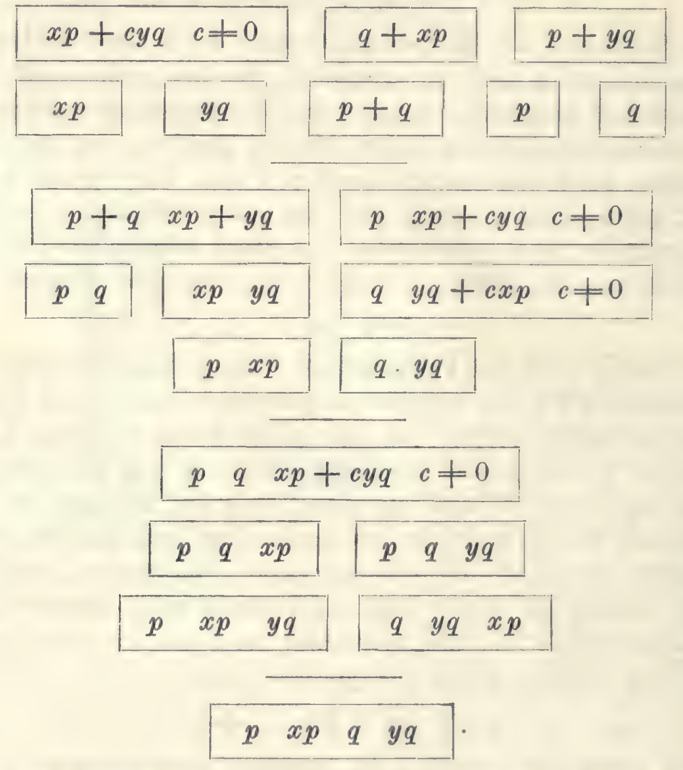
bestimmt. Man sieht, wie sich sonst mühselige Rechnungen hierbei sehr bequem durch die geometrische Anschauung ersetzen lassen.

Unser Gesamtergebnis wollen wir zusammenfassen:

Jede Untergruppe der Gruppe

$$\boxed{p \quad xp \quad q \quad yq}$$

ist innerhalb dieser Gruppe gleichberechtigt mit einem der Typen:



Keiner dieser Typen ist überzählig. Der Parameter c ist, wo er auftritt, wesentlich.

Zur Übersicht wollen wir noch ausdrücklich bemerken, *dass alle zweigliedrigen Untergruppen durch die Strahlen von vier Strahlensystemen, alle dreigliedrigen durch die Ebenen dreier Ebenenbüschel dargestellt werden.*

Wir wollen nunmehr noch einige wichtige Begriffe und nützliche Bezeichnungen einführen. —

Wir wissen, dass eine s-gliedrige Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe $X_1f\,..\,X_rf$ sich im Raume der adjungierten Gruppe $E_1f\,..\,E_rf$

als eine ebene Mannigfaltigkeit s^{ter} Stufe M_{s-1} darstellt, die bei allen den infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant bleibt, deren Bildpunkte in ihr liegen. Es könnte nun diese Mannigfaltigkeit M_{s-1} auch bei solchen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant bleiben, deren Bildpunkte *nicht* in ihr liegen. Wenn sie insbesondere bei *allen* infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant bleibt, so gestattet sie alle Transformationen der adjungierten Gruppe. In diesem Falle soll die durch die M_{s-1} dargestellte s-gliedrige Untergruppe eine *invariante Untergruppe der Gruppe* $X_1 f \,..\, X_r f$ heissen.

Invariante Untergruppe.

Nach Satz 3 lässt sich dafür, dass eine Untergruppe eine invariante Untergruppe ist, sofort ein analytisches Kriterium aufstellen. Denn nach diesem Satze muss jeder Klammerausdruck zwischen einer beliebigen ihrer infinitesimalen Transformationen und einer beliebigen infinitesimalen Transformation der ganzen Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ zum Bildpunkt einen Punkt der M_{s-1} haben, d. h. jeder solcher Klammerausdruck muss eine infinitesimale Transformation der in Frage stehenden Untergruppe sein.

Wählt man z. B. s von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer s-gliedrigen Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ gerade als $X_1 f \,..\, X_s f$, so ist natürlich zunächst jedes

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^s{}_j \text{Const.}\ X_j f$$

für $i \leqq s$, $k \leqq s$, weil $X_1 f \,..\, X_s f$ für sich eine Gruppe erzeugen. Diese Gruppe $X_1 f \,..\, X_s f$ ist nun dann und nur dann eine invariante Untergruppe der r-gliedrigen $X_1 f \,..\, X_r f$, wenn überhaupt jeder Klammerausdruck $(X_i X_k)$, in dem *eine* der infinitesimalen Transformationen der Untergruppe $X_1 f \,..\, X_s f$ angehört, sich als infinitesimale Transformation der Untergruppe darstellt, wenn also die Relationen

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^s{}_j \text{Const.}\ X_j f$$

auch schon für $i \leqq s$ bestehen.

Insbesondere im Falle $s = 1$ ergiebt sich eine eingliedrige invariante Untergruppe. Sie wird dargestellt durch einen bei der adjungierten Gruppe invarianten Punkt. Die infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ ist somit *invariant*, wenn r Gleichungen von der Form $(X_i, \Sigma \varepsilon_k X_k) = \varrho_i \Sigma \varepsilon_k X_k$ bestehen, im speciellen *ausgezeichnet*, wenn alle ϱ_i verschwinden. (Vgl. S. 465.)

Eine zweigliedrige invariante Untergruppe wird durch eine bei der adjungierten Gruppe invariante Gerade dargestellt, u. s. w.

Beispiel: *Beispiel:* Bei der obigen Gruppe

$$p \quad q \quad xp \quad yq$$

haben wir folgende invariante Untergruppen: Als eingliedrige die durch die beiden invarianten Punkte dargestellten:

$$p, \quad q,$$

als zweigliedrige die durch die drei invarianten Geraden dargestellten:

$$p \quad q, \qquad p \quad xp, \qquad q \quad yq,$$

als dreigliedrige die durch eine der ∞^1 invarianten Ebenen durch die Punkte p, q gegebene:

$$p \quad q \quad xp + cyq \quad (c \neq 0),$$

in der c wesentlich ist. Die beiden

$$p \quad q \quad xp, \qquad p \quad q \quad yq$$

sind hierbei besonders bemerkenswert.

Nach unserer Terminologie stellt *jede* bei der adjungierten Gruppe invariante ebene Mannigfaltigkeit eine invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe dar. Insbesondere können wir den ganzen Raum r^{ter} Stufe R_{r-1}, in dem die adjungierte Gruppe veranschaulicht wurde, als eine bei der adjungierten Gruppe invariante ebene Mannigfaltigkeit auffassen. Wir könnten daher auch sagen, dass die Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ ihre eigene grösste invariante Untergruppe ist.

Gruppe der $(X_i X_k)$.

Aus der begrifflichen Auffassung im Raume R_{r-1} lässt sich noch ein bemerkenswerter Satz ableiten: $(X_i X_k)$ wird als infinitesimale Transformation der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ durch einen Punkt im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe repräsentiert. Es werden also die $(X_i X_k)$ durch höchstens $\frac{1}{2} r(r-1)$ Punkte dargestellt derart, dass die durch sie bestimmte kleinste ebene Mannigfaltigkeit entweder der ganze Raum R_{r-1} oder von geringerer Dimensionenzahl ist. Im letzteren Falle enthält diese Mannigfaltigkeit M sicher auch alle Punkte, welche die Klammerausdrücke

$$\left(\sum_1^r {}^i e_i X_i f, \quad \sum_1^r {}^k \varepsilon_k X_k f \right)$$

überhaupt darstellen. Wir behaupten, dass diese Mannigfaltigkeit M bei der adjungierten Gruppe invariant ist. In der That führt die adjungierte Gruppe nach Satz 3 jeden Punkt des R_{r-1} fort in der

Richtung nach einem derjenigen Punkte, welche Bildpunkte der Klammerausdrücke sind, also in einer Richtung nach einem Punkte von M hin. Jeder Punkt von M selbst erfährt daher bei der adjungierten Gruppe eine Fortschreitungsrichtung, die in M liegt. Dies aber sagt aus, dass M bei der adjungierten Gruppe invariant ist. Sie ist demnach das Bild einer invarianten Untergruppe der gegebenen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$:

Satz 4: *Erzeugen r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \dots X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe, so erzeugt auch der Inbegriff aller $(X_i X_k)$ eine Gruppe; sind unter diesen Klammerausdrücken gerade ϱ $(\leqq r)$ von einander unabhängig, so erzeugen sie eine ϱ-gliedrige invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$* *).

Unser Satz lässt sich auch analytisch sofort beweisen: Da nach dem Hauptsatze

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i,\ k = 1,\ 2 \dots r)$$

ist, so ist

$$((X_i X_k) X_l) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} (X_s X_l),$$

d. h. jede infinitesimale Transformation $(X_i X_k)$ giebt mit einer $X_l f$ combiniert stets eine aus den Klammerausdrücken linear ableitbare, was zu beweisen war.

Beispiel.

Beispiel: Bei der mehrfach betrachteten Gruppe $p \;\; xp \;\; q \;\; yq$ liefern die Klammerausdrücke nur p und q. In der That ist $p \;\; q$ eine invariante Untergruppe. Die Gerade vom Bildpunkte p zum Bildpunkte q stellt alle durch Klammeroperation hervorgehenden infinitesimalen Transformationen dar. Nach Satz 3 folgt daher, dass jeder Punkt des Raumes der adjungierten Gruppe bei Ausführung irgend welcher Transformationen der adjungierten Gruppe stets Fortschreitungen erfährt, die nach den Punkten dieser einen Geraden gerichtet sind. Aus dieser Bemerkung folgt ohne weiteres, dass jede Ebene durch p und q für sich bei der adjungierten Gruppe invariant bleibt. Dies haben wir oben, als wir sämtliche Untergruppen der Gruppe $p \;\; xp \;\; q \;\; yq$ bestimmten, auf analytischem Wege gezeigt.

Wie in diesem Bespiel, so lässt sich überhaupt allgemein bemerken:

---

*) Vgl. Theorem 46, § 1 des 21. Kap. der „Diffgln. m. inf. Trf.“. Den Satz 4 des Textes stellte Lie im Archiv for Math. og Naturv., Christiania 1883, zum ersten Male ausdrücklich auf.

Die Bildpunkte der Klammerausdrücke $(X_i X_k)$ bestimmen, wie gesagt, eine ebene Mannigfaltigkeit, nach deren Punkten sämtliche Fortschreitungen aller Punkte des Raumes R_{r-1} bei der adjungierten Gruppe gerichtet sind. Wenn also z. B. alle $(X_i X_k)$ sich auf nur eine infinitesimale Transformation reducieren, so bleibt im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe jede Gerade durch ihren Bildpunkt in Ruhe. Reducieren sich alle $(X_i X_k)$ auf nur zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen, so bleibt im Raume R_{r-1} bei der adjungierten Gruppe jede durch ihre beiden Bildpunkte gelegte ebene Mannigfaltigkeit dritter Stufe (also von zwei Dimensionen) in Ruhe u. s. w.

Erste derivierte Gruppe.

Die von allen $(X_i X_k)$ erzeugte invariante Untergruppe der gegebenen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ nennen wir ihre *erste derivierte Gruppe.* So ist bei der Gruppe $p \quad xp \quad q \quad yq$ die erste derivierte Gruppe die Gruppe $p \quad q$. Bei der Gruppe $p \quad xp \quad x^2p$ ist die erste derivierte eben diese Gruppe selbst. Bei der Gruppe $p \quad q \quad r$ in x, y, z ist die erste derivierte Gruppe einfach die identische Transformation, sie ist, sagen wir, nullgliedrig.

Zweite derivierte Gruppe.

Man kann nun von der ersten derivierten Gruppe wieder die erste derivierte aufstellen. Wir nennen sie die *zweite derivierte Gruppe* der ursprünglichen u. s. w. So lautet bei der Gruppe $p \quad q \quad xp \quad xq$ die erste derivierte $p \quad q \quad xq$, die zweite q, die dritte ist hier die Identität. Die Gruppe $p \quad xp \quad x^2p$ ist ihre eigene erste, zweite, dritte u. s. w. derivierte Gruppe.

Der Begriff: derivierte Gruppe besitzt eine besondere Wichtigkeit, wie jedenfalls teilweise aus unseren späteren Entwickelungen hervorgehen wird. Wir haben auch schon soeben darauf aufmerksam gemacht, dass die erste derivierte Gruppe mit Nutzen für die Bestimmung von Scharen von invarianten ebenen Mannigfaltigkeiten bei der adjungierten Gruppe verwendet werden kann*).

Einfache Gruppe.

Eine letzte Bezeichnung, die wir noch einführen, ist diese: Eine Gruppe, die keine invariante Untergruppe — natürlich abgesehen von der Gruppe selbst — enthält, heisst *einfache Gruppe.* Wir können die Definition offenbar auch so aussprechen: Eine einfache Gruppe

---

*) Mit Hülfe des Begriffes: derivierte Gruppe haben wir in den „Diffgln. m. inf. Trf." in Kap. 21 alle Typen von Zusammensetzungen dreigliedriger Gruppen bestimmt. Vgl. weiter unten Kap. 20. Die Gliederzahlen der successiven derivierten Gruppen haben besondere Bedeutung in der Theorie der Differentialgleichungen.

ist eine solche, bei deren adjungierter Gruppe keine ebene Mannigfaltigkeit invariant bleibt, denn jede invariante Mannigfaltigkeit stellt ja eine invariante Untergruppe der in Rede stehenden Gruppe dar.

Z. B. die Gruppe $p \quad xp \quad x^2p$ ist einfach, da ihre adjungierte keinen Punkt und keine Gerade in Ruhe lässt.

Zusammengesetzte Gruppe.

Den Gegensatz zu den einfachen Gruppen bilden die *zusammengesetzten Gruppen.* So ist die öfters betrachtete Gruppe $p \quad xp \quad q \quad yq$ zusammengesetzt.

Der Begriff: einfache Gruppe spielt in der Gruppentheorie eine besonders hervorragende Rolle. Es erhellt unmittelbar, dass eine einfache Gruppe ihre eigene erste, zweite u. s. w. derivierte Gruppe ist. Das Umgekehrte gilt aber nicht, wie die Gruppe zeigt:

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp,$$

die ihre eigene erste, zweite u. s. w. derivierte Gruppe ist und doch die invariante Untergruppe $p \quad q$ besitzt.

Allgemeine Bemerkung.

Zum Schluss machen wir noch *eine wichtige allgemeine Bemerkung:* Wenn zwei r-gliedrige Gruppen $X_1f \,.\,.\, X_rf$ und $Y_1f \,.\,.\, Y_rf$ gleichzusammengesetzt sind, d. h. wenn sich (vgl. § 1 des 17. Kap.) r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $\mathfrak{Y}_1f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_rf$ bei der zweiten so auswählen lassen, dass in den Formeln für die Klammerausdrücke

$$(X_iX_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks}X_sf, \quad (\mathfrak{Y}_i\mathfrak{Y}_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, d_{iks}X_sf$$

jedes $d_{iks} = c_{iks}$ ist, so ist es klar, dass beide Gruppen, sobald man die zweite in der Form $\mathfrak{Y}_1f \,.\,.\, \mathfrak{Y}_rf$ wählt, dieselbe adjungierte Gruppe besitzen, da diese von den c_{iks} bez. d_{iks} allein bestimmt wird. Hieraus erhellt, dass das Problem, alle Untergruppen einer Gruppe zu bestimmen, ohne Weiteres erledigt ist, sobald man alle Untergruppen einer mit der vorgelegten Gruppe gleichzusammengesetzten Gruppe schon bestimmt hat. In einem der früheren Beispiele haben wir dies schon verwertet.

Abteilung V.

Lineare homogene Gruppen.

In den früheren Abteilungen wurden wir auf verschiedenen Wegen zur Betrachtung solcher Gruppen geführt, deren Transformationen linear und homogen, also allgemein von der Form

$$x_i' = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

waren. Einmal geschah dies, als wir in der Ebene die allgemeine projective Gruppe untersuchten, die den Anfangspunkt und die unendlich ferne Gerade in Ruhe lässt:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

in § 4 des 5. Kap. Wir hoben damals hervor, dass diese Gruppe das Büschel der Strahlen $\frac{y}{x} =$ Const. durch den Anfangspunkt vermöge der allgemeinen projectiven Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit in sich transformiert. Ferner haben wir öfters darauf hingewiesen, dass sich manche die projectiven Gruppen in der Ebene betreffende Probleme in übersichtlicherer, vollständigerer und eleganterer Weise erledigen lassen, sobald man drei homogene Punktcoordinaten benutzt, wodurch die betreffende Gruppe in eine lineare homogene übergeht. Endlich erkannten wir, dass die adjungierte Gruppe einer beliebigen gegebenen Gruppe aus linearen homogenen Transformationen besteht.

Es ist hiernach erklärlich, dass wir den linearen homogenen Gruppen eine besondere Bedeutung zuschreiben und sie in dieser Abteilung eingehend behandeln.

Wir verwerten ausserdem die Theorie der linearen homogenen Gruppen für die so wichtige *Theorie der Zusammensetzung der Gruppen* und für die Theorie der höheren *complexen Zahlen.*

Kapitel 19.

Lineare homogene Gruppen.

Zunächst werden wir die allgemeine lineare homogene Gruppe *in n Veränderlichen* und die in ihr enthaltene specielle lineare homogene Gruppe besprechen. Darauf fassen wir den Fall *dreier Veränderlicher* x_1, x_2, x_3 besonders ins Auge und werden so zur allgemeinen projectiven Gruppe des gewöhnlichen Raumes (x_1, x_2, x_3) geführt, die den Anfangspunkt und die unendlich ferne Ebene in Ruhe lässt. Wenn wir aber andererseits x_1, x_2, x_3 als *homogene Punktcoordinaten in der Ebene* auffassen, gelangen wir zur allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene, aber in homogener Darstellung.

Diese beiden verschiedenen begrifflichen Deutungen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in drei Veränderlichen benutzen wir, um alsdann alle *Untergruppen* dieser Gruppe zu bestimmen, wobei wir uns teilweise auf die frühere Bestimmung aller projectiven Gruppen der Ebene stützen werden.

Die Verallgemeinerungen auf n Veränderliche und weitere Anwendungen auf Untergruppen machen wir zum Schluss.

§ 1. Die allgemeine und die specielle lineare homogene Gruppe.

Wir betrachten die Gesamtheit aller *linearen homogenen Transformationen* in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$:

Allgem. lin homog. Trf in n Veränderlichen

$$(1) \qquad x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Solche n Gleichungen stellen nur dann eine Transformation dar, wenn sie nach $x_1 \ldots x_n$ auflösbar sind, wenn also ihre Determinante

$$\varDelta_a = \left| \begin{matrix} a_{ik} \\ i, k = 1, 2 \ldots n \end{matrix} \right| \neq 0$$

ist. Diese Voraussetzung machen wir daher stets.

Es ist klar, dass die Aufeinanderfolge zweier linearer homogener Transformationen, also etwa von (1) und:

$$(2) \qquad x_j'' = b_{j1}x_1' + b_{j2}x_2' + \cdots + b_{jn}x_n' \quad (j = 1, 2 \ldots n)$$

wieder eine lineare homogene Transformation

$$(3) \qquad x_j'' = c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \cdots + c_{jn}x_n \quad (j = 1, 2 \ldots n)$$

liefert. Alle linearen homogenen Transformationen bilden somit eine

Allgem. lin. homogene Gruppe.

Gruppe, *die allgemeine lineare homogene Gruppe in n Veränderlichen.* Sie enthält zu jeder ihrer Transformationen die inverse, denn die Auflösung von (1) nach $x_1 \ldots x_n$ ergiebt $x_1 \ldots x_n$ als lineare homogene Functionen von $x_1' \ldots x_n'$.

In (3) haben die Coefficienten offenbar allgemein die Werte:

$$c_{jk} = \sum_1^n {}^l\, a_{lk} b_{jl} \quad (j,\, k = 1,\, 2 \ldots n).$$

Es ist mithin die Determinante Δ_c von (3):

$$|\, c_{jk} \,| = |\, a_{lk} \,| \cdot |\, b_{jl} \,|$$

oder kürzer:

$$\Delta_c = \Delta_a \Delta_b, \tag{4}$$

also gleich dem Product der Determinanten von (1) und (2).

Endlich bemerken wir noch, dass zwei Transformationen von der Form (1) dann und nur dann übereinstimmen, wenn ihre rechten Seiten für alle Werte von $x_1 \ldots x_n$ gleich sind, wenn also die Coefficienten a_{ik} der einen gleich den entsprechenden der andern sind. Da es in (1) im Ganzen n^2 Coefficienten giebt, so sehen wir, dass in n Veränderlichen ∞^{n^2} verschiedene lineare homogene Transformationen existieren.

Wir fassen alles zusammen in den

Satz 1: *Alle ∞^{n^2} linearen homogenen Transformationen in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$:*

$$x_i' = \sum_1^n {}^k\, a_{ik} x_k \quad (i = 1,\, 2 \ldots n)$$

bilden eine continuierliche Gruppe mit paarweis inversen Transformationen. Nennt man die Determinante der a_{ik} die Determinante der vorstehenden Transformation, so ist die Determinante Δ_c der linearen homogenen Transformation, die der Aufeinanderfolge zweier linearer homogener Transformationen mit den bez. Determinanten Δ_a, Δ_b äquivalent ist, gleich dem Product dieser beiden:

$$\Delta_c = \Delta_a \Delta_b.$$

Specielle lin. homog. Transformation.

Betrachten wir nun insbesondere alle linearen homogenen Transformationen, deren Determinante den Wert 1 hat. Wir nennen sie *specielle lineare homogene Transformationen.* Die Aufeinanderfolge zweier solcher hat nach Formel (4) ebenfalls die Determinante $\Delta_c = 1$, da $\Delta_a = \Delta_b = 1$ ist. Mithin bilden alle speciellen linearen homogenen

Transformationen für sich eine Gruppe, die *specielle lineare homogene Gruppe.* Sie enthält paarweis inverse Transformationen, denn führen wir nach einer linearen homogenen Transformation mit der Determinante 1 ihre inverse aus, die etwa die Determinante D besitze, so ergiebt sich die identische Transformation $x_i' = x_i$, und letztere hat offenbar die Determinante 1. Nach (4) ist demnach

Specielle lin. hom. Gruppe.

$$1 = 1 \cdot D,$$

d. h. $D = 1$. Also hat auch die zu einer speciellen linearen homogenen Transformation inverse die Determinante 1. Eine lineare homogene Transformation (1) ist speciell, wenn ihre n^2 Coefficienten a_{ik} der einzigen Bedingung $\Delta_a = 1$ unterworfen werden. Mithin sind $n^2 - 1$ Coefficienten willkürlich und es giebt unter den ∞^{n^2} verschiedenen linearen homogenen Transformationen gerade ∞^{n^2-1} specielle.

Satz 2: *Alle ∞^{n^2-1} linearen homogenen Transformationen mit der Determinante* 1 *in n Veränderlichen bilden eine continuierliche Gruppe mit paarweis inversen Transformationen.*

Die allgemeine lineare homogene Gruppe ist n^2-gliedrig, die specielle $(n^2 - 1)$-gliedrig. Die eine besitzt also n^2, die andere $n^2 - 1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen. Diese wollen wir jetzt bestimmen.

Es ist sicher — da beide Gruppen paarweis inverse Transformationen enthalten —, dass es Werte der Coefficienten a_{ik} geben muss, für die sich die Gleichungen (1) auf die der identischen Transformation $x_i' = x_i$ reducieren. Verstehen wir allgemein unter ε_{ik} die Zahl 1 oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, so sind die fraglichen Werte diese:

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

Mithin liefert die Annahme

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \alpha_{ik}\delta t \quad (i, k = 1, 2 \ldots n) \tag{5}$$

eine *infinitesimale Transformation der allgemeinen linearen homogenen Gruppe*, die insbesondere dann und nur dann der speciellen angehört, wenn die Determinante

Inf. lin. hom. Trf.

$$| \varepsilon_{ik} + \alpha_{ik}\delta t |$$

gleich 1 ist, wenn also — da die höheren Potenzen von δt nicht in Betracht kommen und in der Determinante nur die Glieder der Hauptdiagonale endliche Werte, nämlich $1 + \alpha_{ii}\delta t$ $(i = 1, 2 \ldots n)$, besitzen — die Gleichung erfüllt ist:

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \cdots + \alpha_{nn} = 0. \tag{6}$$

Substituieren wir die Werte (5) in (1), so kommt:

$$x_i' = x_i + \sum_1^n {}^k \alpha_{ik} x_k \cdot \delta t \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

oder

$$\delta x_i = \sum_1^n {}^k \alpha_{ik} x_k \cdot \delta t,$$

sodass die gesuchte infinitesimale Transformation das Symbol hat:

$$(7) \qquad Xf \equiv \sum_1^n {}^i \sum {}^k \alpha_{ik} x_k p_i.$$

Inf. spc. lin. hom. Transform.

Hierin ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ mit p_i bezeichnet. Insbesondere ist Xf eine *infinitesimale specielle lineare homogene Transformation*, wenn darin $\alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$ die Bedingung (6) erfüllen.

Lassen wir dagegen die α_{ik} ganz willkürlich, so stellt Xf irgend eine infinitesimale Transformation der allgemeinen linearen homogenen Gruppe dar. Wählen wir alle α_{ik} gleich Null mit Ausnahme eines, so ergiebt sich $x_k p_i$. Solcher $x_k p_i$ giebt es gerade n^2, und sie sind sämtlich von einander unabhängig.

Satz 3: *Die allgemeine lineare homogene Gruppe in $x_1 \ldots x_n$ wird erzeugt von den n^2 von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen*

$$x_k p_i \quad (i, k = 1, 2 \ldots n).$$

Wenn wir alle α_{ik} gleich Null setzen mit Ausnahme eines α_{ik}, in dem $i \neq k$ ist, so erfüllen die Coefficienten die Bedingung (6), und es ergiebt sich dann eine infinitesimale Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe

$$x_k p_i \quad (i \neq k).$$

Solcher giebt es im ganzen $n^2 - n$. Wenn wir andererseits alle α_{ik} gleich Null setzen mit Ausnahme von $\alpha_{ii} + \alpha_{nn} = 1$, so kommt als infinitesimale Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe

$$x_i p_i - x_n p_n.$$

Solcher giebt es $n - 1$. Wir haben daher insgesamt $n^2 - n + n - 1$, also $n^2 - 1$ Symbole

$$x_k p_i \quad (i \neq k), \quad x_i p_i - x_n p_n,$$

die offenbar von einander unabhängig sind. Da die specielle lineare homogene Gruppe auch gerade $(n^2 - 1)$-gliedrig ist, so folgt:

Satz 4: *Die specielle lineare homogene Gruppe in $x_1 \ldots x_n$ wird er-*

zeugt von den n^2-1 *von einander unabhängigen infinitesimalen Transformationen:*

$$x_k p_i \quad (i \neq k), \quad x_i p_i - x_n p_n$$
$$(i,\, k = 1,\, 2 \,..\, n).$$

Deutung im Raume von n Dimensionen.

Wir wollen der allgemeinen und der speciellen linearen homogenen Gruppe eine begriffliche Deutung unterlegen, indem wir $x_1 \,..\, x_n$ als gewöhnliche Cartesische Punktcoordinaten in einem Raume von n Dimensionen deuten. Alsdann stellt die lineare homogene Transformation (1) eine solche Transformation dieses Raumes dar, die jede ebene Mannigfaltigkeit wieder in eine ebene Mannigfaltigkeit überführt. Denn ist etwa:

$$(8) \qquad x_i = \bar{a}_{i1} x_1' + \cdots + \bar{a}_{in} x_n' \quad (i = 1,\, 2 \,..\, n)$$

die Auflösung von (1) nach $x_1 \,..\, x_n$, so sieht man, dass die ebene $(n-1)$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die wir kurz Ebene nennen:

$$(9) \qquad \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_0 = 0$$

vermöge der Transformation (1) wieder in eine Ebene

$$\sum_1^n{}^k \left(\sum_1^n{}^i \lambda_i \bar{a}_{ik} \right) x_k' + \lambda_0 = 0$$

oder

$$(10) \qquad \lambda_1' x_1' + \cdots + \lambda_n' x_n' + \lambda_0' = 0$$

übergeht, bei der

$$(11) \qquad \lambda_k' = \sum_1^n{}^i \lambda_i \bar{a}_{ik}, \quad \lambda_0' = \lambda_0 \quad (k = 1,\, 2 \,..\, n)$$

ist. Wenn wir zwei Ebenen

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_0 = 0,$$
$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n + \mu_0 = 0$$

dann und nur dann parallel nennen, wenn $\lambda_1 \,..\, \lambda_n$ in denselben Verhältnissen zu einander stehen wie $\mu_1 \,..\, \mu_n$, indem wir so eine Thatsache für den Fall $n = 2,\, 3$ auf beliebiges n als Definition übertragen, so lehren die Werte (11) unmittelbar, *dass bei einer linearen homogenen Transformation* (1) *parallele Ebenen in parallele Ebenen übergehen*, denn $\lambda_1' \,..\, \lambda_n'$ sind in (11) von λ_0 frei. Wir bedienen uns der aus dem gewöhnlichen Raume geläufigen Redeweise, dass das Unendlichferne eine Ebene ist. Eine beliebige Ebene hat mit ihr eine ebene $(n-2)$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit gemein und parallele Ebenen sind dann dadurch charakterisiert, dass sie dieselbe ebene $(n-2)$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit im Unendlichfernen besitzen. Daher

Invarianz des Parallelismus.

können wir auch sagen: Die lineare homogene Transformation (1) führt jede in der unendlich fernen Ebene gelegene $(n-2)$fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit in eine ebensolche über. Die unendlich ferne Ebene wird daher in sich transformiert.

Invarianz der unendl. fernen Ebene.

Endlich sieht man sofort, dass die Transformation (1) den Anfangspunkt in Ruhe lässt. Also sagen wir:

Satz 5: *Eine lineare homogene Transformation in* $x_1 \ldots x_n$ *führt in einem* n*fach ausgedehnten Raume mit den gewöhnlichen Punktcoordinaten* $x_1 \ldots x_n$ *jede Ebene in eine Ebene über und lässt den Anfangspunkt sowie die unendlich ferne Ebene invariant.*

Begriffliche Definition d. lin. hom. Transform.

Man kann zeigen, dass die linearen homogenen Transformationen die allgemeinsten sind, die dies thun, dass sie also durch diese Eigenschaften definiert sind. Wir gehen jedoch hierauf nicht weiter ein.

Man kann den analytischen Ausdruck für den Inhalt des von 4 Punkten $(x_i, y_i, z_i, \quad i = 1, 2, 3, 4)$ des gewöhnlichen Raumes bestimmter Tetraeders

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

auf n Veränderliche verallgemeinern und dadurch zur Definition des Rauminhaltes machen: $n+1$ Punkte $(x, x_1^j \ldots x_n^j, \quad j = 1, 2 \ldots n+1)$ bestimmten ein $(n+1)$Flach mit dem Rauminhalt

$$J = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdot & \cdot & x_n^1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdot & \cdot & x_n^2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdot & \cdot & x_n^{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Trf. der Rauminhalte.

Alsdann kann man leicht einsehen, analog wie es in § 2 des 4. Kap. geschah, dass $n+1$ Punkte mit dem Rauminhalt J vermöge der linearen homogenen Transformation (1) mit der Determinante Δ_a in $n+1$ Punkte mit dem Rauminhalt

$$J' = \Delta_a \cdot J$$

übergehen. Insbesondere folgt dann für $\Delta_a = 1$, dass die *speciellen* linearen homogenen Transformationen diejenigen sind, welche alle Rauminhalte ungeändert lassen.

In drei Veränderlichen.

Insbesondere wollen wir von nun an $n = 3$ setzen, also die allgemeine und die specielle lineare homogene Gruppe in drei Veränderlichen betrachten. Die erstere ist neun-, die letztere achtgliedrig.

Deutung im gew. Raume.

Die begriffliche Deutung findet jetzt im gewöhnlichen Raume mit den Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 statt. In ihm bleibt bei jeder linearen

homogenen Transformation der Anfangspunkt O und die unendlich ferne Ebene in Ruhe, d. h. parallele Geraden und Ebenen gehen in ebensolche über. Auch geht jeder Strahl durch O wieder in einen solchen über.

Für unsere Untersuchungen ist die Frage nach den bei einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation

$$Xf \equiv (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3)p_1 + (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3)p_2 + \\ + (\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3)p_3$$

invarianten Strahlen und Ebenen, die durch den Anfangspunkt O gehen, ganz besonders wichtig. Es ist aber zweckmässig, zunächst die Frage nach *allen invarianten Ebenen und Punkten* überhaupt zu behandeln.

Invarianz eines Punktes.

Fragen wir uns also zunächst, *wann ein Punkt* (x_1, x_2, x_3) *bei der infinitesimalen linearen homogenen Transformation* Xf *invariant bleibt.* Dazu ist notwendig und hinreichend, dass gleichzeitig

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = 0,$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = 0,$$
$$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = 0$$

sei. Diese Gleichungen lassen sich durch ein nicht verschwindendes Wertsystem nur dann befriedigen, wenn ihre Determinante $|\alpha_{ik}|$ Null ist. Ist dies der Fall, so existiert sicher mindestens ein invarianter Punkt (x_1^0, x_2^0, x_3^0) ausser dem Anfangspunkt. Da dann auch $\varrho x_1^0, \varrho x_2^0, \varrho x_3^0$ die drei Gleichungen bei beliebigem ϱ erfüllen, so erhellt, dass, wenn ausser dem Anfangspunkt O ein invarianter Punkt vorhanden ist, auch alle Punkte des Strahles von O nach diesem Punkte bei der vorgelegten infinitesimalen linearen homogenen Transformation in Ruhe bleiben.

Invarianz einer Ebene.

Wenden wir uns zweitens zur Betrachtung *aller bei* Xf *invarianten Ebenen.* Eine im Endlichen gelegene Ebene

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_0 = 0 \tag{12}$$

bleibt bei Xf nur dann in Ruhe, wenn

$$\sum_1^3 {}^i \lambda_i(\alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3) = 0 \tag{13}$$

ist vermöge (12). Wenn λ_0 nicht Null ist, d. h. die Ebene nicht durch den Anfangspunkt geht, so muss also die letzte Relation an sich identisch bestehen, d. h. es muss einzeln

$$\sum_1^3 {}^i \lambda_i \alpha_{i1} = 0, \quad \sum_1^3 {}^i \lambda_i \alpha_{i2} = 0, \quad \sum_1^3 {}^i \lambda_i \alpha_{i3} = 0 \tag{14}$$

sein. Diese drei Gleichungen lassen sich durch nicht sämtlich verschwindende λ_1, λ_2, λ_3 nur dann erfüllen, wenn die Determinante $|\alpha_{ik}|$ Null ist. Es ist dieselbe Determinante, die oben auftrat. Nur dann also, wenn ausser dem Anfangspunkt noch ein invarianter Punkt im Endlichen vorhanden ist, giebt es auch eine nicht durch den Anfangspunkt gehende im Endlichen gelegene invariante Ebene. Ja, alsdann existiert auch eine ganze Schar von invarianten Ebenen. Es ist nämlich jede zur vorgelegten Ebene parallele Ebene invariant, da die Forderungen (14) nur die Verhältnisse von λ_1, λ_2, λ_3 geben.

Invarianz einer Ebene durch den Anfangspkt.

Besonders wichtig ist für uns, wie schon hervorgehoben, die Frage nach *allen bei Xf invarianten Ebenen, die durch den Anfangspunkt gehen.* Für eine Ebene (12) durch O, für die also $\lambda_0 = 0$ ist, ist (13) nur dann eine Folge von (12), wenn es eine Grösse ϱ derart giebt, dass

$$\sum^i \sum^k \lambda_i \alpha_{ik} x_k = \varrho \sum^k \lambda_k x_k,$$

also einzeln

$$\sum^i \lambda_i \alpha_{ik} = \varrho \lambda_k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{15}$$

wird. Diese drei Gleichungen für λ_1, λ_2, λ_3 lassen sich nur dann durch nicht sämtlich verschwindende Werte von λ_1, λ_2, λ_3 befriedigen, wenn ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varrho & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \varrho & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

ist. ϱ ist daher als Wurzel dieser Gleichung zu wählen, die sicher gerade cubisch ist, da ϱ^3 den nicht verschwindenden Factor -1 hat. Im allgemeinen wird es demnach gerade drei bei Xf invariante Ebenen durch den Anfangspunkt O geben. Im Besonderen können nur zwei oder nur eine, andererseits aber auch unendlich viele invariante Ebenen durch O vorhanden sein. Es ergeben sich hier, wenn man die Betrachtung genauer durchführt, ebensoviele Fälle wie in der Ebene bei der Aufsuchung aller bei einer infinitesimalen projectiven Transformation invarianten Punkte oder Geraden. (Vgl. § 1 und § 3 des 3. Kap.) Wir wollen hierauf jedoch nicht weiter eingehen, da wir derselben Fragestellung weiter unten in anderer Fassung begegnen werden.

Invarianz eines Strahles durch den Anfangspkt.

Invarianz eines unendlich fernen Punktes.

Wir wenden uns schliesslich zur Betrachtung *der durch den Anfangspunkt gehenden, bei Xf invarianten Strahlen.* Wir bemerken sofort, dass sich die Frage nach den durch O gehenden invarianten Strahlen mit der Frage nach *den unendlich fernen invarianten Punkten* deckt. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass bei einer linearen homo-

genen Transformation sowohl der Anfangspunkt als auch die unendlich ferne Ebene in Ruhe bleiben.

Wir können dieser Sachlage dadurch einen präcisen analytischen Ausdruck geben, dass wir bemerken, dass sich die Grössen x_1, x_2, x_3, die ja zunächst Cartesische Punktcoordinaten im Raume sind, als *homogene Coordinaten eines durch den Anfangspunkt gehenden Strahles* — dessen Punkte die Coordinaten ϱx_1, ϱx_2, ϱx_3 haben — und gleichzeitig als *homogene Coordinaten eines unendlich fernen Punktes* auffassen lassen.

x_1, x_2, x_3 als homog. Coord. der Strahlen u. der unendl. fernen Punkte.

Unter Strahl wollen wir von jetzt ab in diesem Paragraphen nur einen Strahl durch den Anfangspunkt, also einen Radiusvector verstehen.

Die Frage nach den invarianten Strahlen bez. den invarianten unendlich fernen Punkten deckt sich mit der Frage nach allen Punkten (x_1, x_2, x_3), die bei Xf längs ihres Strahles verschoben werden, die also den Gleichungen

$$\frac{\delta x_1}{x_1} = \frac{\delta x_2}{x_2} = \frac{\delta x_3}{x_3}$$

oder den äquivalenten Gleichungen:

$$\delta x_1 = \varrho x_1 \delta t, \quad \delta x_2 = \varrho x_2 \delta t, \quad \delta x_3 = \varrho x_3 \delta t,$$

mithin den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 &= \varrho x_1, \\
\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 &= \varrho x_2, \\
\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 &= \varrho x_3
\end{aligned}$$

genügen. Diese Gleichungen besitzen nur dann nicht sämtlich verschwindende Lösungen x_1, x_2, x_3, wenn ihre Determinante:

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{11} - \varrho & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} - \varrho & \alpha_{23} \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \varrho
\end{vmatrix} = 0$$

ist. ϱ muss daher wieder die schon oben besprochene cubische Gleichung (16) erfüllen:

Es hat sich also ergeben:

Satz 6: *Ist die infinitesimale lineare homogene Transformation*

$$Xf \equiv \sum_1^3{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k p_i$$

im Raume mit den gewöhnlichen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 vorgelegt, so findet man alle bei ihr invarianteu Strahlen durch den Anfangspunkt

$$x_1 = x_1^0 \cdot t, \quad x_2 = x_2^0 \cdot t, \quad x_3 = x_3^0 \cdot t,$$

indem man x_1^0, x_2^0, x_3^0 den Gleichungen unterwirft:

$$\sum_1^3{}^k \alpha_{ik} x_k^0 = \varrho x_i^0 \quad (i = 1, 2, 3),$$

alle bei ihr invarianten Ebenen

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$$

durch den Anfangspunkt, indem man λ_1, λ_2, λ_3 den Gleichungen unterwirft:

$$\sum_1^3{}^i \alpha_{ik} \lambda_i = \varrho \lambda_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Beide Male hat man ϱ als Wurzel der cubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varrho & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \varrho & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

zu wählen.

Eine lineare homogene Transformation

$$(17) \qquad x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

führt x_1, x_2, x_3 in neue Werte x_1', x_2', x_3' über. Da für die Strahlen nur die Verhältnisse der Coordinaten in betracht kommen, diese Verhältnisse $x_i' : x_k'$ aber homogen von nullter Ordnung in den Coefficienten a sind, so folgt, dass zwei Transformationen (17) die Strahlen in derselben Weise unter einander vertauschen, wenn die Coefficienten der einen denen der andern proportional sind. Für die Transformationen des Strahlenbündels kommen also auch nur die Verhältnisse der a_{ik} in (17) in betracht. Da die Determinante der a_{ik} nicht Null ist, so können wir in (17) statt der a_{ik} ihnen proportionale Constanten setzen, sodass die Determinante dieser gerade gleich 1 wird, ohne dass dadurch die Transformation der Strahlen geändert wird. Alsdann aber kommen wir zu einer *speciellen* linearen homogenen Transformation. Es giebt also stets eine specielle lineare homogene Transformation, welche die Strahlen genau so unter einander vertauscht, wie eine beliebige allgemeine lineare homogene Transformation.

Wir können als nicht-homogene Coordinaten der ∞^2 Strahlen etwa die beiden Verhältnisse

$$x \equiv \frac{x_1}{x_3}, \quad y \equiv \frac{x_2}{x_3}$$

verwerten. Es sind x, y die Tangenten gewisser Winkel, die der Strahl im Coordinatensystem bestimmt. Bei Benutzung dieser nichthomogenen Bestimmungsstücke stellt sich die Transformation (17) der Strahlen so dar:

$$(17') \qquad x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.$$

Die Coordinaten x, y werden folglich allgemein *projectiv* transformiert. (Siehe Kap. 1, 2.) Wir können mithin sagen:

Proj. Trf. d. Strahlen.

Satz 7: *Übt man auf die Punkte* (x_1, x_2, x_3) *des Raumes die allgemeine lineare homogene Gruppe in* x_1, x_2, x_3 *aus, so werden die Strahlen* $\left(x \equiv \frac{x_1}{x_3}, \quad y \equiv \frac{x_2}{x_3}\right)$ *durch den festen Anfangspunkt vermöge der allgemeinen projectiven Gruppe der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit* (x, y) *unter einander transformiert.*

Jeder allgemeinen linearen homogenen Transformation (17) entspricht eine bestimmte projective Transformation (17′). Auch wissen wir, dass allen ∞^1 Transformationen (17), in denen die a_{ik} dieselben Verhältnisse besitzen, ein und dieselbe Transformation (17′) zugeordnet ist. Da nun (17′) bekanntlich (nach § 1 des 2. Kap.) gerade ∞^8 verschiedene Transformationen darstellt, so folgt, dass auch umgekehrt jeder Transformation (17′) gerade ∞^1 Transformationen (17) entsprechen. Insbesondere ist unter diesen ∞^1 Transformationen (17), wie wir oben sahen, stets mindestens eine enthalten, die der speciellen linearen homogenen Gruppe angehört. Man sieht ohne Mühe ein, dass es gerade drei sind, doch ist dies nicht von Belang für unsere Zwecke.

Wegen dieses geometrischen Zusammenhanges zwischen den linearen homogenen Transformationen in drei und den projectiven Transformationen in zwei Veränderlichen lässt sich die Zuordnung zwischen beiden in folgender Weise rein analytisch schärfer formulieren:

Satz 8: *Man kann die* ∞^9 *Transformationen* T_a *der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in drei Veränderlichen den* ∞^8 *Transformationen* T_a *der allgemeinen projectiven Gruppe in zwei Veränderlichen so zuordnen, dass je* ∞^1 *Transformationen* T_a *dieselbe Transformation* T_a *und umgekehrt jeder Transformation* T_a ∞^1 *Transformationen* T_a *entsprechen. Ist*

$$T_a T_b = T_c$$

und sind T_a, T_b, T_c *den Transformationen* T_a, T_b, T_c *zugeordnet, so ist auch*

$$\mathsf{T}_a \mathsf{T}_b = \mathsf{T}_c.$$

Insbesondere kann man die ∞^8 *Transformationen* T_a *der speciellen*

linearen homogenen Gruppe in drei Veränderlichen den ∞^8 *Transformationen* T_a *der allgemeinen projectiven Gruppe in zwei Veränderlichen so zuordnen, dass jeder* T_a *eine bestimmte* T_a *und jeder* T_a *eine discrete Anzahl von Transformationen* T_a *entspricht, sodass mit*

$$T_a T_b = T_c$$

auch

$$\mathsf{T}_a \mathsf{T}_b = \mathsf{T}_c$$

ist.

Diese Beziehung haben wir für den Fall der linearen homogenen Transformationen in *zwei* Veränderlichen schon in § 4 des 5. Kap. kennen gelernt. Man drückt sie kürzer so aus, dass man sagt: Die allgemeine lineare homogene Gruppe in drei Veränderlichen ist *meroedrisch isomorph*, die specielle aber *holoedrisch isomorph* mit der allgemeinen projectiven Gruppe in zwei Veränderlichen.

Isomorphismus der betrachteten Gruppen mit der proj. Gruppe.

Entsprechen der inf. lin. u. inf. proj. Transform.

Insbesondere entsprechen auch ∞^1 *infinitesimale* lineare homogene Transformationen in x_1, x_2, x_3 einer *infinitesimalen* projectiven Transformation in x, y. Um diese Zuordnung herzustellen, gehen wir aus von:

$$Xf \equiv \sum_1^3{}_i \sum{}_k \alpha_{ik} x_k p_i$$

und bilden die Incremente von

$$x \equiv \frac{x_1}{x_3}, \quad y \equiv \frac{x_2}{x_3}.$$

Dies giebt:

$$\frac{\delta x}{\delta t} \equiv \frac{x_3 \delta x_1 - x_1 \delta x_3}{x_3^2 \delta t} = \alpha_{13} + (\alpha_{11} - \alpha_{33})x + \alpha_{12} y - \alpha_{31} x^2 - \alpha_{32} xy,$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} \equiv \frac{x_3 \delta x_2 - x_2 \delta x_3}{x_3^2 \delta t} = \alpha_{23} + \alpha_{21} x + (\alpha_{22} - \alpha_{33})y - \alpha_{31} xy - \alpha_{32} y^2,$$

sodass die Xf zugeordnete infinitesimale projective Transformation lautet:

$$Uf \equiv (\alpha_{13} + (\alpha_{11} - \alpha_{33})x + \alpha_{12} y - \alpha_{31} x^2 - \alpha_{32} xy)\, p + \\ + (\alpha_{23} + \alpha_{21} x + (\alpha_{22} - \alpha_{33})y - \alpha_{31} xy - \alpha_{32} y^2)\, q.$$

Man sieht, dass in Uf die drei Coefficienten α_{11}, α_{22}, α_{33} nur in ihren Differenzen auftreten, sodass Uf sich nicht ändert, wenn α_{11}, α_{22}, α_{33} um dieselbe Constante λ vermehrt werden. Daher ist vorstehendes Uf nicht nur obiger Xf, sondern allen ∞^1 infinitesimalen Transformationen von der Form:

$$Xf + \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)$$

zugeordnet.

Wenn aber Uf eine infinitesimale Transformation der *speciellen*

linearen homogenen Gruppe zugeordnet werden soll, so tritt keine willkürliche Constante λ auf. Denn wenn Xf der speciellen Gruppe angehört, so ist dies mit $Xf + \lambda(x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3)$ nicht mehr der Fall, da Xf nur dann in der speciellen Gruppe enthalten ist, wenn nach (6)

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$$

ist.

Tafeln für den Gebrauch.

Wir wollen für die Zuordnung der speciellen linearen homogenen Gruppe in x_1, x_2, x_3 zur allgemeinen projectiven Gruppe in x, y eine für den Gebrauch bequeme Tafel aufstellen, indem wir Xf in einer der 8 besonderen Formen wählen:

$$x_k p_i \quad (k \neq i), \quad x_1 p_1 - x_3 p_3, \quad x_2 p_2 - x_3 p_3.$$

Z. B. für $Xf \equiv x_2 p_1$ sind alle α_{ik} gleich Null mit Ausnahme von α_{12}, sodass $Uf \equiv yp$ wird.

Wird durch das Zeichen $\equiv$ die Zuordnung ausgedrückt, so kommen wir zu der Tafel:

$$\begin{array}{|llll|} x_3 p_1 \equiv p, & x_3 p_2 \equiv q, & x_2 p_1 \equiv yp, & x_1 p_2 \equiv xq, \\ x_1 p_1 - x_3 p_3 \equiv 2xp + yq, & & x_2 p_2 - x_3 p_3 \equiv xp + 2yq, & \\ x_1 p_3 \equiv -x(xp + yq), & & x_2 p_3 \equiv -y(xp + yq). & \end{array}.$$

Hiernach ist z. B. der infinitesimalen speciellen linearen homogenen Transformation

$$(x_1 + x_3)p_1 + (x_1 - x_3)p_3$$

die projective

$$(1 + 2x - x^2)p + (y - xy)q$$

zugeordnet. Werden vermöge der ersteren die Punkte (x_1, x_2, x_3) des Raumes transformiert, so werden die Strahlen $\left(x \equiv \frac{x_1}{x_3},\ y \equiv \frac{x_2}{x_3}\right)$ durch O vermöge der letzteren unter einander vertauscht.

Um die Tafel auch umgekehrt gebrauchen zu können, schreiben wir sie so:

$$\begin{array}{|ll|} p \equiv x_3 p_1, \quad q \equiv x_3 p_2, & yp \equiv x_2 p_1, \quad xq \equiv x_1 p_2, \\ 3xp \equiv 2x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3, & 3yq \equiv 2x_2 p_2 - x_1 p_1 - x_3 p_3, \\ x(xp + yq) \equiv - x_1 p_3, & y(xp + yq) \equiv - x_2 p_3 \end{array}.$$

Hiernach ist der allgemeinen infinitesimalen projectiven Transformation

$$Uf \equiv ap + bq + cxp + dyp + exq + gyq + hx(xp + yq) + ky(xp + yq)$$

in der That die infinitesimale specielle lineare homogene Transformation zugeordnet:

$$Xf \equiv (dx_2 + ax_3)p_1 + (ex_1 + bx_3)p_2 - (hx_1 + kx_2)p_3 +$$
$$+ \frac{c-g}{3}(x_1p_1 - x_2p_2) + \frac{c}{3}(x_1p_1 - x_3p_3) + \frac{g}{3}(x_2p_2 - x_3p_3).$$

§ 2. Die lineare homogene Gruppe in x_1, x_2, x_3 als allgemeine projective Gruppe der Ebene.

x_1, x_2, x_3 als homog. Coord. in beliebiger Ebene.

Wir haben schon oben bemerkt, dass wir die Veränderlichen x_1, x_2, x_3, die wir bisher als Coordinaten eines Punktes im Raume deuteten, auch als homogene Coordinaten des Punktes *in der unendlich fernen Ebene* auffassen können, in dem der Strahl durch jenen ersteren Punkt diese Ebene trifft.

Wir wollen von jetzt ab allgemeiner x_1, x_2, x_3 als homogene Coordinaten *in einer beliebig gegebenen Ebene* auffassen: Unter x, y verstehen wir gewöhnliche Cartesische Punktcoordinaten in der Ebene und setzen

$$x \equiv \frac{x_1}{x_3}, \quad y \equiv \frac{x_2}{x_3}.$$

Alsdann dürfen wir x_1, x_2, x_3 als homogene Coordinaten des Punktes (x, y) der Ebene betrachten.

Lin. homog. Transform.

Eine allgemeine lineare homogene Transformation in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3:

$$(17) \qquad x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

giebt, wenn wir dementsprechend

$$x \equiv \frac{x_1}{x_3}, \quad y \equiv \frac{x_2}{x_3}; \quad x' \equiv \frac{x_1'}{x_3'}, \quad y' \equiv \frac{x_2'}{x_3'}$$

setzen, die Transformation in x, y:

$$(17') \qquad x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}, \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},$$

Proj. Trf.

also eine allgemeine projective Transformation in der Ebene (x, y). Umgekehrt leuchtet ein, dass jede projective Transformation (17′) der (xy)-Ebene mit einer linearen homogenen Transformation (17) der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 äquivalent ist.

Mithin transformiert die allgemeine lineare homogene Gruppe in x_1, x_2, x_3 die Punkte der Ebene

$$x \equiv \frac{x_1}{x_3}, \quad y \equiv \frac{x_2}{x_3}$$

durch die allgemeine projective Gruppe. Dass nun aber erstere Gruppe neun-, letztere nur achtgliedrig ist, findet hierbei seine Erklärung darin, dass je ∞^1 Transformationen (17) dieselbe projective Transformation (17′) in der Ebene darstellen, denn in (17′) kommen nur die acht Verhältnisse der a_{ik} in betracht. Wir heben überdies hervor, dass die eingliedrige Gruppe

$$x_1' = a x_1, \quad x_2' = a x_2, \quad x_3' = a x_3$$

alle Punkte der (xy)-Ebene in Ruhe lässt.

Aus den letzten Betrachtungen des vorigen Paragraphen folgt, dass insbesondere auch die achtgliedrige *specielle* lineare homogene Gruppe in x_1, x_2, x_3 die ganze projective Gruppe der Ebene darstellt, wie dies in Satz 8 ohne Zuhülfenahme der jetzigen geometrischen Deutung des Näheren ausgesprochen wurde.

In den homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 wird eine beliebige Gerade durch eine Gleichung von der Form

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{18}$$

gegeben. Da die Transformation (17) in der Ebene $(x_1 : x_2 : x_3)$ projectiv ist, so werden bei ihr die Geraden unter einander vertauscht. Wir wollen den analytischen Ausdruck für diese Linientransformation suchen.

Transformation der Geraden.

Die Gerade (18) werde vermöge (17) in die Gerade

$$u_1' x_1' + u_2' x_2' + u_3' x_3' = 0 \tag{19}$$

übergeführt. Die zu (17) inverse Transformation wird (19) in (18) verwandeln. Diese inverse Transformation geht durch Auflösung von (17) nach x_1, x_2, x_3 hervor. Bezeichnen wir mit A_{ik} die Unterdeterminante der Determinante

$$\Delta_a = \left| \begin{array}{c} a_{ik} \\ i, k = 1, 2, 3 \end{array} \right|$$

hinsichtlich des Gliedes a_{ik}, so giebt diese Auflösung bekanntlich

$$x_k = \frac{1}{\Delta_a} (A_{1k} x_1' + A_{2k} x_2' + A_{3k} x_3') \quad (k = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Substitution der vorstehenden Werte in (18) giebt:

$$\sum_1^3{}^i \sum{}^k A_{ik} u_k x_i' = 0.$$

Es soll nun diese Gleichung mit (19) übereinstimmen. Ihre linke Seite soll also gleich der von (19), eventuell multipliciert mit einem Factor, sein. Da es aber auch zur Bestimmung der Geraden (19) nur

auf die Kenntnis der Verhältnisse der u_1', u_2', u_3' ankommt, so können wir den Factor ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 annehmen, also setzen:

$$\sum_1^3{}^i \sum{}^k A_{ik} u_k x_i' = \sum_1^3{}^i u_i' x_i'.$$

Hieraus folgt

$$u_i' = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{21}$$

Bekanntlich heissen u_1, u_2, u_3 homogene Liniencoordinaten. Wir sprechen daher das Ergebnis so aus:

Transf. der homogenen Liniencoord.

Satz 9: *Bezeichnen x_1, x_2, x_3 homogene Punkt- und u_1, u_2, u_3 homogene Liniencoordinaten in der Ebene, so werden bei der allgemeinen projectiven Transformation der Ebene:*

$$x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

die Geraden unter einander vertauscht vermöge der Transformation:

$$u_i' = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dabei bedeutet A_{ik} die Unterdeterminante der Determinante $|a_{ik}|$ hinsichtlich a_{ik}.

In § 2 des 10. Kap. haben wir dieselbe Betrachtung in nichthomogenen Punkt- und Liniencoordinaten durchgeführt.

Überhaupt ist es nicht schwer, die Betrachtungen des 10. Kap. in homogenen Coordinaten wiederzugeben oder von neuem abzuleiten. Doch wollen wir uns darauf beschränken, dies nur anzudeuten. Nach § 4 des 10. Kap. nennen wir diejenige Punkttransformation, die hervorgeht, wenn in (21) statt u allgemein x geschrieben wird, *eine zur Transformation* (17) *dualistische Transformation.*

Dualist. Transf.

Haben wir irgend eine Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe ins Auge gefasst, so erhalten wir eine zu ihr dualistische Gruppe, indem wir jede ihrer Transformationen (17) ersetzen durch die zugehörige Transformation (21) und sodann x statt u und x' statt u' schreiben.

Inf. lineare homog. Trf.

Es liege eine *infinitesimale* lineare homogene Transformation vor:

$$Xf \equiv \sum_1^3{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{22}$$

Sie geht, wie wir sahen, aus (17) hervor, wenn man in (17)

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \alpha_{ik} \delta t \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

setzt, dabei unter ε_{ik} die Zahl 1 oder 0 verstehend, je nachdem $i = k$

oder $\neq k$ ist. Die Substitution dieser Werte in (21) wird also die infinitesimale Linientransformation Uf ergeben, welche die infinitesimale projective Punkttransformation Xf nach sich zieht.

Bequemer ist es aber, diese infinitesimale Linientransformation Uf direct abzuleiten. Wenn wir Xf auf die Punkte der Geraden

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

ausüben, so gehen sie in die Punkte einer unendlich benachbarten Geraden

$$\sum_1^3{}^i (u_i + \delta u_i)(x_i + \delta x_i) = 0$$

über, deren Gleichung auch so geschrieben werden kann:

$$\sum_1^3{}^i u_i x_i + \sum_1^3{}^i x_i \delta u_i + \sum_1^3{}^i u_i \delta x_i + \sum_1^3{}^i \delta u_i \delta x_i = 0.$$

Die linke Seite soll gleich $\Sigma u_i x_i$ sein. Da das letzte Glied von zweiter Ordnung unendlich klein ist, so bleibt also nur:

$$\sum_1^3{}^i x_i \delta u_i + \sum_1^3{}^i u_i \delta x_i = 0,$$

woraus durch Einsetzung der Werte:

$$\delta x_i = \sum_1^3{}^k \alpha_{ik} x_k \delta t$$

folgt:

$$\sum_1^3{}^i x_i \delta u_i + \sum_1^3{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k u_i \delta t = 0$$

oder

$$\sum_1^3{}^i x_i \left\{ \delta u_i + \sum_1^3{}^k \alpha_{ki} u_k \delta t \right\} = 0,$$

sodass einzeln sein muss:

$$\delta u_i = -\sum_1^3{}^k \alpha_{ki} u_k \delta t \quad (i = 1, 2, 3).$$

Die u_1, u_2, u_3 erfahren also vermöge Xf die infinitesimale Transformation

Inf. Trf. der Geraden.

$$Uf \equiv -\sum_1^3{}^i \sum{}^k \alpha_{ki} u_k \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Wie man sieht, geht Uf aus $-Xf$ hervor, wenn man darin x durch u und α_{ik} durch α_{ki} ersetzt.

Satz 10: *Bedeuten* x_1, x_2, x_3 *homogene Punktcoordinaten und* u_1, u_2, u_3 *homogene Liniencoordinaten in der Ebene, so erfahren die Geraden der Ebene bei der infinitesimalen projectiven Punkttransformation*

$$Xf \equiv \sum_1^3{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

die infinitesimale Transformation

$$Uf \equiv -\sum_1^3{}^i \sum{}^k \alpha_{ki} u_k \frac{\partial f}{\partial u_i}.$$

Will man gleichzeitig die infinitesimalen Transformationen der Punkte und der Geraden betrachten, so hat man das Symbol $Xf + Uf$ zu benutzen.

Wir können auch sagen:

Zu einander dualist. inf. lin. homog. Transform.

Satz 11: *Zur infinitesimalen projectiven Transformation*

$$Xf \equiv \sum{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

in der Ebene mit den homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 *ist die infinitesimale Transformation*

$$Yf \equiv -\sum{}^i \sum{}^k \alpha_{ki} x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sowie jede aus letzterer durch lineare homogene Transformation in x_1, x_2, x_3 *hervorgehende infinitesimale Transformation dualistisch.*

Invarianz eines Punktes.

Fragen wir uns, wie sich in homogenen Coordinaten die Forderung ausdrückt, *dass ein Punkt* $(x_1 : x_2 : x_3)$ *bei einer infinitesimalen projectiven Transformation der Ebene in Ruhe bleibt.* Diese Frage deckt sich vom analytischen Gesichtspunkt aus mit einer früher erledigten, nämlich mit der Frage nach dem Kriterium für die Invarianz eines durch den Coordinatenanfang gehenden Strahles bei einer vorgelegten infinitesimalen linearen homogenen Transformation des Raumes (x_1, x_2, x_3).

Direct können wir das gesuchte Kriterium in dieser Weise ableiten: Der Punkt mit den *homogenen* Coordinaten x_1, x_2, x_3 in der Ebene bleibt bei Xf in Ruhe, wenn der Punkt $(x_1 + \delta x_1 : x_2 + \delta x_2 : x_3 + \delta x_3)$ mit ihm zusammenfällt, d. h. wenn δx_1, δx_2, δx_3 proportional mit bez. x_1, x_2, x_3 sind, wenn also

$$\delta x_i = \varrho x_i \delta t \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist, oder also endlich, wenn die schon im vorigen Paragraphen besprochenen Gleichungen bestehen:

$$(23) \qquad \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 = \varrho x_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

die sich nur dann durch nicht sämtlich verschwindende Werte von x_1, x_2, x_3 befriedigen lassen, wenn ϱ der cubischen Gleichung genügt:

$$\Delta_{(\varrho)} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varrho & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \varrho & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Invarianz einer Geraden.

Andererseits bleibt eine *Gerade* $(u_1 : u_2 : u_3)$, wie eine analoge Betrachtung zeigt, nur dann in Ruhe, wenn die Incremente δu_k der Liniencoordinaten den u_k proportional sind, also etwa

$$\delta u_k = -\varrho u_k \delta t \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist. Die Werte der δu_k liest man aus Uf ab und findet:

$$(24) \qquad \alpha_{1k} u_1 + \alpha_{2k} u_2 + \alpha_{3k} u_3 = \varrho u_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen lassen sich nur dann durch nicht sämtlich verschwindende Werte von u_1, u_2, u_3 befriedigen, wenn ϱ der cubischen Gleichung genügt:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varrho & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \varrho & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

ϱ ist also auch jetzt eine Wurzel der obigen Gleichung $\Delta_{(\varrho)} = 0$. Man bemerkt, dass wir die Gleichungen (24) schon im vorigen Paragraphen statt in u_1, u_2, u_3 in λ_1, λ_2, λ_3 geschrieben erhielten, als wir im Raume invariante Ebenen durch den Anfangspunkt suchten. Es liegt diese Übereinstimmung darin, dass jede derartige Ebene in der unendlich fernen Ebene eine invariante Gerade bestimmt und umgekehrt. Wir deuteten ja früher in der That x_1, x_2, x_3 gelegentlich als homogene Punktcoordinaten in der unendlich fernen Ebene.

Die Forderung, dass die Gerade $(u_1 : u_2 : u_3)$ invariant sein soll, deckt sich mit der Forderung, dass die *Gleichung*

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

in den Veränderlichen x_1, x_2, x_3 bei Xf invariant sein soll. Dementsprechend deckt sich die Forderung, dass der Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$ invariant sein soll, mit der anderen, dass die *Gleichung*

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

in den Veränderlichen u_1, u_2, u_3 bei der infinitesimalen Transformation Uf invariant sein soll.

Discussion der Bedingungen.

Wir wollen nun die sich ergebenden Bedingungen (23), (24) und $\Delta_{(\varrho)} = 0$ genauer untersuchen. In § 3 des 3. Kap. haben wir schon

in nicht homogenen Coordinaten das jetzige Problem behandelt und erledigt. Es ist aber von Interesse, es in homogenen Coordinaten durchzuführen. Es können mehrere Fälle eintreten: Ist ϱ eine Wurzel von $\Delta_{(\varrho)} = 0$, so reducieren sich für diese die Gleichungen (23) bez. (24) sicher auf höchstens zwei. Es wäre aber möglich, dass sie sich auf nur eine zurückführen lassen. Dies tritt ein, wenn für die betreffende Wurzel ϱ auch alle zweireihigen Unterdeterminanten von $\Delta_{(\varrho)}$ verschwinden. Alsdann ergiebt sich eben nicht nur ein Wertsystem $(x_1 : x_2 : x_3)$ bez. $(u_1 : u_2 : u_3)$, sondern es gehen je ∞^1 hervor, die wesentlich verschieden sind. Wir finden also dann ∞^1 einzeln invariante Punkte und ∞^1 einzeln invariante Geraden. Erstere liegen auf einer Geraden, da sie eine lineare Gleichung (23), letztere gehen durch einen Punkt, da sie eine lineare Gleichung (24) erfüllen. Alle einreihigen Determinanten von $\Delta_{(\varrho)}$ können für eine Wurzel der Gleichung $\Delta_{(\varrho)} = 0$ nicht verschwinden, da sonst alle Punkte der Ebene invariant bleiben, d. h. jedes $\delta x_i = x_i \delta t$ oder also $Xf \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_2 p_3$ wäre. Noch bemerken wir: $\Delta_{(\varrho)} = 0$ hat stets drei *endliche* Wurzeln ϱ, da ϱ^3 in $\Delta_{(\varrho)}$ den Factor -1 hat. Im besonderen können aber Wurzeln zusammenfallen. Weil aber für eine Doppelwurzel von $\Delta_{(\varrho)} = 0$ auch $\Delta'_{(\varrho)} = 0$ und weil andererseits

$$\Delta'_{(\varrho)} = -\Delta_{11} - \Delta_{22} - \Delta_{33}$$

ist, wenn Δ_{ik} die zweireihige Unterdeterminante von $\Delta_{(\varrho)}$ hinsichtlich des Gliedes der i^{ten} Vertical- und k^{ten} Horizontalreihe bedeutet, so können alle zweireihigen Unterdeterminanten Δ_{ik} nur dann verschwinden, wenn $\Delta_{(\varrho)} = 0$ eine Doppelwurzel hat, doch brauchen sie es nicht zu thun.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Behandlung der einzelnen Fälle über.

Erster Fall.

Erster Fall: Alle Wurzeln ϱ seien verschieden. Alsdann verschwinden nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten. (23) stellt also für jede Wurzel ϱ zwei verschiedene Geraden dar, deren Schnittpunkt in Ruhe bleibt, entsprechend (24) zwei verschiedene Punkte, deren Verbindende in Ruhe bleibt. Es gehen also drei einzeln invariante Punkte und drei einzeln invariante Geraden hervor. Die drei Punkte können nicht auf einer Geraden liegen, da sonst jeder Punkt auf ihr in Ruhe bleibt, also (23) sich auf nur eine Gleichung reducierte. Da die Verbindende zweier invarianter Punkte eine invariante Gerade ist, so kommen wir notwendig zu der Configuration 1 in Fig. 49.

Zweiter Fall.

Zweiter Fall: Eine Wurzel ϱ sei Doppelwurzel, während nicht alle Δ_{ik} für sie verschwinden. Die Doppelwurzel giebt dann zwei

Geraden (23) mit invariantem Schnittpunkt, die einfache Wurzel ebenfalls. Doch werden wir ersteren invarianten Punkt als doppeltzählend, d. h. als zwei unendlich benachbarte invariante Punkte betrachten. Entsprechend ergiebt sich aus (24) eine doppeltzählende und eine einfache invariante Gerade. Natürlich ist die eine dieser Geraden die Verbindende der beiden invarianten Punkte. Lässt man den vorliegenden Fall durch Grenzübergang aus dem ersten hervorgehen, indem man die α_{ik} continuierlich so ändert, bis $\Delta_{(\varrho)} = 0$ eine Doppelwurzel erhält, ohne dass alle Δ_{ik} verschwinden, so sieht man, dass wir die Verbindende der beiden invarianten Punkte als doppeltzählende invariante Gerade aufzufassen haben und dass die andere invariante Gerade durch den doppeltzählenden Punkt geht. Wir kommen also zur Configuration 2 in Fig. 49.

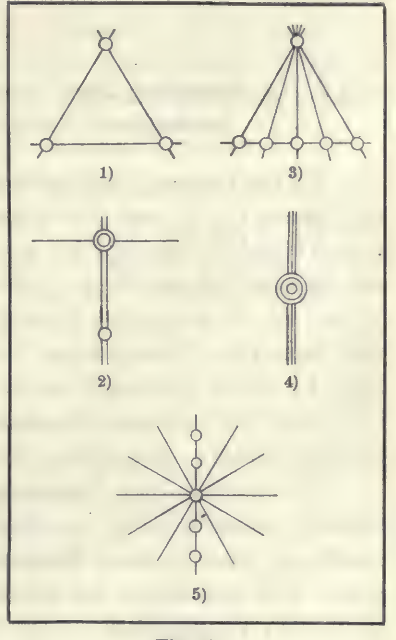


Fig. 49.

Dritter Fall.

Dritter Fall: Eine Wurzel ϱ sei Doppelwurzel und alle Δ_{ik} seien für sie gleich Null. Hier giebt (23) bez. (24) für die Doppelwurzel nur je eine Gleichung, d. h. es ergeben sich als invariante Punkte alle Punkte einer Geraden, als invariante Geraden alle Geraden durch einen Punkt. Die einfache Wurzel liefert wie früher einen invarianten Punkt bez. eine invariante Gerade. Der invariante Punkt liegt nicht auf der Geraden jener ∞^1 invarianten Punkte, da sonst für sein ϱ auch alle Δ_{ik} Null wären. Entsprechend gehört die einzelne invariante Gerade nicht zu den obigen ∞^1. Daher ist nur die Configuration 3 in Fig. 49 möglich.

Vierter Fall.

Vierter Fall: $\Delta_{(\varrho)} = 0$ besitze eine dreifache Wurzel, für die jedoch nicht alle Δ_{ik} verschwinden. Alsdann liefert (23) einen dreifachzählenden invarianten Punkt und (24) eine dreifachzählende invariante Gerade. Letztere enthält ersteren, denn die Punkte der invarianten Geraden erfahren bei Xf eine infinitesimale projective Transformation unter sich, bei der bekanntlich mindestens ein Punkt invariant bleibt. Also kommt das Bild 4 in Fig. 49.

Fünfter Fall.

Fünfter Fall: $\Delta_{(\varrho)} = 0$ besitze eine dreifache Wurzel, für die alle $\Delta_{ik} = 0$ sind. (23) liefert ∞^1 invariante Punkte längs einer

Geraden, (24) ∞^1 invariante Geraden durch einen Punkt. Letzterer Punkt bleibt in Ruhe, muss also zu jenen ∞^1 invarianten Punkten gehören. So geht das Bild 5 in Fig. 49 hervor.

Wir sehen, dass sich die fünf Möglichkeiten invarianter Punkte und Geraden genau so wie in § 3 des 3. Kap. ergeben, aber unsere jetzige Betrachtungsweise ist kürzer und übersichtlicher.

Wenn wir nun den invarianten Gebilden vermöge passender projectiver Transformationen besonders bequeme Lagen erteilen, so können wir ohne Mühe die zugehörigen infinitesimalen Transformationen Xf ableiten und erhalten damit auf neuem Wege alle Typen von eingliedrigen projectiven Gruppen der Ebene.

Wir wollen uns aber hiermit nicht aufhalten, sondern uns zu einem Probleme wenden, das die Aufstellung dieser Typen umfasst.

§ 3. Bestimmung aller Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in drei Veränderlichen.

Es ist bekannt, dass zwischen der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene (x, y) und der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3 eine enge Beziehung besteht, die wir auf geometrischem Wege insbesondere dadurch herstellten, dass wir x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten in der Ebene deuteten. Da wir nun alle Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe in Kap. 11 schon bestimmt haben, so wird es uns verhältnismässig leicht sein, mit Hülfe dieses Zusammenhanges alle Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in x_1, x_2, x_3 anzugeben.

Gleichberechtigte Untergr. d. allgem. lin. homogenen Gruppe.

Wir nennen *zwei Untergruppen der linearen homogenen Gruppe mit einander gleichberechtigt* innerhalb dieser Gruppe, wenn die eine durch Ausübung einer linearen homogenen Transformation in die andere übergeht. Für jede Schar von gleichberechtigten Untergruppen suchen wir in diesem Paragraphen einen *Typus* aufzustellen. Kennen wir einen solchen, so kennen wir ja die ganze Schar, da sie durch Ausführung aller linearer homogener Transformationen aus dem Typus hervorgehen. Entsprechend nennen wir zwei Untergruppen der *speciellen* linearen homogenen Gruppe *mit einander gleichberechtigt innerhalb der speciellen Gruppe*, wenn die eine durch Ausübung einer speciellen linearen homogenen Transformation in die andere übergeht. Wir wollen auch für diese Scharen gleichberechtigter Gruppen je einen *Typus* bestimmen.

Gleichberechtigte Untergr. d. spec. lin. homogenen Gruppe.

Nun gilt zunächst der

Satz 12: *Sind zwei Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe in x_1, x_2, x_3 mit einander gleichberechtigt innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, so sind sie auch mit einander gleichberechtigt innerhalb der speciellen Gruppe.*

Der Beweis ist ganz so wie der des Satzes 10 des § 4, 5. Kap., nur dass statt der dortigen Transformation T_0 diese zu gebrauchen ist:

$$x_1' = \sqrt[3]{\Delta}\, x_1, \quad x_2' = \sqrt[3]{\Delta}\, x_2, \quad x_3' = \sqrt[3]{\Delta}\, x_3.$$

Es ergeben sich hiernach alle *Typen* von Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe, indem man die *Typen* von Untergruppen der allgemeinen Gruppe sucht, die in der speciellen Gruppe enthalten sind.

Ferner bemerken wir, dass eine specielle lineare homogene Gruppe durch Ausführung einer allgemeinen linearen homogenen Transformation S immer wieder in eine specielle übergeht. Denn ist T eine Transformation der ersteren und hat S die Determinante Δ, so hat die durch Ausführung von S auf T hervorgehende $S^{-1}TS$ nach Satz 1, § 1, die Determinante $\frac{\Delta}{1} \cdot 1 \cdot \Delta = 1$, ist also auch speciell.

Endlich sehen wir ohne Mühe ein: Sind zwei lineare homogene Gruppen mit einander dualistisch in der in § 2 auseinandergesetzten Weise und gehört die eine der speciellen linearen homogenen Gruppe an, so gilt dasselbe von der andern. Denn zur Transformation

$$x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ist nach § 2 diese dualistisch:

$$x_i' = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

in der A_{ik} die Unterdeterminante der Determinante $\Delta_a = |a_{ik}|$ hinsichtlich a_{ik} ist. Letztere aber hat die Determinante

$$|A_{ik}| = |a_{ik}|^3 = \Delta_a^3.$$

Ist also $\Delta_a = 1$, so ist auch $|A_{ik}| = 1$.

Unser Problem zerfällt also in zwei:

I. Alle Typen von Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe zu finden.

II. Alle Typen von Untergruppen der allgemeinen linearen homogenen Gruppe zu finden, die nicht der speciellen angehören.

Erstes Problem.

Zunächst lösen wir das *erste Problem* ohne Mühe: Nach Satz 8 des ersten Paragraphen ist jeder Untergruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ der speciellen linearen homogenen Gruppe in x_1, x_2, x_3 eine Untergruppe $U_1 f \,..\, U_r f$ der allgemeinen projectiven Gruppe in x, y zugeordnet. Sind zwei

Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe innerhalb dieser mit einander gleichberechtigt, so gilt dasselbe von den zugeordneten Untergruppen der projectiven Gruppe innerhalb der letzteren, und umgekehrt. Die gesuchten Typen von Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe ergeben sich also sofort, wenn wir die in § 4 des 11. Kap. zusammengestellten Typen von projectiven Gruppen in x, y in den homogenen Veränderlichen x_1, x_2, x_3 schreiben, wozu wir uns einer zum Schluss des ersten Paragraphen aufgestellten Tabelle bedienen können. So liefert z. B. die Gruppe eines Kegelschnittes

$$p + xq \quad xp + 2yq \quad (x^2 - y)p + xyq$$

sofort den Typus:

$$x_3 p_1 + x_1 p_2 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3 \quad x_2 p_1 + x_1 p_3.$$

Zweites Problem.

Wir kommen jetzt zum *zweiten Problem:* Wir suchen diejenigen Untergruppen $X_1 f \dots X_r f$ der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, die nicht vollständig der speciellen Gruppe angehören. Da jede infinitesimale Transformation der speciellen Gruppe linear nach Satz 4 des § 1 aus den acht einzelnen

$$x_k p_i, \quad x_i p_i - x_k p_k \quad (i, k = 1, 2, 3, \quad i \neq k)$$

und jede der allgemeinen Gruppe aus diesen und aus

$$U \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

linear ableitbar ist, so folgt, dass die infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ sich so darstellen lassen:

$$X_j f \equiv Y_j f + a_j U \quad (j = 1, 2 \dots r).$$

Hierin bedeuten $Y_1 f \dots Y_r f$ specielle lineare homogene infinitesimale Transformationen und $a_1 \dots a_r$ Constanten. Es giebt aber, wie man sofort sieht, U mit jeder speciellen infinitesimalen Transformation Yf durch Klammerbildung combiniert Null, die Klammeroperation von zwei Yf aber wieder ein Yf. Da andererseits nach dem Hauptsatz

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r)$$

sein muss, so folgt also auch:

$$(Y_i Y_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks}(Y_s f + a_s U) \quad (i, k = 1, 2 \dots r),$$

sodass notwendig jede Summe $\Sigma c_{iks} a_s$ gleich Null und

$$(Y_i Y_k) \equiv \sum_1^r c_{iks} Y_s f \quad (i, k = 1, 2 \ldots r)$$

ist. Mithin sehen wir: $Y_1 f \ldots Y_r f$ erzeugen für sich eine Untergruppe der *speciellen* linearen homogenen Gruppe. Von dieser sogenannten *verkürzten* Gruppe ausgehend können wir rückwärts die gesuchte Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ bilden.

Unser Problem kommt also darauf hinaus, zu den infinitesimalen Transformationen jedes der beim ersten Problem gefundenen Typen von speciellen linearen homogenen Gruppen additiv Glieder von der Form Const. U hinzuzufügen und eventuell auch U für sich als selbständige infinitesimale Transformation hinzuzunehmen, derart, dass wieder eine Gruppe hervorgeht.

Wir sehen übrigens: Sind zwei Gruppen $Y_1 f \ldots Y_r f$ nicht innerhalb der speciellen linearen homogenen Gruppe gleichberechtigt, so sind es auch nicht die aus ihnen durch das skizzierte Verfahren hervorgehenden Gruppen $X_1 f \ldots X_r f$ innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, denn geht $X_j f$ vermöge einer homogenen linearen Transformation S in $\overline{X}_j f$ über und ist:

$$X_j f \equiv Y_j f + a_j U, \quad \overline{X}_j f \equiv \overline{Y}_j f + \bar{a}_j U,$$

so geht vermöge S auch $Y_j f$ in $\overline{Y}_j f$ über, da S specielle Transformationen wieder in specielle überführt.

Teilung des zweiten Problems.

Das noch zu erledigende Problem kann nun in *zwei Teile* zerlegt werden: Entweder enthält die gesuchte Gruppe $U \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$ selbständig oder nicht. Eine Gruppe der ersten Art ist nie mit einer der letzteren Art gleichberechtigt, *da U nur mit sich selbst gleichberechtigt ist.* Der erste Fall ist nun besonders leicht zu erledigen:

Gruppen, die $\Sigma x_i p_i$ enthalten.

Enthält die gesuchte Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ die infinitesimale Transformation U selbständig, so kann sie so geschrieben werden:

$$X_1 f \ldots X_{r-1} f, \quad U,$$

wo dann

$$X_j f \equiv Y_j f + a_j U \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

ist. Alsdann gehört aber auch $X_j f - a_j U$ der Gruppe an. Sie kann darum so geschrieben werden:

$$Y_1 f \ldots Y_{r-1} f, \quad U.$$

Die in diesem Fall gesuchten Typen gehen also aus den im ersten Problem gesuchten Typen von Untergruppen der speciellen linearen homogenen Gruppe einfach dadurch hervor, dass man zu allen diesen

Typen $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$ hinzufügt. Das obige Beispiel liefert so den Typus

$$x_3 p_1 + x_1 p_2 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3 \quad x_2 p_1 + x_1 p_3$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Doch darf ein Typus dabei nicht vergessen werden: Der Fall $r = 1$ liefert die eingliedrige Gruppe $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$ selbst.

Gruppen, die $\Sigma x_i p_i$ nicht enthalten.

Endlich bleibt noch der Fall zu erledigen, alle Gruppen $X_1 f \dots X_r f$ zu bestimmen, bei denen sich aus

$$X_j f \equiv Y_j f + a_j U \quad (j = 1, 2 \dots r)$$

keine infinitesimale Transformation von der Form U selbst linear ableiten lässt. Wir wählen zu dem Zweck irgend einen der im ersten Problem gefundenen Typen $Y_1 f \dots Y_r f$ aus und fügen zu $Y_1 f \dots Y_r f$ additive Glieder $a_1 U \dots a_r U$ hinzu. Da nun, wie bemerkt, $(Y_i + a_i U, Y_k + a_k U)$ der speciellen Gruppe angehört, so werden wir zu den $Y_j f$, die sich durch Klammeroperation reproducieren, *keine* Glieder $a_j U$ addieren. Diejenigen Gruppen $Y_1 f \dots Y_r f$ also, die ihre eigenen ersten derivierten Gruppen sind (vgl. § 3 des 18. Kap.), geben zu keinem neuen Typus Anlass. Wir haben also diese jetzt bei Seite zu lassen. Ist von einer Gruppe $Y_1 f \dots Y_r f$ die erste derivierte Gruppe dagegen weniger-, sagen wir q-gliedrig, so treten noch $r - q$ additive Glieder $a_j U$ auf. Die $r - q$ Constanten a_j können wir dann nur noch dadurch eventuell specialisieren, dass wir passende neue Veränderliche vermöge einer linearen homogenen Transformation einführen, da die Klammeroperationen, also der Hauptsatz, keine weiteren Bedingungen für die a_j liefern.

Beispiel.

Beispiel: Gehen wir etwa von der projectiven Gruppe

$$p + xq \quad xp + 2yq$$

aus, die als Typus einer speciellen linearen homogenen Gruppe liefert:

$$x_3 p_1 + x_1 p_2 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3.$$

Sie giebt noch einen Typus der allgemeinen linearen homogenen Gruppe, in dem U selbst auftritt:

$$x_3 p_1 + x_1 p_2 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Ausserdem haben wir, da die erste derivierte Gruppe des ersten Typus $x_3 p_1 + x_1 p_2$ ist, noch die Gruppe zu bilden:

$$X_1 f \equiv x_3 p_1 + x_1 p_2, \quad X_2 f \equiv x_2 p_2 - x_3 p_3 + aU \quad (a \neq 0).$$

Die Constante a lässt sich durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer linearen homogenen Transformation nicht weiter specialisieren, denn jede solche Transformation

$$x_i' = \sum_1^3 {}^k a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3)$$

liefert:

$$p_k = \sum_1^3 {}^i a_{ik} p_i' \quad (k = 1, 2, 3).$$

Soll vermöge der Transformation die Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ in eine von derselben Gestalt übergehen, in der nur a etwa einen anderen Wert hat, so muss $X_1 f$ gerade in sich — multipliciert mit einer Zahl — übergehen, da $X_1 f$ die einzige infinitesimale Transformation der Gruppe ist, die der speciellen Gruppe angehört, oder auch da $(X_1 X_2) \equiv X_1 f$ ist. Also ist zu fordern:

$$x_3 p_1 + x_1 p_2 = \lambda (x_3' p_1' + x_1' p_2') \quad (\lambda \neq 0),$$
$$x_2 p_2 - x_3 p_3 + aU =$$
$$\mu (x_3' p_1' + x_1' p_2') + \nu (x_2' p_2' - x_3' p_3') + a' U' \, (\nu \neq 0).$$

Setzen wir hierin die obigen Werte der p_k ein, so giebt der Vergleich der Coefficienten von p_3' in beiden Relationen:

$$a_{31} x_3 + a_{32} x_1 = 0$$
$$a_{32} x_2 - a_{33} x_3 = (a' - a - \nu) x_3'.$$

Also ist nach der ersten Bedingung $a_{31} = a_{32} = 0$ und daher $x_3' = a_{33} x_3$, d. h. $a_{33} \neq 0$. Vergleich der Coefficienten von p_1' giebt weiter $a_{11} = \lambda a_{33}$, also $a_{11} \neq 0$, ferner $(a - a') a_{11} = 0$, also $a = a'$. Die zweite der vorstehenden Bedingungen liefert hiernach noch $\nu = 1$. Es ist also $\nu : a' = 1 : a$, mit anderen Worten: Durch Einführung neuer Variabeln kann a nicht specialisiert werden.

Wie in diesem Beispiel, so kann man allgemein einsehen, dass in einer infinitesimalen Transformation, die aus $x_1 p_1$, $x_2 p_2$, $x_3 p_3$ allein linear ableitbar ist, die auftretenden Constanten nicht weiter specialisiert werden können. Denn

$$\lambda_1 x_1 p_1 + \lambda_2 x_2 p_2 + \lambda_3 x_3 p_3$$

geht vermöge der linearen Transformation

$$x_i' = \sum_1^3 {}^k a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3) \tag{25}$$

über in

$$\sum_1^3 {}^k \lambda_k x_k \sum_1^3 {}^i a_{ik} p_i'.$$

Soll dies die Form

$$\lambda_1' x_1' p_1' + \lambda_2' x_2' p_2' + \lambda_3' x_3' p_3$$

haben, so muss

$$\lambda_i' x_i' = \sum_1^3{}^k a_{ik} \lambda_k x_k,$$

also nach (25)

$$(\lambda_i' - \lambda_k) a_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

sein. Wäre nun λ_i' weder gleich λ_1, noch gleich λ_2 oder λ_3, so wäre $a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = 0$. Da aber die Determinante $| a_{ik} |$ nicht Null sein darf, so muss also jedes λ' gleich einem λ sein, und umgekehrt jedes λ gleich einem λ'. Die hervorgehende neue infinitesimale Transformation kann man aber dadurch erhalten, dass man einfach x_1, x_2, x_3 unter einander permutiert, was natürlich keinen Nutzen hat.

Wohl aber lässt sich in infinitesimalen Transformationen $Yf + aU$, in denen Yf nicht aus $x_1 p_1$, $x_2 p_2$, $x_3 p_3$ allein linear ableitbar ist, die Constante a häufig specialisieren.

Beispiel. *Beispiel:* Die projective Gruppe

$$q \quad p + xq$$

liefert zunächst die Typen:

$$x_3 p_2 \quad x_3 p_1 + x_1 p_2$$

und

$$x_3 p_2 \quad x_3 p_1 + x_1 p_2 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3.$$

Noch ist der Typus

$$x_3 p_2 + aU \quad x_3 p_1 + x_1 p_2 + bU$$

zu untersuchen, in dem a und b nicht beide Null sein sollen. Führt man $\sqrt{a} x_1$ und $a x_2$ als Veränderliche x_1, x_2 ein, so kommt, wenn $a \neq 0$ ist, der Typus

$$x_3 p_2 + U \quad x_3 p_1 + x_1 p_2 + cU,$$

in dem die Constante c sich, wie man zeigen kann, nicht weiter specialisieren lässt. Für $a = 0$ dagegen ergiebt sich, wenn man $b x_2$ und $\frac{1}{b} x_3$ als x_2 und x_3 benutzt, der Typus

$$x_3 p_2 \quad x_3 p_1 + x_1 p_2 + U.$$

Noch fügen wir hinzu: Es empfiehlt sich bei der Untersuchung der noch auftretenden Constanten, zunächst zu versuchen, ob sie sich durch lineare homogene Transformation von der besonderen Form

$$x_1' = \lambda_1 x_1, \quad x_2' = \lambda_2 x_2, \quad x_3' = \lambda_3 x_3$$

specialisieren lassen, wie wir es in diesem Beispiel gethan haben.

Wir stellen nunmehr alle Typen von linearen homogenen Gruppen in x_1, x_2, x_3, so wie sie sich durch die entwickelte Methode ergeben, in einer Tafel zusammen. Sie sind in neun Abteilungen nach ihrer Gliederzahl geordnet. Dabei sind jedesmal diejenigen Typen, die

$$U \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

als selbständige infinitesimale Transformation enthalten, an das Ende gestellt und von den übrigen durch einen Querstrich getrennt. Die noch auftretenden Constanten sind sämtlich wesentlich. Doch ist zu bemerken, dass diese Constanten noch der einen Beschränkung unterworfen sind: Sie dürfen nicht so gewählt werden, dass eine Gruppe, die bei allgemeiner Wahl der Constanten U nicht als selbständig enthält, doch bei der speciellen Wahl U als infinitesimale Transformation besitzt, denn die Gruppen, in denen U besonders auftritt, sind in der Übersicht schon besonders angegeben.

Zusammenstellung aller Typen von linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen.

I. *Neungliedrig:*

$$x_1 p_1 \quad x_2 p_1 \quad x_3 p_1 \quad x_1 p_2 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_3 \quad x_2 p_3 \quad x_3 p_3 .$$

II. *Achtgliedrig:*

$$x_1 p_2 \quad x_2 p_3 \quad x_3 p_1 \quad x_1 p_3 \quad x_2 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_1 - x_3 p_3 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3 .$$

III. *Siebengliedrig:*

$$x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_2 p_1 \quad x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3$$

$$x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_3 \quad x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3 .$$

IV. *Sechsgliedrig:*

$$x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_2 p_1 \quad x_1 p_1 - x_2 p_2 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + aU$$

$$x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 - x_3 p_3 \quad x_1 p_3 \quad x_2 p_2 + aU$$

$$x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 - x_2 p_2 \quad x_2 p_1 \quad U$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_1 - x_3 p_3 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_3 \quad U \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3 \right|.$$

V. *Fünfgliedrig:*

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 - x_2 p_2 \quad x_2 p_1 \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_1 - x_3 p_3 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_3 \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 + aU \quad x_2 p_2 + bU \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad axp + byq \quad U \right|$$

$$\left| x_1 p_2 \quad x_2 p_1 \quad x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3 \right| \quad \left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3 \right|$$

$$\left| x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 \quad x_2 p_2 \quad x_3 p_3 \right|.$$

VI. *Viergliedrig:*

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad ax_1 p_1 + bx_2 p_2 + cx_3 p_3 \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 + U \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + aU \right|$$

$$\left| x_3 p_1 + U \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_2 p_2 + aU \right|$$

$$\left| x_1 p_2 \quad x_1 p_1 - x_2 p_2 \quad x_2 p_1 \quad x_1 p_1 + x_2 p_2 + aU \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_1 + aU \quad x_2 p_2 + bU \right|$$

$$\left| x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_1 p_1 + aU \quad x_2 p_2 + bU \right|$$

$$\left| x_3 p_1 \quad x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad U \right| \quad \left| x_3 p_2 \quad x_3 p_1 + x_1 p_2 \quad x_2 p_2 - x_3 p_3 \quad U \right|$$

$$\left| x_3 p_2 \quad x_1 p_2 \quad x_3 p_1 + x_2 p_2 \quad U \right|$$

$$x_3p_1 \quad x_3p_2 \quad x_1p_1 + x_1p_2 + x_2p_2 \quad U$$

$$x_1p_2 \quad x_1p_1 - x_2p_2 \quad x_2p_1 \quad U$$

$$x_3p_1 \quad x_3p_2 \quad ax_1p_1 + bx_2p_2 \quad U$$

$$x_3p_2 \quad x_1p_2 \quad ax_1p_1 + bx_2p_2 \quad U \qquad x_3p_2 \quad x_1p_1 \quad x_2p_2 \quad x_3p_3$$

$$x_3p_1 + x_1p_2 \quad x_2p_2 - x_3p_3 \quad x_1p_3 + x_2p_1 \quad U.$$

VII. *Dreigliedrig:*

$$x_3p_2 \quad x_3p_1 + U \quad x_1p_2 + U \qquad x_3p_2 \quad x_1p_2 \quad x_3p_1 + U$$

$$x_3p_1 \quad x_3p_2 \quad x_1p_2 + U \qquad x_3p_1 \quad x_3p_2 \quad x_1p_2$$

$$x_3p_2 \quad x_3p_1 + x_1p_2 \quad x_2p_2 - x_3p_3 + aU$$

$$x_3p_2 \quad x_1p_2 \quad x_3p_1 + x_2p_2 + aU$$

$$x_2p_1 \quad x_3p_2 \quad x_1p_1 + x_1p_2 + x_2p_2 + aU$$

$$x_1p_2 \quad x_1p_1 - x_2p_2 \quad x_2p_1$$

$$x_3p_1 \quad x_3p_2 \quad ax_1p_1 + bx_2p_2 + cx_3p_3$$

$$x_3p_2 \quad x_1p_2 \quad ax_1p_1 + bx_2p_2 + cx_3p_3$$

$$x_3p_2 \quad x_1p_1 + aU \quad x_2p_2 + bU \qquad x_3p_1 \quad x_3p_2 + U \quad x_1p_1 + aU$$

$$x_3p_2 \quad x_1p_2 + U \quad x_1p_1 + x_2p_2 + aU$$

$$x_3p_1 + x_1p_2 \quad x_2p_2 - x_3p_3 \quad x_1p_3 + x_2p_1$$

$$x_3p_2 \quad x_3p_1 + x_1p_2 \quad U \qquad x_3p_2 \quad x_3p_1 + x_2p_2 \quad U$$

$$x_1p_2 \quad x_1p_1 + x_3p_2 \quad U \qquad x_3p_2 \quad ax_1p_1 + bx_2p_2 \quad U$$

$$\boxed{x_3p_1 \quad x_3p_2 \quad U} \quad \boxed{x_3p_2 \quad x_1p_2 \quad U}$$

$$\boxed{x_1p_1 \quad x_2p_2 \quad x_3p_3} \quad \boxed{x_3p_1 + x_1p_2 \quad x_2p_2 - x_3p_3 \quad U}.$$

VIII. *Zweigliedrig:*

$$\boxed{x_3p_2 + U \quad x_3p_1 + x_1p_2 + aU} \quad \boxed{x_3p_2 \quad x_3p_1 + x_1p_2 + U}$$

$$\boxed{x_3p_2 \quad x_3p_1 + x_1p_2} \quad \boxed{x_3p_2 \quad x_3p_1 + x_2p_2 + aU}$$

$$\boxed{x_1p_2 \quad x_1p_1 + x_3p_2 + aU} \quad \boxed{x_3p_2 \quad ax_1p_1 + bx_2p_2 + cx_3p_3}$$

$$\boxed{x_3p_2 + U \quad x_1p_1 + aU} \quad \boxed{x_3p_2 \quad x_1p_1 + aU}$$

$$\boxed{x_3p_1 \quad x_3p_2 + U} \quad \boxed{x_3p_1 \quad x_3p_2} \quad \boxed{x_3p_2 + U \quad x_1p_2 + U}$$

$$\boxed{x_3p_2 \quad x_1p_2 + U} \quad \boxed{x_3p_2 \quad x_1p_2}$$

$$\boxed{x_1p_1 + aU \quad x_2p_2 + bU}$$

$$\boxed{x_1p_1 + ax_2p_2 \quad U \quad a \neq 0,\ 1} \quad \boxed{x_3p_1 + x_2p_2 \quad U}$$

$$\boxed{x_3p_1 + x_1p_2 \quad U} \quad \boxed{x_1p_1 \quad U} \quad \boxed{x_3p_2 \quad U}.$$

IX. *Eingliedrig:*

$$\boxed{x_1p_1 + ax_2p_2 + bU \quad a \neq 0,\ 1} \quad \boxed{x_3p_1 + x_2p_2 + aU}$$

$$\boxed{x_3p_1 + x_1p_2 + U} \quad \boxed{x_3p_1 + x_1p_2} \quad \boxed{x_1p_1 + aU}$$

$$\boxed{x_3p_2 + U} \quad \boxed{x_3p_2} \quad \boxed{U}.$$

§ 4. Verallgemeinerungen auf n Veränderliche.

Die in den vorhergehenden Paragraphen für lineare homogene Gruppen in drei Veränderlichen entwickelten Theorien lassen sich zum grossen Teil ohne weiteres auf den allgemeinen Fall von n Veränder-

lichen ausdehnen. Wir wollen einige Sätze über die linearen homogenen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen aufstellen. Die Ergebnisse werden zum Teil im nächsten Paragraphen weiter verwertet werden.

Wir betrachten also lineare homogene Transformationen in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$. Dabei wollen wir diese Veränderlichen als *homogene Punktcoordinaten in einem Raume R_{n-1} von $n-1$ Dimensionen* deuten. Schreiben wir eine solche lineare homogene Transformation:

$$x_i' = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{26}$$

in den nicht-homogenen Punktcoordinaten

$$\mathfrak{x}_i \equiv \frac{x_i}{x_n} \quad (i = 1, 2 \cdots n-1),$$

so lautet sie:

$$\mathfrak{x}_i' = \frac{a_{i1}\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_{in-1}\mathfrak{x}_{n-1} + a_{in}}{a_{n1}\mathfrak{x}_1 + \cdots + a_{nn-1}\mathfrak{x}_{n-1} + a_{nn}} \quad (i = 1, 2 \ldots n-1), \tag{27}$$

Proj. Trf. im R_{n-1}.

und dies ist die allgemeine Form einer sogenannten *projectiven Transformation* im Raume R_{n-1} von $n-1$ Dimensionen mit den Punktcoordinaten $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$. Die transformierten Veränderlichen $\mathfrak{x}_1' \ldots \mathfrak{x}_{n-1}'$ sind *linear gebrochene Functionen der ursprünglichen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$ mit demselben Nenner.* Für $n = 2, 3$ deckt sich die jetzige Definition der projectiven Transformation mit den früher für die Gerade und die Ebene gegebenen Definitionen.

Da die homogene Form (26) aber bequemer als die nicht-homogene (27) ist, weil sie das Unendlichferne in derselben Weise zu behandeln gestattet wie das Endliche, so benutzen wir in diesem Paragraphen nur die homogene Form (26).

Betrachten wir insbesondere eine infinitesimale projective Transformation des R_{n-1}, also eine infinitesimale lineare homogene Transformation in $x_1 \ldots x_n$:

$$Xf \equiv \sum_1^n{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k p_i.$$

Nur nebenbei bemerken wir, dass sie geschrieben in den nicht-homogenen Coordinaten $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$ die Form annimmt:

$$\left\{\begin{aligned} Uf \equiv \sum_1^{n-1}{}^i \alpha_{in}\mathfrak{p}_i &+ \\ + \sum_1^{n-1}{}^i \left(\sum_1^{n-1}{}^k \alpha_{ik}\mathfrak{x}_k - \alpha_{nn}\mathfrak{x}_i\right)\mathfrak{p}_i &- \sum_1^{n-1}{}^k \alpha_{nk}\mathfrak{x}_k \left(\sum_1^{n-1}{}^i \mathfrak{x}_i\mathfrak{p}_i\right), \end{aligned}\right. \tag{28}$$

d. h. allgemein linear ableitbar ist aus den $n^2 - 1$ einzelnen:

$$\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{x}_k\mathfrak{p}_i, \quad \mathfrak{x}_k(\mathfrak{x}_1\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{p}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_n\mathfrak{p}_n)$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n - 1).$$

Invariante Punkte.

Suchen wir die bei Xf *invarianten Punkte* $(x_1 : \cdots : x_n)$, so haben wir wie in § 2 zu verfahren: Der Punkt $(x_1 : \cdots : x_n)$ bleibt bei Xf invariant, wenn die Incremente, die $x_1 \ldots x_n$ erfahren, proportional $x_1 \ldots x_n$ sind, wenn also eine Grösse ϱ existiert derart, dass

$$Xx_i \equiv \sum^k \alpha_{ik} x_k = \varrho x_i \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ist. Dies sind n lineare homogene Gleichungen in $x_1 \ldots x_n$:

$$(29) \quad \alpha_{i1} x_1 + \cdots + (\alpha_{ii} - \varrho) x_i + \cdots + \alpha_{in} x_n = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

deren Determinante

$$\Delta_{(\varrho)} \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \varrho & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \varrho & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

sein muss, wenn es überhaupt einen invarianten Punkt $(x_1 : \cdots : x_n)$ giebt. Man hat daher ϱ als Wurzel der Gleichung $\Delta_{(\varrho)} = 0$ zu wählen, die sicher mindestens eine Wurzel besitzt, da sie stets vom n^{ten} Grade ist. Setzt man eine Wurzel ϱ in (29) ein, so erhält man ein Gleichungensystem, das sicher ein nicht völlig verschwindendes Lösungensystem $x_1 \ldots x_n$ besitzt. Es giebt mithin stets mindestens einen invarianten Punkt.

Satz 13: *Jede infinitesimale Transformation*

$$\sum_1^n{}^i \sum^k \alpha_{ik} x_k p_i$$

in den homogenen Punktcoordinaten $x_1 \ldots x_n$, *also jede infinitesimale projective Transformation eines Raumes von* $n - 1$ *Dimensionen lässt mindestens einen Punkt* $(x_1 : \cdots : x_n)$ *in Ruhe.*

Im allgemeinen Fall, dass $\Delta_{(\varrho)} = 0$ gerade n verschiedene Wurzeln hat, verschwinden bekanntlich nicht alle $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten der Determinante $\Delta_{(\varrho)}$, und die Gleichungen (29) geben dann für jede Wurzel ϱ gerade einen invarianten Punkt, da sie die Verhältnisse von $x_1 \ldots x_n$ vollständig bestimmen. Es ist aber auch möglich, dass die Gleichung $\Delta_{(\varrho)} = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt. Verschwinden für eine solche nicht alle $(n-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\Delta_{(\varrho)}$, so liefert sie einen invarianten Punkt, den man sich als eine Anzahl unendlich benachbarter invarianter Punkte, also als einen mehrfachen invarianten Punkt vorstellen kann. Sobald aber für eine

Wurzel ϱ alle $(n-1)$-reihigen, sagen wir allgemein alle $(n-q)$-reihigen, nicht aber alle $(n-q-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\Delta_{(\varrho)}$ verschwinden, — und das kann bekanntlich nur bei mehr als q-fachen Wurzeln unter Umständen vorkommen —, so reducieren sich für diese Wurzel die Gleichungen (29) auf nur $n-q-1$ von einander unabhängige Gleichungen und bestimmen daher eine q-fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit M_q, deren sämtliche ∞^q Punkte einzeln in Ruhe bleiben.

Zu jeder Wurzel ϱ von $\Delta_{(\varrho)}=0$ gehört also, allgemein gesprochen, eine gewisse ebene Mannigfaltigkeit von lauter invarianten Punkten, die sich insbesondere auf einen einzigen Punkt reducieren kann. Es fragt sich, ob sich durch Benutzung aller Wurzeln ϱ ein und derselbe invariante Punkt mehrmals ergeben kann, d. h. ob die zu zwei verschiedenen Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 gehörigen ebenen Mannigfaltigkeiten von lauter invarianten Punkten etwa Punkte gemein haben. Die Punkte (x) der einen Mannigfaltigkeit genügen den Gleichungen

$$\sum_1^n {}^k \alpha_{ik} x_k = \varrho_1 x_i \quad (i=1,\ 2 \,..\, n),$$

die der anderen den Gleichungen

$$\sum_1^n {}^k \alpha_{ik} x_k = \varrho_2 x_i \quad (i=1,\ 2 \,..\, n).$$

Soll ein Punkt (x) beiden Mannigfaltigkeiten gemein sein, so muss für ihn also:

$$(\varrho_1-\varrho_2)x_i = 0 \quad (i=1,\ 2 \,..\, n),$$

d. h. $x_1 = \cdot\cdot = x_n = 0$ sein. Dieses Wertsystem ist jedoch bei homogenen Coordinaten ausgeschlossen. Die beiden Mannigfaltigkeiten haben also keinen Punkt gemein, sie sind, wie man auch sagt, zu einander *windschief*.

Man kann hiernach alle Möglichkeiten der Configuration der invarianten Punkte überblicken, wenn man noch einen für den Fall $n=3$ schon in § 1 des 2. Kap. erkannten Satz berücksichtigt:

Satz 14: *Eine projective Transformation eines Raumes von $n-1$ Dimensionen lässt alle Punkte dieses Raumes in Ruhe, sobald sie $n+1$ Punkte in Ruhe lässt, die nicht sämtlich in einer ebenen Mannigfaltigkeit von niederer Dimensionenzahl gelegen sind.*

Dieser Satz ist offenbar bloss ein Specialfall des folgenden:

Satz 15: *Es giebt eine und nur eine projective Transformation eines Raumes von $n-1$ Dimensionen, die $n+1$ bestimmte Punkte dieses Raumes,*

von denen n nicht derselben ebenen $(n-2)$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit angehören, in $n+1$ bestimmte Punkte gleicher Art überführt.

Soll nämlich eine projective Transformation n Punkte allgemeiner Lage in n ebensolche überführen, so lässt sich dies auch so ausdrücken: Sie soll n Mannigfaltigkeiten allgemeiner Lage

$$l_{j1}x_1 + \cdots + l_{jn}x_n = 0 \quad (j = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

in n andere ebene Mannigfaltigkeiten allgemeiner Lage überführen:

$$l_{j1}'x_1' + \cdots + l_{jn}'x_n' = 0 \quad (j = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Dies giebt für die transformierten Variabeln die Bedingungen:

$$(30) \quad l_{j1}'x_1' + \cdots + l_{jn}'x_n' = \varrho_j(l_{j1}x_1 + \cdots + l_{jn}x_n) \quad (j = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

deren Auflösung nach den x_i' die Transformation darstellt. Sie enthält n willkürliche Constanten $\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_n$. Soll aber noch ein gegebener Punkt $(\bar{x}_i)$ in einen gegebenen Punkt $(\bar{x}_i')$ übergehen, so giebt dies Bedingungen

$$l_{j1}'\bar{x}_1' + \cdots + l_{jn}'\bar{x}_n' = \sigma\varrho_j(l_{j1}\bar{x}_1 + \cdots + l_{jn}\bar{x}_n) \quad (j = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

die $\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_n$ bis auf einen Factor σ bestimmen. Die durch Auflösung von (30) hervorragende Transformation hat also nur rechts einen unbestimmten Factor σ, der aber bei Einführung nicht-homogener Coordinaten auch fortfällt.

Wir können, da nach Satz 13 sicher ein Punkt $(x_1^0 : \cdots : x_n^0)$ bei Xf in Ruhe bleibt, als neues Coordinatensystem ein solches $(\bar{x}_1 : \cdots : \bar{x}_n)$ wählen, dass dieser Punkt mit der n^{ten} Ecke des neuen Coordinatensystems zusammenfällt, dass also für ihn $\bar{x}_1 \,.\,.\, \bar{x}_{n-1}$ gleich Null werden. Es geschieht dies z. B. bei der Substitution

$$\bar{x}_i = x_n^0 x_i - x_i^0 x_n \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n-1),$$
$$\bar{x}_n = x_n^0 x_n,$$

also bei Ausführung einer passenden projectiven Transformation des R_{n-1}, bei der Xf wieder in eine infinitesimale lineare homogene Transformation in $\bar{x}_1 \,.\,.\, \bar{x}_n$ übergeht. Denken wir uns,

$$Xf \equiv \sum_1^n {}^i \sum {}^k \alpha_{ik} x_k p_i$$

sei schon von vornherein auf eine solche Form gebracht, so ist $Xx_i \equiv \sum^k \alpha_{ik} x_k$ für den invarianten Punkt $(0 : \cdots : 0 : 1)$ von der Form α_{in}. Es müssen also dann alle α_{in} mit Ausnahme von α_{nn} Null sein. Somit hat Xf die Form:

$$Xf \equiv \sum_1^{n-1} {}^i \sum {}^k \alpha_{ik} x_k p_i + \sum_1^n {}^k \alpha_{nk} x_k p_n.$$

Transf. der Strahlen durch inv. Punkt.

Bei dieser Transformation werden die ∞^{n-2} Strahlen durch den invarianten Punkt $(0:\cdots:0:1)$ unter einander vertauscht, da Xf jede ebene Mannigfaltigkeit wieder in eine ebene Mannigfaltigkeit überführt. Wollen wir wissen, wie diese Vertauschungen beschaffen sind, so haben wir zunächst geeignete Coordinaten für diese Strahlen einzuführen. Da nun jeder Punkt $(x_1:\cdots:x_n)$ einen solchen Strahl bestimmt und auf seinem Strahle verbleibt, wenn die Verhältnisse von $x_1 \,.\,.\, x_{n-1}$ ungeändert bleiben, aber x_n beliebig geändert wird, so können wir $x_1 \,.\,.\, x_{n-1}$ als *homogene* Coordinaten der ∞^{n-2} Strahlen durch den invarianten Punkt $(0:\cdots:0:1)$ auffassen. Diese Strahlen $(x_1:\cdots:x_{n-1})$ werden also bei Xf vermöge der *verkürzten* infinitesimalen linearen homogenen Transformation

$$X'f \equiv \sum_1^{n-1}{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k p_i$$

unter einander vertauscht. Ein Strahl $(x_1:\cdots:x_{n-1})$ ist invariant, wenn für ihn alle $X'x_i$ proportional den x_i sind. Diese Bedingung ist genau dieselbe, wie für die Invarianz eines Punktes $(x_1:\cdots:x_n)$ bei Xf. Es liegt dies darin, dass überhaupt ein durch *homogene* Coordinaten bestimmtes Gebilde nach dem Begriffe der homogenen Coordinaten dann und nur dann invariant bleibt, wenn die Incremente seiner Coordinaten den Coordinaten proportional sind.

Also genau so, wie bei Xf sicher ein invarianter Punkt existiert, ist bei $X'f$ und daher auch bei Xf mindestens ein durch den invarianten Punkt gehender invarianter Strahl vorhanden. Durch Ausführung einer passenden linearen homogenen Transformation von $x_1 \,.\,.\, x_{n-1}$ lässt sich nun auch erreichen, dass dieser Strahl die Kante wird, welche die beiden Ecken $(0:\cdots:0:1)$ und $(0:\cdots:1:0)$ des Coordinatensystems verbindet.

Nehmen wir an, Xf sei schon auf eine solche Form gebracht, sodass also Xf den Punkt $(0:\cdots:0:1)$ und die Gerade von ihm nach dem Punkt $(0:\cdots:1:0)$ in Ruhe lässt.

Alsdann müssen in

$$Xf \equiv \sum_1^{n-1}{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k p_i + \sum_1^{n}{}^k \alpha_{nk} x_k p_n$$

die Incremente von $x_1 \,.\,.\, x_{n-2}$ für $x_1 = 0, \,.\,.\, x_{n-2} = 0$ verschwinden, d. h. es müssen $\alpha_{1,\,n-1} \,.\,.\, \alpha_{n-2,\,n-1}$ sämtlich Null sein, sodass Xf die Form hat:

$$Xf \equiv \sum_1^{n-2}{}^i \sum{}^k \alpha_{ik} x_k p_i + \sum_1^{n-1}{}^k \alpha_{n-1\,k} x_k p_{n-1} + \sum_1^{n}{}^k \alpha_{nk} x_k p_n.$$

Da Xf jede ebene Mannigfaltigkeit wieder in eine solche um-

Transf. der ebenen M_2 durch inv. Strahl.

wandelt, so werden bei Xf alle ∞^{n-3} ebenen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten M_2, die durch den betrachteten invarianten Strahl gehen, unter sich vertauscht. Wir können nun $x_1 \,.\,.\, x_{n-2}$ als *homogene* Coordinaten dieser M_2 benutzen, sodass die M_2 bei Xf die *zweimal verkürzte* infinitesimale Transformation

$$X''f \equiv \sum_1^{n-2}{}_i \sum{}_k \alpha_{ik} x_k p_i$$

erfahren, u. s. w.

Wir können also die früheren Schlüsse fortwährend wiederholen. Indem wir jedesmal eine passende lineare homogene Transformation auf Xf ausführen, deren gesamte Aufeinanderfolge natürlich schliesslich einer einzigen äquivalent ist, gelangen wir schliesslich zu einer besonderen Form von Xf. Die Invarianz jenes Strahls, einer ebenen M_2 u. s. w. gilt natürlich auch für die ursprüngliche infinitesimale Transformation Xf. Wir sprechen daher das Theorem aus:

Canonische Form einer inf. lin. homog. Trf.

Theorem 34: *Jede infinitesimale lineare homogene Transformation Xf in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ kann durch Ausführung einer passenden linearen homogenen Transformation auf die Form:*

$$\alpha_{11} x_1 p_1 + (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2) p_2 + \cdot\cdot + (\alpha_{n1} x_1 + \cdot\cdot + \alpha_{nn} x_n) p_n$$

gebracht werden. Deutet man $x_1 \,.\,.\, x_n$ als homogene Punktcoordinaten eines $(n-1)$fach ausgedehnten Raumes R_{n-1}, so kann man dies auch so aussprechen: Jede infinitesimale projective Transformation des R_{n-1} lässt mindestens einen Punkt, mindestens eine durch diesen gehende Gerade, mindestens eine durch letztere gehende zweifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit u. s. w. invariant.

Ausserdem haben wir gefunden:

Satz 16: *Durch jede bei einer infinitesimalen projectiven Transformation eines Raumes R_{n-1} invariante ebene $q$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit geht mindestens eine ebenfalls invariante ebene $(q+1)$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.*

Im Falle $n = 3$ haben wir diese Ergebnisse in den Sätzen 1 und 2 des § 1, 3. Kap., schon ausgesprochen.

Für $n = 4$ folgt: Bei jeder infinitesimalen projectiven Transformation des gewöhnlichen Raumes bleibt mindestens ein Punkt invariant; durch jeden invarianten Punkt geht mindestens eine invariante Gerade und durch jede invariante Gerade mindestens eine invariante Ebene.

Wir wollen nicht unterlassen, noch auf ein wichtiges allgemeines Ergebnis hinzuweisen: Unsere obigen Betrachtungen lehren, dass bei einer infinitesimalen projectiven Transformation des R_{n-1} alle durch eine invariante ebene $q$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_q gehenden ebenen M_{q+1} bei geeigneter Coordinatenwahl ebenfalls projectiv transformiert werden. Hierauf beruht eben unser Theorem. Die geeignete Coordinatenwahl besteht nach dem Obigen darin, dass als homogene Coordinaten der M_{q+1} gewisse lineare homogene Functionen der Coordinaten $x_1 \dots x_n$ benutzt werden.

Das hiermit ausgesprochene Princip ist in der Theorie der projectiven Gruppen überhaupt von Wichtigkeit. Wir werden dies noch weiterhin einsehen.

Oben wurde besonders betont, dass die bei Xf invarianten Punkte ebene Mannigfaltigkeiten bilden, die zu einander *windschief* sind, Mannigfaltigkeiten also, die *von einander isoliert* sind. Der Raum der ∞^{n-2} Strahlen durch einen invarianten Punkt wird, wie wir sahen, bei Xf auch projectiv transformiert. Die invarianten Strahlen ordnen sich daher entsprechend in ebene Mannigfaltigkeiten an, die ausser dem einen invarianten Punkt keinen Punkt gemein haben. Entsprechendes gilt von den invarianten ebenen M_2 durch einen dieser invarianten Strahlen. Sie ordnen sich in ebene Mannigfaltigkeiten an, die ausserhalb des Strahles keinen Punkt gemein haben, u. s. w.*).

Wir wollen hiervon eine wichtige Anwendung machen, zu der wir aber einige Sätze vorausschicken müssen:

Invariante Mannigfaltigkeit bei inv. Untergr.

Satz 17: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eines Raumes eine* ***invariante*** *s-gliedrige Untergruppe g_s, und lässt diese Untergruppe g_s eine Mannigfaltigkeit M invariant, so lässt diese Untergruppe auch jede Mannigfaltigkeit invariant, die aus M durch Ausführung irgend einer Transformation der ganzen Gruppe G_r hervorgeht. Wenn die g_s die Punkte von M gerade q-gliedrig ($q \leq s$) transformiert, so gilt dasselbe für die Punkte jeder dieser neuen Mannigfaltigkeiten.*

Zum Beweise erinnern wir an die Definition der invarianten Untergruppen in § 3 des 18. Kap. Danach ist g_s eine invariante Untergruppe von G_r, wenn die ebene Mannigfaltigkeit, die g_s im

*) Die im Texte aufgestellten Sätze über das Verhalten von Punkten und ebenen Mannigfaltigkeiten bei einer infinitesimalen projectiven Transformation gelten offenbar auch für endliche projective Transformationen. Diese Sätze hinsichtlich nur einer Transformation unterscheiden sich nur in der Form von Theorien, die wohl Cauchy zuerst formuliert hat; die allgemeinen gruppentheoretischen Sätze des Textes dagegen gehören Lie.

Raume der adjungierten Gruppe von G_r darstellt, bei der adjungierten Gruppe invariant bleibt, d. h. wenn jede Transformation S von g_s vermöge irgend einer Transformation T von G_r wieder in eine Transformation $S' = T^{-1}ST$ von g_s übergeht. Ist nun M bei allen S invariant, so ist

$$(M)S = (M),$$

daher:

$$(M)TS' = (M)TT^{-1}ST = (M)ST = (M)T,$$

d. h. die Mannigfaltigkeit $(M)T$, die aus M vermöge T hervorgeht, ist auch bei allen Transformationen S' von g_s invariant. S' stellt nämlich in der That ebenso wie S *alle* Transformationen von g_s dar, denn es ist auch umgekehrt $TS'T^{-1} = S$.

Wenn ferner die Punkte von M vermöge der g_s gerade von ∞^q verschiedenen Transformationen unter einander vertauscht werden, so gilt dasselbe von den Punkten der Mannigfaltigkeit $(M)T$, denn wenn S_1 und S_2 die Punkte von M in derselben oder in verschiedener Weise unter sich transformieren, so gilt dasselbe von den zugehörigen $S_1' = T^{-1}S_1T$ und $S_2' = T^{-1}S_2T$ bei der Mannigfaltigkeit $(M)T$, da ja S_1' und S_2' aus S_1 und S_2 durch Ausführung von T hervorgehen.

Isolierte inv. Mannigfaltigkeit.

Wir führen nun den Begriff: *isolierte invariante Mannigfaltigkeit* ein. Wenn die Gruppe g_s einzelne discrete Punkte oder einzelne discrete Curven u. s. w. in Ruhe lässt, so nennen wir diese invarianten Mannigfaltigkeiten isoliert. Wenn g_s dagegen z. B. alle Punkte einer Curve in Ruhe lässt, so nennen wir diese Punkte nicht isolierte invariante Punkte. Ebenso heissen unendlich viele einzeln invariante Curven, die eine Fläche erzeugen, nicht isolierte invariante Curven, u. s. w. Allgemein sagen wir: Eine bei der Gruppe g_s invariante Mannigfaltigkeit M heisst isoliert, wenn es keine continuierliche Schar von invarianten Mannigfaltigkeiten giebt, der M angehört, derart, dass die Punkte jeder dieser Mannigfaltigkeiten bei g_s gleichviel-gliedrig transformiert werden.

Wenn also z. B. g_s ∞^1 Ebenen im gewöhnlichen Raume in Ruhe lässt, die eine continuierliche Schar bilden, und wenn jede dieser Ebenen q-gliedrig in sich transformiert wird, nur eine einzelne der Ebenen weniger als q-gliedrig, so ist diese eine isolierte invariante Mannigfaltigkeit.

Ist nun g_s wieder eine invariante Untergruppe von G_r und besitzt g_s eine *isolierte* invariante Mannigfaltigkeit M, so geht diese nach dem soeben bewiesenen Satze bei Ausführung aller Transformationen von G_r in ebenfalls bei g_s invariante Mannigfaltigkeiten über. Da M isoliert ist und andererseits dieser Übergang doch continuierlich voll-

zogen werden kann, weil die Gruppe G_r continuierlich ist, so ist dies nur so denkbar, dass M überhaupt dabei stets in sich übergeht, d. h. dass M bei der ganzen Gruppe G_r in Ruhe bleibt. Wir finden also:

Satz 18: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eines Raumes eine invariante s-gliedrige Untergruppe g_s, und besitzt letztere eine isolierte invariante Mannigfaltigkeit M, so bleibt diese Mannigfaltigkeit M auch bei der ganzen Gruppe G_r invariant.*

Projective Gruppen von besond Zusammensetzung.

Wir wenden diesen Satz und das Frühere auf eine besondere Kategorie von projectiven Gruppen an:

Es liege eine r-gliedrige projective Gruppe G_r unseres Raumes R_{n-1} vor, die eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-1} besitze. Diese $(r-1)$-gliedrige Untergruppe G_{r-1} soll ihrerseits wieder eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe G_{r-2} besitzen, die also nicht notwendig auch in der Gruppe G_r, sondern eben nur in der Gruppe G_{r-1} invariant sein soll. Entsprechend besitze G_{r-2} eine invariante Untergruppe G_{r-3} u. s. w., bis wir schliesslich zu einer eingliedrigen Untergruppe G_1 kommen.

Wählen wir als infinitesimale Transformation X_1f die von G_1, als X_1f, X_2f die von G_2, ... endlich als infinitesimale Transformationen $X_1f \dots X_{r-1}f$ die von G_{r-1}, als $X_1f \dots X_rf$ die von G_r selbst, so drückt sich unsere Voraussetzung nach § 3 des 18. Kap. dadurch aus, dass die Klammerausdrücke die Form haben:

$$(X_1 X_2) \equiv c_{121} X_1 f,$$
$$(X_1 X_3) \equiv c_{131} X_1 f + c_{132} X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv c_{231} X_1 f + c_{232} X_2 f$$

u. s. w., also allgemein:

$$(31) \qquad (X_i X_{i+k}) \equiv \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,\, i+k,\, s} X_s f$$
$$(i = 1, 2 \dots r-1, \quad k = 1, 2 \dots r-i).$$

G_1 oder X_1f besitzt nach dem Früheren im R_{n-1} eine Anzahl windschiefer ebener Mannigfaltigkeiten M von einzeln invarianten Punkten. Jede dieser Mannigfaltigkeiten M ist also einzeln invariant und wird durch G_1 nullgliedrig in sich transformiert, ist daher eine isolierte invariante Mannigfaltigkeit. Denn jede invariante Mannigfaltigkeit, die von dieser einen unendlich wenig verschieden wäre, enthält sicher nicht lauter einzeln invariante Punkte, wird also durch G_1 mindestens eingliedrig transformiert. Nach Satz 18 bleibt jede isolierte Mannigfaltigkeit M auch bei der G_2 oder X_1f, X_2f invariant. Nun wird die G_2 die Punkte jeder dieser Mannigfaltigkeiten M unter einander und

zwar projectiv transformieren. Da aber, wie gesagt, $X_1 f$ selbst alle Punkte von M einzeln in Ruhe lässt, so wird G_2 die Punkte von M nur eingliedrig, nämlich vermöge $X_2 f$, unter sich projectiv vertauschen Aber $X_2 f$ besitzt nun in der Mannigfaltigkeit M ebenso wie vorher $X_1 f$ im R_{n-1} eine Anzahl Mannigfaltigkeiten invarianter Punkte. Also folgt, dass es sicher wenigstens einen Punkt in der Mannigfaltigkeit M giebt, der auch bei $X_2 f$ in Ruhe bleibt.

Es existiert somit mindestens ein Punkt, der bei der Gruppe G_2 in Ruhe bleibt.

Betrachten wir alle ∞^{n-2} Strahlen durch diesen Punkt. Sie werden bei G_1 wie bei G_2 unter einander vertauscht. Betrachten wir die Strahlen anstatt der Punkte als Elemente, indem wir wie früher für sie homogene Coordinaten benutzen, sodass sie auch projectiv transformiert werden, so besitzt G_1 wieder eine Anzahl isolierter invarianter Mannigfaltigkeiten, und es folgt analog, dass G_2 wenigstens eines jener Elemente, wenigstens einen Strahl also durch den festen Punkt in Ruhe lässt. Ebenso beweisen wir, wenn wir alle ebenen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten M_2 durch diesen Strahl als Elemente betrachten, dass G_2 mindestens eine dieser ebenen M_2 in Ruhe lässt, u. s. w.

Die Gruppe G_2 lässt somit mindestens einen Punkt, mindestens eine durch diesen gehende Gerade, mindestens eine durch letztere gehende ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit u. s. w. invariant.

Wir können dieselbe Schlussfolgerung nun ohne Mühe auf die G_3 ausdehnen. Denn zunächst ist klar, dass *alle* bei G_2 invarianten Punkte eine Reihe windschiefer ebener Mannigfaltigkeiten bilden, ebenso wie dies schon bei G_1 der Fall ist. Ähnliches gilt für die Strahlen durch einen der bei G_2 invarianten Punkte u. s. f., sodass also der Wiederholung unserer Schlüsse für die Gruppe G_3 nichts im Wege steht.

Schliesslich gelangen wir so zu dem wichtigen Ergebniss:

Satz 19: *Enthält eine r-gliedrige projective Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ des Raumes R_{n-1} eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, letztere eine in der $(r-1)$-gliedrigen invariante $(r-2)$-gliedrige Untergruppe u. s. w., kann man also die infinitesimalen Transformationen der Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ so auswählen, dass*

$$(X_i X_{i+k}) \equiv \sum_1^{i+k-1} c_{i,\,i+k,\,s} X_s f \quad (i = 1, 2 \,.\,. r-1, \;\; k = 1, 2 \,.\,. r-i)$$

wird, so besitzt die Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ in dem Raume R_{n-1} mindestens einen invarianten Punkt M_0. Durch jeden invarianten Punkt M_0 geht

mindestens eine invariante Gerade M_1, *durch jede invariante Gerade mindestens eine invariante zweifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit* M_2 *u. s. w. Durch jede invariante ebene* M_{n-3} *geht schliesslich mindestens eine invariante ebene* M_{n-2}.

Wir können durch Einführung passender Veränderlicher $x_1 \dots x_n$ vermöge einer linearen homogenen Substitution, also vermöge einer projectiven Transformation des R_{n-1} stets erreichen, dass der Punkt M_0 der Punkt $(0:0 \dots 0:1)$, der Strahl M_1 die Gerade von M_0 nach dem Punkte $(0:0 \dots 1:0)$ u. s. w. wird, sodass alle $X_1 f \dots X_r f$ genau dieselbe Reihe von ebenen Mannigfaltigkeiten $M_0, M_1, M_2 \dots$ in Ruhe lassen, wie früher Xf in Theorem 34. Daher nehmen alsdann $X_1 f \dots X_r f$ sämtlich die damalige Form an. Deshalb lässt sich der letzte Satz auch so formulieren:

Satz 20: *Ist eine lineare homogene Gruppe* $X_1 f \dots X_r f$ *in* n *Veränderlichen so beschaffen, dass Relationen von der Form*

$$(X_i X_{i+k}) \equiv \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,\, i+k,\, s} X_s f \quad (i = 1, 2 \dots r-1, \quad k = 1, 2 \dots r-i)$$

bestehen, so kann man stets solche neue Veränderliche $x_1 \dots x_n$ *vermöge einer linearen homogenen Transformation einführen, dass alle* $X_k f$ *gleichzeitig die besonderen Formen*

$$X_k f \equiv \alpha_{k11} x_1 p_1 + (\alpha_{k21} x_1 + \alpha_{k22} x_2) p_2 + \cdots + (\alpha_{kn1} x_1 + \cdots + \alpha_{knn} x_n) p_n$$
$$(k = 1, 2 \dots r)$$

annehmen.

Den Satz 19 werden wir später für gewisse nicht projective Gruppen verwerten, indem wir ihn auf ihre adjungierten Gruppen anwenden.

Vorher soll aber noch auf die Abänderung eingegangen werden, welche die geometrische Deutung des Theorems 29 in § 4 des 16. Kap. erfährt, sobald man die Variabeln als *homogene* Coordinaten auffasst. Wir haben schon gelegentlich auf diese Änderung aufmerksam gemacht.

Liegt eine Gruppe vor, deren infinitesimale Transformationen homogen in ihren Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ sind, und deutet man ihre Veränderlichen als homogene Punktcoordinaten eines R_{n-1}, wie wir es in diesem Paragraphen gethan haben, so ist zu beachten, dass eine ihrer infinitesimalen Transformationen einem Punkte $(x_1 : \cdots : x_n)$ keine Fortschreitung im R_{n-1} zuerteilt, sobald ihre Incremente für diesen Punkt proportional $x_1 \dots x_n$ selbst sind. Man wird daher immer ausser den Transformationen der Gruppe auch solche von der Form

$$x_1' = \lambda x_1, \quad x_2' = \lambda x_2 \quad .. \quad x_n' = \lambda x_n$$

zulassen, die von $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ erzeugt werden. Man wird daher zu den infinitesimalen Transformationen der Gruppe stets $U \equiv x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ hinzufügen dürfen, ohne die begriffliche Deutung zu stören. Andererseits ist dies analytisch stets möglich, da U mit einer infinitesimalen homogenen Transformation combiniert stets diese reproduciert, insbesondere, wenn die Transformation linear ist, Null ergiebt.

Nehmen wir an, wir hätten, wie wir dies auch in unseren Beispielen stets gethan haben, zu den infinitesimalen Transformationen der Gruppe in der That $U \equiv x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ hinzugefügt. Ist die neue Gruppe eingliedrig, so ist sie von U selbst erzeugt und lässt alle Punkte in Ruhe. Ist sie zweigliedrig, so erteilt sie einem Punkte $(x_1 .. x_n)$ gerade eine Fortschreitung, wenn die Matrix ihrer beiden infinitesimalen Transformationen mindestens eine für den Punkt $(x_1 .. x_n)$ nicht verschwindende zweireihige Determinante enthält, u. s. w. Ist bei der U enthaltenden Gruppe $X_1 f .. X_r f$ etwa:

$$X_k f \equiv \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 .. r),$$

so ergiebt sich: *Sie erteilt einem Punkte $(x_1 .. x_n)$ gerade q von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen im R_{n-1}, sobald zwar alle $(q+2)$-reihigen, nicht aber alle $(q+1)$-reihigen Determinanten der Matrix*

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdot\cdot & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdot\cdot & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdot\cdot & \xi_{rn} \end{vmatrix}$$

für diesen Punkt verschwinden. Dementsprechend ist das Theorem 29, § 4 des 16. Kap., abzuändern, sobald die Gruppe in homogenen Punktcoordinaten vorliegt und $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ schon zu ihren infinitesimalen Transformationen hinzugefügt worden ist.

Wollte man $x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$ nicht hinzufügen, so könnte man eben die Anzahl der von einander unabhängigen Fortschreitungsrichtungen nicht ohne weiteres daraus entnehmen, wieviel-reihig die grössten nicht-verschwindenden Determinanten der Matrix sind.

§ 5. Einige Sätze über Gruppen und Untergruppen.

Wir wollen in diesem Paragraphen eine Reihe von Sätzen zusammenstellen, die wir zum Teil im nächsten Kapitel verwenden

werden. Wir heben aber ausdrücklich hervor, dass im Übrigen die Ergebnisse dieses Paragraphen künftig keine wesentliche Rolle spielen. Solche Leser also, die das nächste Kapitel überschlagen wollen, können auch den gegenwärtigen Paragraphen ohne besonderen Nachteil vorerst übergehen.

Gruppen von besonderer Zusammensetzung.

Fassen wir zunächst, um den obigen Satz 19 auf nicht-projective Gruppen anzuwenden, irgend eine solche r-gliedrige Gruppe $X_1f\,..\,X_rf$ oder G_r in beliebig vielen Veränderlichen $x_1\,..\,x_n$ ins Auge, bei der allgemein

$$(31)\qquad (X_iX_{i+k})\equiv\sum_1^{i+k-1}{}_s\, c_{i,\,i+k,\,s}X_sf$$

$$(i=1,\,2\,..\,r-1,\quad k=1,\,2\,..\,r-i)$$

ist, sodass die Gruppe G_r eine $(r-1)$-gliedrige *invariante* Untergruppe G_{r-1}, nämlich $X_1f\,..\,X_{r-1}f$, ferner letztere eine *in* G_{r-1} *invariante* Untergruppe G_{r-2}, nämlich $X_1f\,..\,X_{r-2}f$ u. s. w. enthält; dass überhaupt $X_1f\,..\,X_jf$ für alle Werte $j=1,\,2\,..\,r$ eine Gruppe G_j erzeugen und dass diese Gruppe G_j in der nächst grösseren Gruppe G_{j+1} invariant ist.

Die Gruppe G_r besitzt eine adjungierte Gruppe $E_1f\,..\,E_rf$, bei der nach Theorem 33, § 2 des 18. Kap.

$$E_\nu f\equiv\sum_1^r{}_k\sum{}_\mu\, c_{\mu\nu k}\,e_\mu\,\frac{\partial f}{\partial e_k}\quad(\nu=1,\,2\,..\,r)$$

ist. Von den $c_{\mu\nu k}$ sind jetzt nach (31) alle die, in denen k grösser oder gleich der grösseren der Zahlen μ und ν ist, gleich Null. Nach dem angegebenen Theorem ist ferner:

$$(E_iE_j)\equiv\sum_1^r{}_s\, c_{ijs}E_sf\quad(i,\,j=1,\,2\,..\,r).$$

Daher bestehen auch bei der adjungierten Gruppe analog (31) Relationen von der Form

$$(32)\qquad (E_iE_{i+k})\equiv\sum_1^{i+k-1}{}_s\, c_{i,\,i+k,\,s}E_sf$$

$$(i=1,\,2\,..\,r-1,\quad k=1,\,2\,..\,r-i).$$

Aber $E_1f\,..\,E_rf$ sind linear und homogen in $e_1\,..\,e_r$, daher *projective* Transformationen des Raumes der adjungierten Gruppe mit den *homogenen* Punktcoordinaten $e_1\,..\,e_r$. Für die Gruppe $E_1f\,..\,E_rf$ besteht demnach der Satz 19 des vorigen Paragraphen. Denn es ist in der That leicht einzusehen, dass die adjungierte Gruppe auch dann die

Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, wenn die Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält und dementsprechend nach Theorem 33, § 2 des 18. Kap., unter den infinitesimalen Transformationen $E_1 f \dots E_r f$ sich einige aus den vorangehenden linear ableiten lassen. Werden nämlich diese $E_k f$ einfach gestrichen, so erfüllen die übrig gebliebenen

$$E_{\iota_1} f, \; E_{\iota_2} f \dots E_{\iota_\varrho} f$$

immer noch Relationen von der Form:

$$(E_{\iota_i} E_{\iota_{i+k}}) = \sum_1^{i+k-1} {}_s \, d_{i,\, i+k,\, s} E_{\iota_s} f \quad (i = 1, 2 \dots \varrho - 1, \quad k = 1, 2 \dots \varrho - i).$$

Es ergiebt sich also, dass die adjungierte Gruppe in ihrem Raume $(e_1 : \dots : e_r)$ stets mindestens einen Punkt M_0, eine durch ihn gehende Gerade M_1, eine durch letztere gehende ebene Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen M_2 u. s. w. in Ruhe lässt.

Aber nach § 3 des 18. Kap. stellt jede dieser invarianten ebenen Mannigfaltigkeiten M_0, M_1, $M_2 \dots$ eine invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ dar und zwar M_0 eine eingliedrige, M_1 eine diese enthaltende zweigliedrige, M_2 eine letztere enthaltende dreigliedrige u. s. w. Die Gruppe G_r oder $X_1 f \dots X_r f$ besitzt also sicher eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe $\overline{G}_{r-1}$, ferner eine $(r-2)$-gliedrige invariante Untergruppe $\overline{G}_{r-2}$, die auch in $\overline{G}_{r-1}$ enthalten ist, ferner eine $(r-3)$-gliedrige invariante Untergruppe $\overline{G}_{r-3}$, die auch in $\overline{G}_{r-2}$ enthalten ist, u. s. w. Man bemerke den Unterschied gegenüber der früheren Voraussetzung: G_{r-s} war zwar Untergruppe von G_r, aber *nur in der Gruppe* G_{r-s+1} *invariante* Untergruppe, während $\overline{G}_{r-s}$ *in der ganzen Gruppe* G_r *invariant* ist. Ist $\overline{X}_1 f$ die infinitesimale Transformation von $\overline{G}_1$, ferner $\overline{X}_2 f$ eine von $\overline{X}_1 f$ unabhängige von $\overline{G}_2$ u. s. w., sodass allgemein $\overline{G}_{r-s}$ die Gruppe $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_{r-s} f$ ist, so muss also jetzt jeder Klammerausdruck $(\overline{X}_i \overline{X}_{i+k})$ aus $\overline{X}_1 f \dots \overline{X}_i f$ allein linear ableitbar sein, sodass Relationen bestehen von der Form

$$(\overline{X}_i \overline{X}_{i+k}) \equiv \sum_1^{i} {}_s \, \bar{c}_{i,\, i+k,\, s} \overline{X}_s f$$

$$(i = 1, 2 \dots r-1, \quad k = 1, 2 \dots r - i),$$

in denen die Summe für s sich nur über die Werte von 1 *bis i erstreckt.*

Wir haben also gefunden:

Theorem 35: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f..X_r f$, die Relationen von der Form*

$$(X_i X_{i+k}) \equiv \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,\, i+k,\, s} X_s f$$

$$(i = 1, 2 \,..\, r-1, \quad k = 1, 2 \,..\, r-i)$$

erfüllen, so enthält sie auch r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $\bar{X}_1 f..\bar{X}_r f$, die Relationen von der Form

$$(\bar{X}_i \bar{X}_{i+k}) \equiv \sum_1^{i} {}_s\, \bar{c}_{i,\, i+k,\, s} \bar{X}_s f$$

$$(i = 1, 2 \,..\, r-1, \quad k = 1, 2 \,..\, r-i)$$

erfüllen.

Anders ausgesprochen: Können die infinitesimalen Transformationen $X_1 f..X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe in solcher Weise gewählt werden, dass $X_1 f..X_s f$ jedesmal eine s-gliedrige Untergruppe G_s erzeugen, die in der nächstgrösseren Untergruppe G_{s+1} invariant ist, so giebt es immer r solche von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $\bar{X}_1 f..\bar{X}_r f$ in der Gruppe, dass $\bar{X}_1 f..\bar{X}_s f$ jedesmal eine s-gliedrige Untergruppe $\bar{G}_s$ erzeugen, die in der ganzen r-gliedrigen Gruppe invariant ist; offenbar ist dann jede $\bar{G}_s$ in allen $\bar{G}_{s+k}$ invariant.

Man nennt derartige Gruppen aus Gründen, die hier nicht erörtert werden sollen, *integrabele Gruppen*, alle anderen Gruppen *nicht-integrabele Gruppen**).

Integrabele Gruppen.

Beispiel: Die viergliedrige Gruppe in x, y:

Beispiel.

$$G_4:\quad p \quad q \quad xq \quad x^2 q$$

besitzt eine invariante dreigliedrige Untergruppe

$$G_3:\quad p \quad q \quad xq,$$

die G_3 hat eine invariante zweigliedrige Untergruppe

$$G_2:\quad p \quad q$$

und diese G_2 eine eingliedrige

$$G_1:\quad p.$$

Aber G_1 ist nicht in G_3 und G_4 invariant, ebenso G_2 nicht in G_4.

*) Den *Begriff:* integrabele Gruppe führte Lie in den Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1874 ein; die *Bezeichnung:* integrabele Gruppe benutzte er zum ersten Male in den Berichten der Ges. d. Wiss. zu Leipzig 1889.

Nach unserem Theorem muss es möglich sein, eine Reihe von Untergruppen $\overline{G}_3$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_1$ so auszuwählen, dass jede in allen vorhergehenden, $\overline{G}_3$ in G_4 invariant ist. Solche sind in der That z. B.:

$$\overline{G}_3:\ q \quad xq \quad x^2q,$$
$$\overline{G}_2:\ q \quad xq,$$
$$\overline{G}_1:\ q.$$

Die allgemeinste Art einer derartigen Reihenfolge invarianter Untergruppen ist leicht gefunden: Denn in der G_4 ist q die einzige eingliedrige invariante Untergruppe, ferner q, xq die allgemeinste zweigliedrige und q, xq, $\alpha p + \beta x^2 q$ die allgemeinste dreigliedrige invariante Untergruppe. Also ist in allgemeinster Weise zu setzen:

$$\overline{G}_3:\ q \quad xq \quad \alpha p + \beta x^2 q,$$
$$\overline{G}_2:\ q \quad xq,$$
$$\overline{G}_1:\ q.$$

Beim Beweis des Theorems haben wir von der begrifflichen Deutung der adjungierten Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe G_r in einem Raume R_{r-1} Gebrauch gemacht. Man könnte diese Deutung überhaupt zum Beweise vieler Sätze anwenden, die sich nicht nur auf die integrabelen, sondern auf beliebige Gruppen und Untergruppen beziehen.

Wir verlassen jetzt, indem wir solche Sätze aufstellen wollen, die Betrachtung der integrabelen Gruppen. Erst nachher werden wir zu diesen zurückkehren.

Zunächst beweisen wir mit Hülfe der begrifflichen Deutung im Raume der adjungierten Gruppe den folgenden

Gemeinsame Trf. zweier Untergr.

Satz 21: *Alle Transformationen, die in zwei Untergruppen einer Gruppe zugleich enthalten sind, bilden für sich eine Untergruppe.*

Denn ist g die eine, g' die andere Untergruppe der G_r, so wird g im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe der G_r durch eine ebene Mannigfaltigkeit M, g' durch eine M' dargestellt. Alle Transformationen der adjungierten Gruppe der G_r, die von Punkten von M dargestellt werden, lassen M invariant; alle, die von Punkten von M' dargestellt werden, lassen M' invariant. (Vgl. § 3 des 18. Kap.) Es mögen sich M und M' in der ebenen Mannigfaltigkeit m schneiden. Alsdann führen alle Transformationen der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkte auf m liegen, alle Punkte von m aus dem einen Grunde in solche von M, aus dem anderen in solche von M' über, also in Punkte von m. m bleibt daher invariant bei allen den Transformationen der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkte auf m liegen, sodass

also m eine Untergruppe der G_r darstellt und zwar diejenige, die alle g und g' gemeinsamen Transformationen enthält.

Wir können den Satz übrigens auch anders nachweisen und noch allgemeiner fassen: Es seien nämlich S_a .. die Transformationen einer Gruppe, T_b ... die einer zweiten Gruppe. Beide Gruppen mögen gewisse Transformationen Θ_c ... gemein haben. Letztere bilden dann für sich eine Gruppe, denn nach Voraussetzung ist die Aufeinanderfolge $\Theta_c \Theta_d$ sowohl einer Transformation S als auch einer Transformation T, also einer Transformation Θ äquivalent:

Gemeinsame Trf. zweier Gruppen.

Satz 22: *Alle Transformationen, die zwei verschiedenen Gruppen zugleich angehören, bilden für sich eine Gruppe.*

Dieser Satz gilt nicht nur für continuierliche Gruppen, die von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, sondern offenbar für alle Gruppen überhaupt, da er nur eine Folge der Gruppeneigenschaft $T_a T_b = T_c$ ist.

Wir wollen noch einige Sätze auf ähnlichem Wege beweisen. Dazu wollen wir den früheren Begriff: *invariante Untergruppe* nunmehr so aussprechen, dass er auch für Gruppen einen Sinn hat, die nicht von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind: In § 3 des 18. Kap. definierten wir als invariante Untergruppe $X_1 f \dots X_s f$ einer Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ eine solche Untergruppe $X_1 f \dots X_s f$, deren Bildmannigfaltigkeit im Raume der adjungierten Gruppe bei allen infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant bleibt. Eine solche Mannigfaltigkeit bleibt dann auch bei allen endlichen Transformationen der adjungierten Gruppe in Ruhe, d. h. die invariante Untergruppe $X_1 f \dots X_s f$ geht bei Ausführung aller *endlichen* Transformationen der ganzen Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ auf sie in sich über. Nach Satz 5, § 2 des 3. Kap., können wir daher den Begriff invariante Untergruppe auch so fixieren (vgl. S. 530 oben):

Invariante Untergr.

Enthält die Gruppe T_a ... mit paarweis inversen Transformationen die Untergruppe S_b ..., und ist jede Aufeinanderfolge $T_a^{-1} S_b T_a$ wieder einer Transformation S äquivalent, so heisst die Untergruppe S_b ... eine invariante Untergruppe der Gruppe T_a ....

Diese Definition deckt sich, wie gesagt, mit der früheren, hat aber auch für Gruppen, die nicht von infinitesimalen Transformationen erzeugt werden, einen bestimmten Sinn, sobald die Gruppen nur paarweis inverse Transformationen, also auch die identische, enthalten. Wir ziehen sie vor, weil wir einige Sätze ableiten wollen, die auch für nicht-continuierliche Gruppen gelten.

Es seien T_a ... die Transformationen einer Gruppe, S_b ... die

einer Untergruppe, $\Theta_c \ldots$ die einer zweiten, insbesondere *invarianten* Untergruppe der Gruppe $T_a \cdots$. Ferner mögen $\Sigma_d \ldots$ die den Untergruppen $S_b \ldots$ und $\Theta_c \ldots$ gemeinsamen Transformationen sein, die nach unseren Sätzen für sich eine Gruppe darstellen. Nach Voraussetzung ist nun $S_b^{-1}\Sigma_d S_b$ einem S äquivalent, als Aufeinanderfolge dreier Transformationen der Gruppe $S_b \cdots$. Andererseits ist, da Σ_d der invarianten Untergruppe $\Theta_c \ldots$ angehört, die Aufeinanderfolge $S_b^{-1}\Sigma_d S_b$ wie allgemein die Aufeinanderfolge $T_a^{-1}\Theta_c T_a$ überhaupt einem Θ äquivalent. Daher ist $S_b^{-1}\Sigma_d S_b$ einer Transformation äquivalent, die beiden Untergruppen $S_b \ldots$ und $\Theta_c \ldots$ angehört, also einem Σ. D. h. die Σ bilden nach obiger Definition eine invariante Untergruppe der Gruppe $S_b \cdots$.

Gemeinsame Trf. einer Untergr. u. einer inv. Untergr.

Satz 23: *Alle Transformationen, die einer Untergruppe g und einer invarianten Untergruppe γ einer gegebenen Gruppe zugleich angehören, bilden für sich eine invariante Untergruppe der Gruppe g.*

Beispiele.

1. Beispiel: Die Gruppe

$$q \quad xq \quad p \quad xp + (2y + x^2)q$$

besitzt die invariante Untergruppe

$$q \quad xq \quad p.$$

Ferner ist

$$q \quad xq \quad xp + (2y + x^2)q$$

eine (nicht-invariante) Untergruppe. Mithin ist q, xq eine invariante Untergruppe der letzteren.

2. Beispiel: Eine dreigliedrige Untergruppe der Gruppe

$$q \quad p \quad xp \quad yq$$

ist invariant, sobald sie q und p enthält. Ferner ist p, xp, yq eine Untergruppe. Daher bilden die gemeinsamen Transformationen von

$$p \quad xp \quad yq$$

und

$$q \quad p \quad \lambda xp + \mu yq$$

eine invariante Untergruppe der ersteren, d. h. in p, xp, yq ist p, $\lambda xp + \mu yq$ für alle Werte von $\lambda : \mu$ invariant.

Der Satz 23 liesse sich auch durch Betrachtungen im Raume der adjungierten Gruppe darthun, ähnlich wie Satz 21. Wir überlassen dies jedoch dem Leser.

Nehmen wir an, *beide* Untergruppen $S_b \ldots$ und $\Theta_c \ldots$ der Gruppe $T_a \ldots$ seien *invariante* Untergruppen, während $\Sigma_d \ldots$ die den beiden Untergruppen gemeinsame Untergruppe darstellen sollen. Alsdann ist $T_a^{-1}\Sigma_d T_a$ sowohl einer Transformation S_b als auch einer Transformation Θ_c äquivalent, weil Σ_d sowohl zu den S als zu den Θ gehört.

Demnach ist $T_a^{-1}\Sigma_d T_a$ wieder einem der Σ äquivalent, d. h. die Σ bilden eine invariante Untergruppe der ganzen Gruppe $T_a \cdots$.

Gemeinsame Trf. zweier inv. Untergr.

Satz 24: *Alle Transformationen, die zwei invarianten Untergruppen einer Gruppe G zugleich angehören, bilden für sich eine invariante Untergruppe der Gruppe G.*

Beispiel.

Beispiel: In der Gruppe p, q, r, zq erzeugt q mit irgend zwei anderen infinitesimalen Transformationen der Gruppe stets eine dreigliedrige invariante Untergruppe, weil q die erste derivierte Gruppe ist. Daher erzeugt auch q mit jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe eine zweigliedrige invariante Untergruppe.

Nehmen wir jetzt an, zwei invariante Untergruppen $S_b \ldots$ und $\Theta_c \ldots$ der Gruppe $T_a \ldots$ haben gar keine Transformationen gemein, natürlich ausser der identischen. Alsdann ist zunächst $S_b^{-1}\Theta_c S_b$ äquivalent einer Transformation Θ_d:

$$S_b^{-1}\Theta_c S_b = \Theta_d,$$

daher:

$$\Theta_c S_b = S_b \Theta_d.$$

S_b tritt links wie rechts auf. Da nun beide Gruppen $S_b \ldots$ und $\Theta_c \ldots$ gleichartig definiert sind, so gilt analog eine solche Formel:

$$\Theta_c S_b = S_e \Theta_c,$$

in der Θ_c beiderseits auftritt. Aus beiden Formeln folgt:

$$S_b \Theta_d = S_e \Theta_c$$

oder

$$S_e^{-1} S_b = \Theta_c \Theta_d^{-1}.$$

Da $S_e^{-1} S_b$ einer Transformation der einen, $\Theta_c \Theta_d^{-1}$ einer der andern Untergruppe äquivalent ist, da jedoch beide Untergruppen keine Transformation ausser der identischen gemein haben, so folgt:

$$S_e^{-1} S_b = \Theta_c \Theta_d^{-1} = 1,$$

also:

$$S_e = S_b, \quad \Theta_c = \Theta_d$$

und die obige Formel $\Theta_c S_b = S_b \Theta_d$ liefert:

$$\Theta_c S_b = S_b \Theta_c.$$

Das Ergebnis ist also:

Inv. Untergruppen ohne gem. Transform.

Satz 25: *Haben zwei invariante Untergruppen einer gegebenen Gruppe keine Transformation ausser der identischen gemein, so sind die Transformationen der einen Untergruppe mit denen der anderen Untergruppe vertauschbar.*

Wir können auch so sagen:

Satz 26: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ zwei invariante Untergruppen $Y_1 f \ldots Y_s f$ und $Z_1 f \ldots Z_\sigma f$ und haben diese Untergruppen*

keine infinitesimale Transformation gemein, so sind die Transformationen der einen mit denen der anderen Untergruppe vertauschbar.

In dieser Formulierung deckt sich der Satz zwar nicht völlig mit dem vorigen; er kann aber sofort so bewiesen werden: Nach Voraussetzung und nach der Definition der invarianten Untergruppen in § 3 des 18. Kap. ist jeder Klammerausdruck $(Y_i X_k)$ linear aus $Y_1 f \ldots Y_s f$ allein ableitbar, also auch $(Y_i Z_k)$. Dieser Ausdruck ist aber aus denselben Gründen linear aus $Z_1 f \ldots Z_\sigma f$ allein ableitbar, also ist er, da beide Untergruppen $Y_1 f \ldots Y_s f$ und $Z_1 f \ldots Z_\sigma f$ keine infinitesimale Transformation gemein haben sollen, gleich Null. Dies aber führt nach Satz 6, § 2 des 17. Kap., zu dem ausgesprochenen Ergebnis.

Eine spec. inv. Untergruppe.

Wir wollen noch einen Specialfall des Satzes 23 aufstellen, der ein hervorragendes Interesse besitzt: Die adjungierte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ in $e_1 \ldots e_r$ einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ ist als Untergruppe in der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in $e_1 \ldots e_r$

$$e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} \quad (i, k = 1, 2 \ldots r)$$

enthalten. Nun aber ist die specielle lineare homogene Gruppe

$$e_k \frac{\partial f}{\partial e_i} \quad (k \neq i), \qquad e_i \frac{\partial f}{\partial e_i} - e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots r)$$

eine invariante Untergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in $e_1 \ldots e_r$. Man kann dies durch Bildung der Klammerausdrücke direct einsehen, es folgt aber auch sofort aus der Formel $\Delta_c = \Delta_a \Delta_b$ des Satzes 1, § 1. Nach Satz 23 erzeugen folglich alle Transformationen der adjungierten Gruppe, die der speciellen linearen homogenen Gruppe angehören, eine invariante Untergruppe der adjungierten Gruppe. Jeder infinitesimalen Transformation $\Sigma \varepsilon_\nu E_\nu f$ der adjungierten Gruppe entspricht eine infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_\nu X_\nu f$ der gegebenen Gruppe derartig, dass die Klammerausdrücke der ersteren sich durch die ersteren ebenso ausdrücken, wie die der letzteren durch die letzteren, nach Theorem 33, § 2 des 18. Kap. Also werden auch diejenigen infinitesimalen Transformationen $\Sigma \varepsilon_\nu X_\nu f$ der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ eine invariante Untergruppe dieser Gruppe bilden, deren zugehörige $\Sigma \varepsilon_\nu E_\nu f$ der speciellen linearen homogenen Gruppe in $e_1 \ldots e_r$ angehören. Es ist aber

$$E_\nu f \equiv \sum_1^r{}^k \sum{}^\mu c_{\mu\nu k} e_\mu \frac{\partial f}{\partial e_k}.$$

Daher gehört $\Sigma \varepsilon_\nu E_\nu f$ dann der speciellen linearen homogenen Gruppe nach Formel (6) in § 1 des jetzigen Kap. an, wenn $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ die einzige Bedingung erfüllen:

$$\varepsilon_1 \sum_1^r {}_k\, c_{k1k} + \varepsilon_2 \sum_1^r {}_k\, c_{k2k} + \cdots + \varepsilon_r \sum_1^r {}_k\, c_{krk} = 0.$$

Da jedes $c_{iks} = - c_{kis}$ ist, so können wir das Ergebnis auch in etwas anderer Weise so ausdrücken:

Satz 27: *Ist $X_1 f \,..\, X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe und daher etwa*

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i,\, k = 1,\, 2 \,..\, r),$$

so erzeugen alle diejenigen infinitesimalen Transformationen $\varepsilon_1 X_1 f + \cdots + \varepsilon_r X_r f$, für die

$$\varepsilon_1 \sum_1^r {}_s\, c_{1ss} + \varepsilon_2 \sum_1^r {}_s\, c_{2ss} + \cdots + \varepsilon_r \sum_1^r {}_s\, c_{rss} = 0$$

ist, eine invariante Untergruppe. Diese Untergruppe ist entweder $(r-1)$-gliedrig oder aber sie fällt mit der ganzen Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ zusammen. Letzteres tritt ein, wenn einzeln alle $\sum_s c_{kss}$ verschwinden.

Wir werden noch einige Sätze über invariante Untergruppen entwickeln:

Nehmen wir an, die erste derivierte Gruppe einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe sei weniger als r-gliedrig, etwa nur q-gliedrig $(q < r)$. Alsdann können wir r von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f \,..\, X_q f$ der Gruppe so auswählen, dass $X_1 f \,..\, X_q f$ die erste derivierte Gruppe darstellen und also jeder Klammerausdruck $(X_i X_k)$ linear aus $X_1 f \,..\, X_q f$ allein ableitbar ist. Es folgt dies direct aus der am Schluss des § 3 des 18. Kap. gegebenen Definition der ersten derivierten Gruppe. Es leuchtet ein, dass $X_1 f \,..\, X_q f$ mit beliebig vielen infinitesimalen Transformationen

$$\text{Const. } X_{q+1} f + \cdots + \text{Const. } X_r f$$

zusammen stets eine Untergruppe der ganzen r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ und zwar eine *invariante* Untergruppe darstellen.

Es möge nun andererseits eine vorgelegte r-gliedrige Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ eine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe enthalten. Alsdann dürfen wir annehmen, dass $X_1 f \,..\, X_{r-1} f$ gerade diese invariante Untergruppe darstellen, also alle Klammerausdrücke aller Xf mit diesen $r-1$ Symbolen Xf linear aus diesen $r-1$ allein ableit-

bar sind. Aber zu diesen Klammerausdrücken gehört ja *jeder* Klammerausdruck $(X_i X_k)$. Also enthält die vorausgesetzte $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe auch die erste derivierte Gruppe und ist unter Umständen, nämlich wenn letztere auch gerade $(r-1)$-gliedrig ist, mit ihr identisch.

Unsere beiden Betrachtungen geben zusammen die Sätze:

$(r-1)$-gl. inv. Untergr. einer r-gl. Gruppe.

Satz 28: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe keine $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, so ist sie ihre eigene erste derivierte Gruppe.*

Satz 29: *Eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ enthält dann und nur dann $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppen, wenn sie nicht ihre eigene erste derivierte Gruppe ist. Jede solche Untergruppe wird dadurch gebildet, dass man zu den Klammerausdrücken $(X_i X_k)$ noch so viele infinitesimale Transformationen $\Sigma\, Const.\, Xf$ der Gruppe beliebig hinzufügt, dass man gerade $r-1$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen erhält.* (Vgl. S. 488 oben.)

Perfecte Gruppe.

Eine Gruppe, die ihre eigene erste derivierte Gruppe ist, bezeichnen wir als eine *perfecte Gruppe.* Eine früher, zum Schluss des § 3 des 18. Kap. gemachte Bemerkung können wir offenbar nun so aussprechen:

Satz 30: *Eine einfache Gruppe ist stets perfect.*

Dass das Umgekehrte aber nicht gilt, haben wir schon damals hervorgehoben und durch ein Beispiel erläutert.

Wir wollen noch ein Beispiel zu Satz 29 geben:

Beispiel.

Beispiel: Bei der Gruppe

$$p \quad q \quad xq \quad xp + yq$$

lautet die erste derivierte Gruppe:

$$p \quad q.$$

Dies ist also eine zweigliedrige invariante Untergruppe, wohlbemerkt aber nicht die einzige, denn auch $q \quad xq$ ist eine. Jede dreigliedrige invariante Untergruppe aber ergiebt sich, wenn man zu p, q irgend eine infinitesimale Transformation der Gruppe hinzufügt, hat also die Form

$$p \quad q \quad \lambda xq + \mu(xp + yq).$$

Wir reihen hier den Satz an:

Invariante Untergr. einer $(r-1)$-gl. Untergr.

Satz 31: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine nicht-invariante $(r-1)$-gliedrige Untergruppe G_{r-1}, so besitzt diese G_{r-1} eine invariante $(r-2)$-gliedrige Untergruppe G_{r-2}.*

Zunächst geben wir einen analytischen Beweis: Die Gruppe G_{r-1} sei durch $X_1 f \ldots X_{r-1} f$ dargestellt. Eine r^{te} infinitesimale Transfor-

mation der Gruppe G_r wollen wir zur Unterscheidung mit Yf bezeichnen. Dann bestehen Relationen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv \Sigma \operatorname{Const.} Xf, \quad (X_i Y) \equiv \Sigma \operatorname{Const.} Xf + \alpha_i Yf$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots r-1).$$

Hier sind nicht alle Constanten α_i gleich Null, weil sonst gegen Voraussetzung G_{r-1} eine invariante Untergruppe von G_r wäre. Ist etwa $\alpha_{r-1} \neq 0$, so können wir $X_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{r-1}} X_{r-1}f$ als neues $X_i f$ und $\frac{1}{\alpha_{r-1}} X_{r-1} f$ als neues $X_{r-1}f$ benutzen. Dadurch erhalten wir:

$$(X_i X_k) \equiv \Sigma \operatorname{Const.} Xf, \quad (X_i Y) \equiv \Sigma \operatorname{Const.} Xf \quad (i < r-1),$$
$$(X_{r-1} Y) \equiv \Sigma \operatorname{Const.} Xf + Yf.$$

Verstehen wir unter i, k zwei der Zahlen $1, 2 \ldots r-2$, so sind in der Identität

$$((X_i X_k) Y) + ((X_k Y) X_i) + ((Y X_i) X_k) \equiv 0$$

nach der Ausrechnung die beiden letzten Glieder frei von Yf. Das erste ist es aber nur dann, wenn $(X_i X_k)$ frei von $X_{r-1}f$ ist. Es ist somit jeder Klammerausdruck $(X_i X_k)$ frei von $X_{r-1}f$, mit anderen Worten: $X_1 f \ldots X_{r-2} f$ bilden für sich eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe. Die Identität:

$$((X_i X_{r-1}) Y) + ((X_{r-1} Y) X_i) + ((Y X_i) X_{r-1}) \equiv 0$$

ergiebt ferner, dass $(X_i X_{r-1})$ von $X_{r-1}f$ frei ist. Die $(r-2)$-gliedrige Gruppe ist folglich eine invariante Untergruppe von $X_1 f \ldots X_{r-1} f$.

Wir wollen den Beweis für den Fall, dass $r = 4$ ist, auch begrifflich durchführen und bemerken vorweg, dass diese Betrachtung sich ohne weiteres auf ein beliebig grosses r verallgemeinern lässt.

Im Raume R_3 der adjungierten Gruppe der gegebenen Gruppe G_4 wird die vorausgesetzte nicht-invariante dreigliedrige Untergruppe G_3 durch eine Ebene E dargestellt. Diese Ebene geht bei solchen infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkte in ihr liegen, in sich über. Da die adjungierte Gruppe höchstens viergliedrig ist, die Ebene E aber durch drei Punkte bestimmt wird, so folgt, dass höchstens *eine* infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe die Ebene E in eine neue Lage überführen könnte; andererseits muss es auch mindestens eine sein, da sonst E völlig invariant, d. h. G_3 eine invariante Untergruppe der G_4 wäre. Durch fortwährende Ausführung aller Transformationen der adjungierten Gruppe nimmt also die Ebene E ∞^1 Lagen an, die eine continuierliche Schar bilden und eine developpabele Fläche umhüllen oder

aber ein Ebenenbüschel sind. Im letzteren Falle ist die Axe des Büschels bei der adjungierten Gruppe invariant, stellt also eine invariante zweigliedrige Untergruppe der G_4 dar, die in G_3 enthalten und also auch in G_3 invariant ist. Damit ist der Satz für diesen Fall bewiesen. Im ersteren Falle nun bleibt die developpabele Fläche bei der adjungierten Gruppe in Ruhe, also insbesondere bei allen den infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkte in der Ebene E liegen. Bei diesen bleibt aber auch die Ebene E in Ruhe, mithin auch die der Ebene E und der developpabelen Fläche gemeinsame Gerade. Diese infinitesimalen Transformationen aber transformieren die Punkte von E genau so wie die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe der G_3. Die invariante Gerade stellt somit eine invariante zweigliedrige Untergruppe der G_3 dar. Also ist der Satz auch in diesem Falle bewiesen.

Verallgemeinerung.

Diese begriffliche Betrachtung lässt sich noch verallgemeinern, nicht nur, wie schon gesagt, auf beliebig grosses r, sondern noch in anderer Weise:

Betrachten wir eine r-gliedrige Gruppe G_r, die eine $(r-q)$-gliedrige Untergruppe G_{r-q} enthalten möge, welch' letztere aber in keiner grösseren Untergruppe der Gruppe G_r enthalten und auch keine invariante Untergruppe der ganzen Gruppe G_r sein soll. Im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe der G_r wird die G_{r-q} durch eine $(r-q-1)$fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit M dargestellt. Diese M bleibt bei den infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe der G_r in Ruhe, die durch die Punkte der M dargestellt werden. Mithin giebt es höchstens $r-(r-q)=q$ von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der adjungierten Gruppe, die M in neue Lagen bringen. Andererseits sicher soviele, da sonst die G_{r-q} invariante Untergruppe einer grösseren Untergruppe der G_{r-q} wäre. Die Mannigfaltigkeit M wird mithin in ∞^q ebene Mannigfaltigkeiten M' übergeführt. Daraus, dass vorausgesetzt wurde, dass die G_{r-q} in keiner grösseren Untergruppe der G_r enthalten ist, kann man, worauf wir nicht weiter eingehen, schliessen, dass diese ∞^q M' so im Raume R_{r-1} verteilt sind, dass sie ein Umhüllungsgebilde besitzen, das nicht mit dem ganzen R_{r-1} zusammenfällt. Dieses Umhüllungsgebilde bleibt selbstverständlich bei der adjungierten Gruppe der G_r invariant. Jene Mannigfaltigkeit M hat mit dem Umhüllungsgebilde eine ebene oder krumme Mannigfaltigkeit m gemein, wenn sie nicht ganz im Umhüllungsgebilde enthalten ist. Es ist nun klar, dass diese Mannigfaltigkeit m bei den infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe der G_r in Ruhe bleibt, deren Bildpunkte in M gelegen sind. Denn sie lassen M und jenes Umhüllungsgebilde, mithin die beiden gemeinsame Mannigfaltigkeit m in Ruhe. Letztere stellt daher eine gewisse invariante Schar von infinitesimalen Transformationen der Gruppe G_{r-q} dar.

Diese Schlussfolgerung wird jedoch hinfällig, wenn das Umhüllungs-

gebilde jene Mannigfaltigkeit M vollständig enthält. Dann wird die Schar zur Gruppe G_{r-q} selbst, und das Ergebnis ist trivial. Dieser Ausnahmefall tritt sicher dann nicht ein, wenn jene ∞^q ebenen Mannigfaltigkeiten M', die aus M durch Ausführung der adjungierten Gruppe von G_r hervorgehen, den ganzen Raum R_{r-1} dieser adjungierten Gruppe erfüllen, denn alsdann würde das Umhüllungsgebilde nur dann alle jene ∞^q ebenen Mannigfaltigkeiten enthalten, wenn es der ganze R_{r-1} wäre, was ausgeschlossen ist. Wir können, wenn wir dies gruppentheoretisch ausdrücken, das Ergebnis also so formulieren:

Satz 32: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine nicht invariante Untergruppe G_{r-q}, die in keiner grösseren Untergruppe der G_r enthalten ist, so giebt es ∞^q mit G_{r-q} innerhalb G_r gleichberechtigte Untergruppen. Gehört nun jede infinitesimale Transformation der G_r einer dieser Untergruppen an, so enthält jede dieser Untergruppen eine invariante Schar von infinitesimalen Transformationen, die, wenn sie linear ist, eine invariante Untergruppe darstellt.*

Wenn übrigens die M' nicht den ganzen Raum R_{r-1} erfüllen, so kann es doch vorkommen, dass ihr Umhüllungsgebilde M selbst nicht vollständig enthält, sodass auch dann G_{r-q} eine invariante Schar von infinitesimalen Transformationen enthält.

Wir kehren zur Betrachtung der integrabelen Gruppen zurück. Es gilt zunächst der

Sätze über integrabele Gruppen.

Satz 33: *Ist die erste derivierte Gruppe einer Gruppe integrabel, so ist auch die letztere Gruppe selbst integrabel.*

Die erste derivierte Gruppe der Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ kann nämlich nach ihrer Definition, vgl. Schluss des § 3 des 18. Kap., entweder die gegebene Gruppe selbst sein, und dann ist der Satz trivial. Oder aber die erste derivierte Gruppe der Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ ist nur q-gliedrig ($q < r$), sagen wir etwa die Gruppe $X_1 f \,..\, X_q f$. Diese soll nach Voraussetzung integrabel sein. Wir dürfen annehmen, dass ihre infinitesimalen Transformationen schon so ausgewählt sind, dass $X_1 f \,..\, X_\varrho f$ für $\varrho = 1, 2 \,..\, q-1$ stets eine in $X_1 f \,..\, X_{\varrho+1} f$ invariante Untergruppe darstellen. Alsdann erzeugen $X_1 f \,..\, X_{q+1} f$ eine Gruppe, da ihre Klammerausdrücke aus $X_1 f \,..\, X_q f$ allein linear ableitbar sind. Nach § 3 des 18. Kap. ist überdies $X_1 f \,..\, X_q f$ eine invariante Untergruppe der Gruppe $X_1 f \,..\, X_{q+1} f$. Ebenso bilden $X_1 f \,..\, X_{q+2} f$ eine Gruppe, in der die Gruppe $X_1 f \,..\, X_q f$ und auch die Gruppe $X_1 f \,..\, X_{q+1} f$ invariant ist u. s. f. Wir sehen also, dass die ganze Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ so beschaffen ist, dass stets $X_1 f \,..\, X_\varrho f$ für $\varrho = 1, 2 \,..\, r-1$ eine in $X_1 f \,..\, X_{\varrho+1} f$ invariante Untergruppe bilden. Die ganze Gruppe ist also integrabel.

Nun folgt sofort:

Satz 34: *Eine r-gliedrige Gruppe ist dann und nur dann integrabel, wenn ihre r^{te} derivierte Gruppe sich auf die Identität reduciert.*

Liegt nämlich zunächst eine integrabele Gruppe vor, so lassen sich ihre infinitesimalen Transformationen $X_1 f \,.\,. X_r f$ nach ihrer Definition so auswählen, dass

$$(X_i X_{i+k}) \equiv \sum_1^{i+k-1} {}_s\, c_{i,\, i+k,\, s} X_s f$$

$$(i = 1, 2 \,.\,. r-1, \quad k = 1, 2 \,.\,. r-i)$$

wird. Hier ist die erste derivierte Gruppe entweder $X_1 f \,.\,. X_{r-1} f$ selbst oder in letzterer enthalten. Die zweite derivierte Gruppe ist in $X_1 f \,.\,. X_{r-2} f$ enthalten u. s. w., schliesslich die $(r-1)^{te}$ ist $X_1 f$ selbst oder die Identität, die r^{te} daher sicher bloss die Identität.

Liegt umgekehrt eine r-gliedrige Gruppe vor, deren r^{te} derivierte Gruppe die Identität ist, so ist die $(r-1)^{te}$ derivierte Gruppe nach Satz 33 integrabel, also nach demselben Satze auch die $(r-2)^{te}$ derivierte Gruppe u. s. f., schliesslich die erste derivierte Gruppe, also auch die gegebene Gruppe selbst.

Hieraus folgt weiter:

Satz 35: *Jede Untergruppe einer integrabelen Gruppe ist ebenfalls integrabel.*

Denn bei der successiven Bildung der ersten, zweiten u. s. w. derivierten Gruppe der in Frage stehenden Untergruppe, die etwa q-gliedrig sei, wird entweder die Gliederzahl fortwährend kleiner oder nicht. Im ersteren Fall ist die q^{te} derivierte Gruppe die Identität, die Untergruppe also nach Satz 34 integrabel. Im letzteren Fall dagegen besitzt sie eine gewisse derivierte Gruppe, sagen wir $X_1 f \,.\,. X_\varrho f$ $(\varrho < q)$, die ihre eigene erste derivierte Gruppe ist. Alsdann aber leuchtet es ein, dass bei der ganzen vorgelegten Gruppe, die r-gliedrig sein möge, die r^{te} derivierte Gruppe nicht die Identität allein sein kann, da sich $X_1 f \,.\,. X_\varrho f$ bei der Klammerbildung sämtlich beständig reproducieren. Die ganze r-gliedrige Gruppe muss also nach Satz 34 nicht-integrabel sein. Dies aber widerspricht der Voraussetzung.

Wir wollen zum Schluss noch eine nützliche allgemeinere Bemerkung anfügen, die wir als unmittelbar evident hinstellen:

Transf. der Individuen einer inv. Schar.

Wenn eine Gruppe eines Raumes $(x_1 \,.\,. x_n)$ mit den Transformationen $T_a \ldots$ eine continuierliche Schar von Punkten, Curven oder anderen Mannigfaltigkeiten invariant lässt, so transformiert sie die einzelnen Individuen der Schar unter einander durch eine Gruppe von

Transformationen $S_a \dots$, die zu den Transformationen T_a in der Beziehung stehen, dass, sobald

$$T_a T_b = T_c$$

ist, auch

$$S_a S_b = S_c$$

ist. Hierbei ist es natürlich sehr gut denkbar, dass einige oder alle S sich auf die Identität reducieren, obgleich die ursprünglichen zugehörigen T wirkliche Transformationen des Raumes $(x_1 \dots x_n)$ darstellen. Denn sobald eine Transformation T alle Individuen der Schar einzeln in Ruhe lässt, muss die zugehörige Transformation S die Identität sein.

Die neue Gruppe $S_a \dots$ ist, wenn wir eine früher (z. B. in § 4 des 5. Kap.) eingeführte Redeweise benutzen, isomorph auf die Gruppe $T_a \dots$ bezogen. Also sagen wir:

Satz 36: *Lässt eine Gruppe von Transformationen $T_a \dots$ eines Raumes $(x_1 \dots x_n)$ eine Schar von ∞^q Mannigfaltigkeiten invariant, die von q Parametern $y_1 \dots y_q$ abhängen, so ist die Gruppe $S_a \dots$ der Parameter $y_1 \dots y_q$ isomorph auf die ursprüngliche Gruppe bezogen, d. h. mit*

$$T_a T_b = T_c$$

ist stets auch

$$S_a S_b = S_c.$$

Wir haben zum Schluss des § 4 des 5. Kap. ein Beispiel hierfür gegeben. Ein anderes Beispiel ist dieses:

Beispiel: Die allgemeine Gruppe aller Bewegungen des Raumes (x, y, z): Beispiel.

$$p \quad q \quad r \quad zq - yr \quad xr - zp \quad yp - xq$$

bleibt der imaginäre Kugelkreis, der Schnittkreis der unendlich fernen Ebene mit der Nullkugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

invariant. Die Punkte dieses Kreises werden also unter einander transformiert und zwar vermöge einer isomorphen Gruppe. Wir können als Coordinate jener ∞^1 Punkte etwa $\mathfrak{x} = \frac{x}{z}$ benutzen. Alsdann lauten die betreffenden infinitesimalen Transformationen für diese Punkte, für die x, y, z unendlich und $\mathfrak{x}^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 + 1 = 0$ ist, so:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad i\mathfrak{x}\sqrt{1+\mathfrak{x}^2}\mathfrak{p}, \quad -(1+\mathfrak{x}^2)\mathfrak{p}, \quad i\sqrt{1+\mathfrak{x}^2}\mathfrak{p}.$$

Die Klammerausdrücke dieser unter einander drücken sich genau so linear durch diese sechs infinitesimalen Transformationen aus, wie die Klammerausdrücke bei der obigen Gruppe durch die obigen infinitesimalen Transformationen.

Kapitel 20.

Untersuchungen über die Zusammensetzung der r-gliedrigen Gruppen.

Bei allen Anwendungen der Theorie der endlichen continuierlichen Gruppen auf die Theorie der Differentialgleichungen und verwandte Gebiete spielt die *Zusammensetzung* der auftretenden *Transformations*gruppen eine besonders wichtige Rolle, ebenso wie in *Galois'* Theorie der algebraischen Gleichungen die Zusammensetzung der zugehörigen *Substitutions*gruppen. Es besitzen daher alle Untersuchungen über die Zusammensetzung der endlichen Transformationsgruppen eine besondere Bedeutung. Wir geben in diesem Kapitel eine knappe Übersicht über die einfachsten und wichtigsten Ergebnisse auf diesem Gebiete. Dabei werden wir vielfach mit räumlichen Anschauungen operieren, ebenso wie es in den früheren Untersuchungen über die adjungierte Gruppe geschah.

Wir beginnen mit der Bestimmung aller zweigliedrigen Untergruppen, denen eine gegebene infinitesimale Transformation einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe angehört. Diese Untersuchung führt zur Aufstellung einer gewissen algebraischen Gleichung r^{ten} Grades, die sehr wichtig ist. Hieran schliesst sich die Bestimmung aller dreigliedrigen Untergruppen einer gegebenen Gruppe, indem gezeigt wird, dass jede infinitesimale Transformation einer mehr als dreigliedrigen Gruppe in einer dreigliedrigen Untergruppe enthalten ist.

Darauf kommen wir zur Bestimmung der Zusammensetzungen aller zweigliedrigen, aller dreigliedrigen und aller viergliedrigen Gruppen. Wir haben früher erkannt, dass dies ein rein algebraisches Problem ist, denn alle Zusammensetzungen von r-gliedrigen Gruppen werden bestimmt durch Constanten c_{ikl} $(i, k, l = 1, 2 \ldots r)$, die den Bedingungen

$$c_{ikl} + c_{kil} = 0,$$

$$\sum_{1}^{r} {}_{s} \left(c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt} \right) = 0$$

$$(i, k, l, t = 1, 2 \ldots r)$$

genügen — infolge des dritten Fundamentalsatzes, von dem wir aber nur die erste leichter zu beweisende Hälfte brauchen werden. (Vgl. § 4 des 15. Kap.) Dies algebraische Problem wird nun für $r = 2, 3, 4$ vollständig erledigt werden.

Schliesslich werden noch einige allgemeinere Resultate abgeleitet oder zum Teil nur angegeben*).

§ 1. Zwei- und dreigliedrige Untergruppen gegebener Gruppen.

Indem wir versuchen wollen, alle zweigliedrigen Untergruppen einer gegebenen r-gliedrigen Gruppe $X_1f \dots X_rf$ zu bestimmen, denen eine vorgelegte infinitesimale Transformation dieser Gruppe angehört, finden wir es zunächst zweckmässig, uns die gegebene r-gliedrige Gruppe auf eine solche Form $X_1f \dots X_rf$ gebracht zu denken, dass die vorgelegte infinitesimale Transformation der Gruppe gerade X_1f ist. Wir setzen dabei voraus, dass die in den *charakteristischen Relationen* Char. Relat.

$$(X_iX_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r)$$

auftretenden Constanten c_{iks}, die wir *charakteristische Constanten* oder Char. Const. *Zusammensetzungscoefficienten* nennen, gegeben seien.

Unser Problem soll also dieses sein: Man soll eine infinitesimale Problem. Transformation

$$\alpha_1 X_1 f + \cdots + \alpha_r X_r f$$

($\alpha_i =$ Const.) der Gruppe derart auswählen, dass sie mit X_1f eine zweigliedrige Gruppe erzeugt. Natürlich darf α_1 ohne weiteres gleich Null gesetzt werden, da die gesuchte Gruppe X_1f selbst enthält.

---

*) Lie's Untersuchungen über Transformationsgruppen wurden ursprünglich dadurch veranlasst, dass er (im Jahre 1872) erkannte, dass es für die Theorie der Differentialgleichungen ausserordentlich wichtig ist, den Begriff: Zusammensetzung einer discontinuierlichen Gruppe auf continuierliche Gruppen zu übertragen. Dies führte ihn zu den Fundamentalsätzen. In seinen älteren Untersuchungen trat daher der Begriff Zusammensetzung stark hervor. In den Jahren 1878—84 jedoch versuchte er aus *pädagogischen* Rücksichten den Begriff: adjungierte Gruppe, soweit möglich, zu vermeiden oder wenigstens nur rechnerisch zu verwerten, wenn er auch seine Entdeckungen über die Zusammensetzung kurz angab. Explicite führte er den Begriff: adjungierte Gruppe zuerst 1884 ein (siehe Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania Nr. 15, S. 3). Die Kapitel 18, 19, 20 dieses Werkes enthalten einige unter seinen wichtigsten Ergebnissen, die aus der Zeit vor 1884 herrühren. Eine vollständige Darstellung dieser seiner Untersuchungen findet sich im dritten Abschnitt seiner *Theorie der Transformationsgruppen*, bearb. unter Mitw. von Engel.

Es handelt sich somit nach dem Hauptsatze darum, die Constanten $\alpha_2 \ldots \alpha_r$ in allgemeinster Weise, ohne dass sie sämtlich Null werden, so zu bestimmen, dass der Klammerausdruck

$$(X_1,\ \alpha_2 X_2 f + \cdots + \alpha_r X_r f) \equiv \sum_2^r {}^k \sum_1^r {}^s \alpha_k c_{1ks} X_s f$$

die Form annimmt:

$$c X_1 f + \varrho(\alpha_2 X_2 f + \cdots + \alpha_r X_r f),$$

in der c und ϱ vorläufig noch unbekannte Constanten bedeuten. Dies giebt, da $X_1 f \ldots X_r f$ von einander unabhängig sind, die r Bedingungen:

$$(1) \qquad \sum_2^r {}^k \alpha_k c_{1k1} = c, \qquad \sum_2^r {}^k \alpha_k c_{1kj} = \varrho \alpha_j \qquad (j = 2 \ldots r),$$

von denen wir die $r - 1$ letzten ausführlich schreiben:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (c_{122} - \varrho)\alpha_2 + c_{132}\alpha_3 + \cdots + c_{1r2}\alpha_r = 0, \\ c_{123}\alpha_2 + (c_{133} - \varrho)\alpha_3 + \cdots + c_{1r3}\alpha_r = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{12r}\alpha_2 + c_{13r}\alpha_3 + \cdots + (c_{1rr} - \varrho)\alpha_r = 0. \end{array} \right.$$

Diese $r - 1$ Gleichungen sind linear und homogen in $\alpha_2 \ldots \alpha_r$. Hat man aus ihnen $\alpha_2 \ldots \alpha_r$ bestimmt, so giebt die erste Gleichung (1) den Wert von c, der für uns vorerst keine besondere Bedeutung hat. Es kommt also darauf an, aus den $r - 1$ Gleichungen (2) $\alpha_2 \ldots \alpha_r$ so zu bestimmen, dass sie nicht sämtlich Null werden*). Diese $r - 1$ Gleichungen lassen sich aber nur dann erfüllen, wenn ihre Determinante verschwindet:

$D(\varrho) = 0.$

$$(3) \qquad D(\varrho) \equiv \left| \begin{array}{cccc} c_{122} - \varrho & c_{132} & \cdot\ \cdot & c_{1r2} \\ c_{123} & c_{133} - \varrho & \cdot\ \cdot & c_{1r3} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{12r} & c_{13r} & \cdot\ \cdot & c_{1rr} - \varrho \end{array} \right| = 0.$$

Die Gleichung $D(\varrho) = 0$ ist stets von $(r - 1)^{\text{tem}}$ Grade in ϱ. Der Leser wird sich erinnern, dass wir einer ähnlichen Determinante schon öfters begegnet sind. Sie spielt ja überhaupt in vielen Teilen der Mathematik eine wichtige Rolle.

Die Gleichung $D(\varrho) = 0$ besitzt mindestens eine Wurzel ϱ. Für diese lassen sich die Gleichungen (2) durch nicht sämtlich verschwin-

---

*) Die Entwickelungen des Textes finden sich schon in Lie's erster ausführlicher Arbeit über Transformationsgruppen, Archiv for Math. Bd. 1, S. 174 und 193, Christiania 1876. Viel weitergehende Sätze finden sich im dritten Bande derselben Zeitschrift, Christiania 1878.

dende Werte von $\alpha_2 \, . \, . \, \alpha_r$ erfüllen. Dass übrigens in (2) nur die Verhältnisse der α eine Rolle spielen, ist von vornherein klar. Wir haben also gefunden:

Jede inf. Transf. in zweigl. Untergr.

Satz 1: *Jede infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \, . \, . \, X_r f$ gehört mindestens einer zweigliedrigen Untergruppe an.*

Begrifflich können wir diesen Satz auch so ableiten: Interpretieren wir die infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe in bekannter Weise als Punkte $(e_1 : e_2 : \cdots : e_r)$ des Raumes R_{r-1} der adjungierten Gruppe $E_1 f \, . \, . \, E_r f$ mit den homogenen Coordinaten $e_1 \, . \, . \, e_r$, so wird eine zweigliedrige Untergruppe durch eine Gerade dieses Raumes dargestellt, die invariant bleibt bei denjenigen infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k E_k f$ der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkte $(e_1 : \cdot \cdot : e_r)$ auf der Geraden liegen. Wenn wir aber $E_1 f$ ausführen, so bleibt der $X_1 f$ darstellende Punkt in Ruhe, die ∞^{r-2} Geraden durch diesen Punkt werden also vermöge $E_1 f$ unter sich vertauscht und zwar, wie bei den Betrachtungen des § 4 des vorigen Kapitels genügend betont wurde, durch eine infinitesimale *projective* Transformation. Nach Theorem 34 desselben Paragraphen bleibt dabei wenigstens eine Gerade in Ruhe*). Ist dies die Gerade, die den Bildpunkt von $X_1 f$ mit dem von $\Sigma \alpha_k X_k f$ verbindet, so ist also nach Satz 3, § 3 des 18. Kap. der Klammerausdruck $(X_1, \, \Sigma \alpha_k X_k)$ aus $X_1 f$ und $\Sigma \alpha_k X_k f$ linear ableitbar, d. h. die Gerade stellt eine zweigliedrige Untergruppe $X_1 f, \; \Sigma \alpha_k X_k f$ dar.

Ehe wir in der allgemeinen Theorie fortfahren, wollen wir die *Bedeutung vielfacher Wurzeln* ϱ der Gleichung $D(\varrho) = 0$ für das vorliegende Problem an einem Beispiele erläutern, das uns schon von früher her (aus § 3 des 18. Kap.) bekannt ist.

---

*) Schon bei Lie's ersten Untersuchungen über Transformationsgruppen war die Auffassung der Schar von infinitesimalen Transformationen:

$$e_1 X_1 f + \cdot \cdot + e_r X_r f$$

einer r-gliedrigen Gruppe als einer $(r - 1)$fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit, die durch die adjungierte Gruppe transformiert wird, *das zu Grunde liegende Princip.* In seinen älteren Publicationen im Archiv for Math. (1876—1879) tritt diese Auffassung *deutlich,* wenn auch nicht viel hervor; in den Math. Ann. Bd. 16 ersetzte aber Lie diese begrifflichen Betrachtungen durch die entsprechenden analytischen Rechnungen. In seinen verschiedenen Publicationen aus dem Jahre 1884 (Archiv for Math. und Math. Ann., Bd. 25) lenkte er, sogar in energischen Ausdrücken, die Aufmerksamkeit auf die zu Grunde liegenden begrifflichen Betrachtungen, die in seinen neueren Arbeiten unverhüllt in ihrer ursprünglichen Gestalt hervortreten.

Beispiel.

Beispiel: Vorgelegt sei die Gruppe

$$p \quad q \quad yq \quad xp,$$

deren infinitesimale Transformationen wir als Punkte eines gewöhnlichen Raumes R_3 gedeutet haben. Wir bestimmten schon früher alle zweigliedrigen Untergruppen, die wir in Fig. 48 durch Geraden markierten. Setzen wir etwa

$$X_1 f \equiv p + yq,$$

suchen wir also alle zweigliedrigen Untergruppen, die $p + yq$ enthalten, so haben wir

$$X_2 f \equiv \alpha_2 q + \alpha_3 y q + \alpha_4 x p$$

so zu bestimmen, dass

$$(X_1 X_2) = c X_1 f + \varrho X_2 f \equiv c(p + yq) + \varrho(\alpha_2 q + \alpha_3 yq + \alpha_4 xp)$$

wird. Es ist aber hier:

$$(X_1 X_2) \equiv \alpha_4 p - \alpha_2 q \equiv \alpha_4(p + yq) - \alpha_2 q - \alpha_4 yq,$$

sodass zu fordern ist:

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= c, \\ (1 + \varrho)\alpha_2 \qquad\qquad &= 0, \\ \varrho\alpha_3 + \alpha_4 &= 0, \\ \varrho\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bestimmt nur c und kommt nicht in betracht. Die drei letzten verlangen, dass

$$\begin{vmatrix} 1 + \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 1 \\ 0 & 0 & \varrho \end{vmatrix} = 0$$

sei. $\varrho = -1$ ist einfache, $\varrho = 0$ ist Doppelwurzel. Doch für keine der Wurzeln verschwinden auch die zweireihigen Unterdeterminanten sämtlich. Daher bestimmen sich die Verhältnisse von α_2, α_3, α_4 jedesmal vollständig. Für $\varrho = -1$ kommt $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = 0$, also die Untergruppe

$$p + yq \quad q,$$

für $\varrho = 0$ kommt $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$, also die Untergruppe

$$p + yq \quad yq.$$

Diese Ergebnisse waren nach Fig. 48 vorauszusehen.

Benutzen wir ein anderes $X_1 f$:

$$X_1 f \equiv yq,$$

so haben wir

$$X_2 f \equiv \alpha_2 p + \alpha_3 q + \alpha_4 xp$$

so zu bestimmen, dass

$$(X_1 X_2) = c X_1 f + \varrho X_2 f$$

wird. Dies liefert ausser $c = 0$:

$$\begin{aligned} \varrho \alpha_2 \qquad\qquad &= 0, \\ (\varrho + 1)\alpha_3 \qquad &= 0, \\ \varrho \alpha_4 &= 0, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{vmatrix} \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \varrho + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{vmatrix} = 0$$

sein muss. Wieder ist $\varrho = -1$ einfache, $\varrho = 0$ Doppelwurzel. Für letztere aber verschwinden auch alle zweireihigen Unterdeterminanten. Während daher die einfache Wurzel $\varrho = -1$ nur die eine Untergruppe

$$yq \quad q$$

liefert, gehören zu $\varrho = 0$ ∞^1 zweigliedrige Untergruppen, weil sich die Gleichungen zur Bestimmung von α_2, α_3, α_4 für $\varrho = 0$ auf nur eine reducieren. Sie geben $\alpha_3 = 0$, also die ∞^1 Gruppen

$$yq \quad \lambda p + \mu xp.$$

Sie werden durch alle Geraden eines Strahlenbüschels dargestellt. Auch diese Ergebnisse sind aus Fig. 48 von vornherein ersichtlich.

Setzen wir drittens

$$X_1 f \equiv p,$$

so ergeben sich für α_2, α_3, α_4 in

$$X_2 f \equiv \alpha_2 q + \alpha_3 yq + \alpha_4 xp$$

die Bedingungen:

$$\varrho \alpha_2 = 0, \quad \varrho \alpha_3 = 0, \quad \varrho \alpha_4 = 0,$$

sodass $\varrho = 0$ dreifache Wurzel von $D(\varrho) = 0$ ist, für die auch alle Elemente der Determinante verschwinden. Demnach gehen ∞^2 Untergruppen hervor, nämlich alle:

$$p \quad \lambda q + \mu yq + \nu xp.$$

(Vgl. Fig. 48). —

Wir kehren zur allgemeinen Betrachtung zurück. Die Gleichung $D(\varrho) = 0$ ist in ϱ vom $(r-1)^{\text{ten}}$ Gerade. Ist ϱ eine q-fache Wurzel der Gleichung, so können für sie bekanntlich alle Unterdeterminanten von $D(\varrho)$ von höchstens $(r-1)-(q-1)$ Reihen verschwinden, brauchen

q-fache Wurzel von $D(\varrho) = 0$.

es aber nicht zu thun. Verschwinden etwa alle $(p+1)$-reihigen Determinanten, nicht aber alle p-reihigen, sodass

$$p + 1 \geqq r - q$$

ist, so reducieren sich die Gleichungen (2) für die fragliche q-fache Wurzel auf gerade p von einander unabhängige. Sie bestimmen demnach von den $r - 2$ Verhältnissen der $\alpha_2 \ldots \alpha_r$ gerade p, während die übrigen $r - 2 - p$ willkürlich bleiben. Also ergeben sich in diesem Falle ∞^{r-p-2} zweigliedrige Untergruppen

$$X_1 f, \quad \alpha_2 X_2 f + \cdots + \alpha_r X_r f.$$

Dieselben bilden eine lineare Schar insofern, als der allgemeine Ausdruck $\alpha_2 X_2 f + \cdots + \alpha_r X_r f$ linear aus $r - p - 1$ von einander unabhängigen ableitbar ist.

Configuration aller zweigliedr. Untergr. mit derselben inf. Transf.

Wir wollen die Configuration *aller* zweigliedrigen Untergruppen, die eine gegebene infinitesimale Transformation $X_1 f$ enthalten, nur flüchtig berühren und benutzen dazu ihre Deutung als Geraden im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$, die durch den Punkt hindurchgehen, der $X_1 f$ darstellt. Sind

$$\varrho_1, \quad \varrho_2 \quad \ldots \quad \varrho_\pi \quad (\pi \leqq r - 1)$$

alle von einander verschiedenen Wurzeln von $D(\varrho) = 0$ und ist allgemein ϱ_j gerade q_j-fache Wurzel, sodass

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_\pi = r - 1$$

ist, verschwinden ferner für ϱ_j alle $(p_j + 1)$-reihigen Unterdeterminanten von $D(\varrho)$, nicht aber alle p_j-reihigen, sodass also

$$p_j + 1 \geqq r - q_j \quad (j = 1, 2 \ldots \pi)$$

ist, so bilden die betreffenden Geraden π ebene Mannigfaltigkeiten $M^1 \ldots M^\pi$ durch den Punkt $X_1 f$. Und zwar ist M^j gerade $(r - p_j - 1)$-fach ausgedehnt. Je zwei dieser Mannigfaltigkeiten haben ausser $X_1 f$ keinen Punkt gemein, überhaupt haben diese Mannigfaltigkeiten so allgemeine Lage gegen einander, als es die Gemeinsamkeit des Punktes $X_1 f$ zulässt. Wenn z. B. M^1, M^2, M^3 Geraden sind, so liegen diese nicht in einer Ebene, denn sonst würden alle Geraden des Büschels zweigliedrige Untergruppen darstellen, also die Ebene eine der M darstellen. Es ist dies eine unmittelbare Folge aus wohlbekannten Sätzen über das Verhalten der Punkte und ebenen Mannigfaltigkeiten eines Raumes $(x_1 \ldots x_n)$ bei einer infinitesimalen projectiven (bez. linearen homogenen) Transformation.

Z. B. bei einer viergliedrigen Gruppe G_4 haben wir die Deutung in einem Raume R_3 vorzunehmen. Die durch einen Punkt des R_3 gehenden Geraden, die zweigliedrige Untergruppen darstellen, können eine der folgenden sechs Configurationen bilden:

Erstens: drei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Zweitens: zwei Geraden.

Drittens: eine Gerade.

Viertens: Alle Geraden eines Büschels und eine einzelne Gerade.
Fünftens: Alle Geraden eines Büschels.
Sechstens: Alle Geraden des Bündels durch den Punkt.

Configuration aller zweigl. Untergr.

Betrachten wir die Gesamtheit *aller* zweigliedrigen Untergruppen der gegebenen Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ und deuten wir sie als Geraden im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe $E_1 f \,.\,. E_r f$, so geben diese Geraden in dem R_{r-1} ein Geradensystem von der Art, dass durch jeden Punkt nach Satz 1 mindestens eine der Geraden geht. *Die Geraden, die zweigliedrige Untergruppen darstellen, erfüllen also den ganzen Raum.* Allgemein gehen durch jeden Punkt lineare Mannigfaltigkeiten von Geraden. In einem Raume von drei Dimensionen — d. h. bei einer viergliedrigen Gruppe — ist das Gebilde also entweder ein *Strahlensystem* oder ein *linearer Liniencomplex* oder ein Aggregat solcher, ausser denen noch *einzelne Strahlenbüschel* auftreten können, oder endlich es besteht aus *allen Geraden des Raumes.*

Entsprechend verhält es sich in höheren Räumen, bei mehr als viergliedrigen Gruppen.

Beispiel: Bei der öfters besprochenen Gruppe $p \quad q \quad yq \quad xp$ bilden die Geraden, die Untergruppen im Raume R_3 der adjungierten Gruppe darstellen, erstens das Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse, das aus allen Geraden besteht, die zwei Geraden schneiden, zweitens das Bündel aller Strahlen durch den Bildpunkt von p, drittens das Bündel aller Strahlen durch den Bildpunkt von q, viertens eine Ebene, deren sämtliche Geraden Untergruppen darstellen. Siehe § 3 des 18. Kap., Fig. 48.

Allgemeinere Fassung des Problems.

Das Problem, das wir uns zu Anfang stellten, können wir analytisch etwas allgemeiner fassen, indem wir die gegebene infinitesimale Transformation mit $e_1 X_1 f + \cdot \cdot + e_r X_r f$ bezeichnen. Wir suchen also jetzt alle zweigliedrigen Untergruppen, denen diese gegebene infinitesimale Transformation:

$$e_1 X_1 f + \cdot \cdot + e_r X_r f$$

angehört.

Alsdann handelt es sich darum, die Coefficienten $\varepsilon_1 \,.\,. \varepsilon_r$ in

$$\varepsilon_1 X_1 f + \cdot \cdot + \varepsilon_r X_r f$$

so zu bestimmen, dass der Klammerausdruck

$$\left(\sum_1^r {}^i e_i X_i f,\ \sum_1^r {}^k \varepsilon_k X_k f \right) = \sum_{s,\,i,\,k}^{1\,.\,r} e_i \varepsilon_k c_{iks} X_s f \tag{4}$$

die Form

$$\sigma \sum_1^r {}^s e_s X_s f + \varrho \sum_1^r {}^s \varepsilon_s X_s f$$

annimmt.

Wenn nun ϱ nicht Null ist, so können wir statt der infinitesimalen Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ auch die infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f + \frac{\sigma}{\varrho} \Sigma e_k X_k f$ suchen, die ja auch der gewünschten Gruppe angehört.

Unsere Forderung lässt sich also in diesem Falle specialisieren: $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ sollen so bestimmt werden, dass

$$\left(\sum_1^r {}^i e_i X_i f, \ \sum_1^r {}^k \varepsilon_k X_k f \right) = \varrho \sum_1^r {}^s \varepsilon_s X_s f \tag{5}$$

wird. Andernfalls dagegen fordern wir:

$$\left(\sum_1^r {}^i e_i X_i f, \ \sum_1^r {}^k \varepsilon_k X_k f \right) = \sigma \sum_1^r {}^s e_s X_s f. \tag{6}$$

Unter beide Probleme ordnet sich drittens als Specialfall das folgende unter:

$$\left(\sum_1^r {}^i e_i X_i f, \ \sum_1^r {}^k \varepsilon_k X_k f \right) = 0. \tag{7}$$

Erstes Problem.

Betrachten wir das *erste* Problem. Man kann es offenbar auch so aussprechen: Man sucht alle Punkte $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ des R_{r-1}, die invariant bleiben bei derjenigen infinitesimalen Transformation der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkt der Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ ist. In diesem Probleme lauten nach (4) die Bedingungsgleichungen, denen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ zu unterwerfen sind:

$$\sum_1^r {}^i \sum {}^k e_i \varepsilon_k c_{iks} = \varrho \varepsilon_s \quad (s = 1, 2 \ldots r)$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\varepsilon_1 \sum_1^r {}^i e_i c_{i1s} + \varepsilon_2 \sum_1^r {}^i e_i c_{i2s} + \cdots + \varepsilon_r \sum_1^r {}^i e_i c_{irs} = \varrho \varepsilon_s \tag{8}$$
$$(s = 1, 2 \ldots r).$$

Es sind dies r in $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ lineare homogene Gleichungen. Also muss ihre Determinante gleich Null gewählt werden:

$$(9)\quad \Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} \sum_1^r {}^i e_i c_{i11} - \varrho & \sum_1^r {}^i e_i c_{i21} & \cdot \sum_1^r {}^i e_i c_{ir1} \\ \sum_1^r {}^i e_i c_{i12} & \sum_1^r {}^i e_i c_{i22} - \varrho & \cdot\cdot \sum_1^r {}^i e_i c_{ir2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_1^r {}^i e_i c_{i1r} & \sum_1^r {}^i e_i c_{i2r} & \cdot\cdot \sum_1^r {}^i e_i c_{irr} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dies eine Gleichung von stets r^{tem} Gerade für ϱ. Da nun die Forderung (5) offenbar durch

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad .\,.\; \varepsilon_r = e_r, \quad \varrho = 0$$

erfüllt wird, so ist es sicher, dass die Gleichung (9) die Wurzel $\varrho = 0$ besitzt. Es ist also die Determinante

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \sum_1^r {}^i e_i c_{iks} \\ k,\ s = 1,\ 2\,..\,r \end{vmatrix} \equiv 0$$

für alle Werte von $e_1 \,..\, e_r$. Man kann dies übrigens auch nachträglich verificieren, indem man die Relationen benutzt, die nach dem dritten Fundamentalsatz zwischen den Constanten c_{iks} bestehen.

Die linke Seite der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$ hat also den Factor ϱ. Scheiden wir diesen einen Factor, der trivial ist, ab, so verbleibt eine Gleichung von gerade $(r-1)^{\text{tem}}$ Grade für ϱ, die allerdings noch die Wurzel $\varrho = 0$ besitzen kann. Zu jeder Wurzel ϱ gehört mindestens ein Wertsystem der Verhältnisse von $\alpha_1 \,..\, \alpha_r$, das die Gleichungen (8) befriedigt. Entwickelt man diese algebraische Gleichung $(r-1)^{\text{ten}}$ Gerades nach den Potenzen von ϱ, so werden die Coefficienten ganze Functionen der Grössen $e_1 \,..\, e_r$. Die Anzahl der verschiedenen Wurzeln sowie das Verhalten der zur Determinante $\Delta(\varrho)$ gehörigen Unterdeterminanten für die einzelnen Wurzeln variiert somit im allgemeinen mit den Grössen $e_1 \,..\, e_r$. Wählt man ein allgemeines Wertsystem $e_1 \,..\, e_r$, so wird eine gewisse Anzahl von einander verschiedener Wurzeln ϱ auftreten. Wenn aber alsdann $e_1 \,..\, e_r$ gewisse specielle Gleichungensysteme erfüllen, so kann die Anzahl der verschiedenen Wurzeln ϱ geringer werden. Da nun die Zahl und Art der verschiedenen Wurzeln für jedes Wertsystem $(e_1 \,..\, e_r)$ eine ganz bestimmte begriffliche Bedeutung besitzt, indem sie nach (5) die bei $e_1 E_1 f + \cdots + e_r E_r f$ invarianten Punkte $(\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r)$ des R_{r-1} liefert, so leuchtet ein, dass

jedes der erwähnten Gleichungensysteme, die *specielle* Wertsysteme $(e_1 \,..\, e_r)$ definieren, bei der adjungierten Gruppe invariant bleibt*).

Zweites Problem.

Wenden wir uns jetzt zu dem durch (6) ausgedrückten *zweiten* Problem. Hier haben wir $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ nach (4) den Bedingungen zu unterwerfen:

$$\sum_1^r {}_i \sum {}_k e_i \varepsilon_k c_{iks} = \sigma e_s \quad (s = 1, 2 \,..\, r). \tag{11}$$

Es sind dies r lineare, aber *nicht* homogene Gleichungen für $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$. Ihre Determinante ist nach (10) sicher Null. Hieraus folgt, dass es nicht immer Lösungen $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ zu geben braucht. Vielmehr wird es vorkommen können, dass zu einem gegebenen Wertsystem $e_1 \,..\, e_r$ kein Wertsystem $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ existiert, das (11) erfüllte ausser dem trivialen System $\varepsilon_i = e_i$ für $\sigma = 0$. Man könnte sich geradezu die Aufgabe stellen, die Wertsysteme $e_1 \,..\, e_r$ zu bestimmen, welche Lösungen $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ zulassen. Wenn aber ein Lösungensystem $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ existiert, so erfüllen offenbar auch $\varepsilon_1 + \lambda e_1, \,..\, \varepsilon_r + \lambda e_r$ die Forderungen (11), da die Determinante identisch Null ist. Dies ist aber auch begrifflich einleuchtend. Wir kommen in § 6 auf dieses Problem zurück.

Beispiel.

Beispiel: Bei der Gruppe

$$p \quad xp \quad x^2p$$

lautet (5):

$$\begin{cases} (e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)p + 2(e_1\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_1)xp + (e_2\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_2)x^2p \\ \qquad = \varrho(\varepsilon_1 p + \varepsilon_2 xp + \varepsilon_3 x^2 p). \end{cases} \tag{5'}$$

Wir erhalten also als Gleichungensystem (8):

$$\begin{cases} e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1 = \varrho\varepsilon_1, \\ 2e_1\varepsilon_3 - 2e_3\varepsilon_1 = \varrho\varepsilon_2, \\ e_2\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_2 = \varrho\varepsilon_3, \end{cases} \tag{8'}$$

daher als Gleichung (9):

---

*) Schon in der ersten kurzen Arbeit (Verh. d. Ges. d. Wiss. zu Christiania 1884, Nr. 15, S. 1—4), in der Lie explicite den Begriff und die Bezeichnung: *adjungierte Gruppe* einführte, machte er ausdrücklich aufmerksam auf die Wichtigkeit der bei der adjungierten Gruppe invarianten Mannigfaltigkeiten. In den Math. Ann. Bd. 25, S. 149—151, gab er eine hervorragend wichtige Anwendung dieser Gleichungensysteme, deren Bestimmung seine allgemeinen Theorien leisten.

$$(9') \qquad \begin{vmatrix} -e_2-\varrho & e_1 & 0 \\ -2e_3 & -\varrho & 2e_1 \\ 0 & -e_3 & e_2-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

oder ausmultipliciert:

$$\varrho[\varrho^2 + 4e_1e_3 - e_2^2] = 0.$$

ϱ tritt, wie es sein muss, als Factor heraus. Ausserdem ergeben sich zwei im allgemeinen verschiedene Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2:

$$\left.\begin{matrix}\varrho_1\\ \varrho_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3}.$$

Nur wenn $e_1p + e_2xp + e_3x^2p$ so beschaffen ist, dass $e_1 + e_2x + e_3x^2$ ein vollständiges Quadrat ist, ergiebt sich die Doppelwurzel $\varrho = 0$, für die aber nicht alle zweireihigen Unterdeterminanten von (9') Null sind. Bei der Deutung in der Ebene der adjungierten Gruppe, die wir in einem Beispiel in § 3 des 18. Kap. besprachen, tritt bekanntlich ein gewisser Kegelschnitt auf (vgl. die damalige Fig. 45). Es sind nun die gesuchten infinitesimalen Transformationen dargestellt durch die beiden Berührpunkte $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ der vom Punkte (e_1, e_2, e_3) ausgehenden Tangenten des Kegelschnittes. Sie fallen zusammen und zwar mit (e_1, e_2, e_3) selbst, wenn letzterer Punkt auf dem Kegelschnitt liegt. Im letzteren Fall ist die Lösung trivial.

Das zweite Problem wird in unserem Beispiele dargestellt durch die Forderung:

$$(6') \qquad \begin{cases}(e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1)p + 2(e_1\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_1)xp + (e_2\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_2)x^2p \\ \qquad\qquad = \sigma(e_1p + e_2xp + e_3x^2p).\end{cases}$$

Diese giebt das Gleichungensystem:

$$(11') \qquad \begin{cases} e_1\varepsilon_2 - e_2\varepsilon_1 = \sigma e_1, \\ 2e_1\varepsilon_3 - 2e_3\varepsilon_1 = \sigma e_2, \\ e_2\varepsilon_3 - e_3\varepsilon_2 = \sigma e_3. \end{cases}$$

Da die Determinante der linken Seiten hinsichtlich ε_1, ε_2, ε_3 identisch verschwindet, so lassen sich diese Forderungen nur dann erfüllen, wenn eine der Gleichungen bloss eine Folge der beiden andern ist. Multiplicieren wir sie bez. mit $2e_3$, $-e_2$, $2e_1$ und addieren sie, so kommt links Null. Also lassen sie sich, da $\sigma \neq 0$ sein soll, dann und nur dann erfüllen, wenn e_1, e_2, e_3 der Bedingung genügen:

$$e_2^2 - 4e_1e_3 = 0.$$

Demnach muss diese Gleichung eine bei der adjungierten Gruppe in-

variante Curve darstellen. In der That ist sie die Gleichung des erwähnten invarianten Kegelschnittes.

Drittes Problem.

Das *dritte,* specielle Problem (7) endlich, in dem alle mit $\Sigma e_k X_k f$ vertauschbaren infinitesimalen Transformationen gesucht werden, führt zu den r Forderungen:

$$(12) \qquad \sum_1^r{}_i \sum{}_k e_i \varepsilon_k c_{iks} = 0 \quad (s = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Da die Zusammensetzungscoefficienten die Relationen

$$c_{iks} + c_{kis} = 0$$

erfüllen, so können die Gleichungen auch folgendermassen geschrieben werden:

$$\sum_{i,\,k,\;i \neq k}^{1\,.\,.\,r} c_{iks}(e_i \varepsilon_k - e_k \varepsilon_i) = 0.$$

Dabei leuchtet ein, dass die Grössen

$$e_i \varepsilon_k - e_k \varepsilon_i$$

als Liniencoordinaten im Raume mit den homogenen Punktcoordinaten $e_1 \,.\,.\, e_r$ aufgefasst werden können.

Beispiel.

Beispiel: Bei der Gruppe p, xp, x^2p haben wir als Forderungen (12):

$$(12') \qquad \begin{cases} e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1 = 0, \\ 2e_1 \varepsilon_3 - 2e_3 \varepsilon_1 = 0, \\ e_2 \varepsilon_3 - e_3 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Die Determinante ist hier:

$$(10') \qquad \begin{vmatrix} -e_2 & e_1 & 0 \\ -2e_3 & 0 & 2e_1 \\ 0 & -e_3 & e_2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Aus (12′) folgt sofort für ein allgemeines Wertsystem e_1, e_2, e_3, dass ε_1, ε_2, ε_3 proportional e_1, e_2, e_3 sind. Das ist aber ein triviales System. Setzen wir alle zweireihigen Unterdeterminanten von (10′) gleich Null, so kommen die Forderungen $e_1 = e_2 = e_3 = 0$. Dies aber ist eine ausgeschlossene Annahme. Die betrachtete Gruppe enthält also kein Paar mit einander vertauschbarer infinitesimalen Transformationen. Dasselbe gilt von jeder Gruppe mit gleicher Zusammensetzung.

Zum Schluss des Paragraphen wollen wir noch einen Satz beweisen, der dem Satze 1 analog ist. Wir werden nämlich zeigen, dass

jede zweigliedrige Untergruppe einer Gruppe in einer dreigliedrigen Untergruppe enthalten ist.

Zu diesem Zweck formulieren wir einen ausserordentlich wichtigen, wenn auch naheliegenden Satz, den wir schon oben bei Gelegenheit der Zerfällung des Problems in einzelne bewiesen haben, und den wir früher hier und da ableiteten und benutzten:

Satz über zweigl. Gruppen.

Satz 2: *Jede zweigliedrige Gruppe lässt sich bei passender Auswahl ihrer infinitesimalen Transformationen* $X_1 f$, $X_2 f$ *auf eine solche Form bringen, dass entweder*

$$(X_1 X_2) \equiv X_1 f$$

oder aber

$$(X_1 X_2) \equiv 0$$

wird *).

Von diesem Satz machen wir insofern augenblicklich Gebrauch, als er einschliesst, *dass eine zweigliedrige Gruppe stets integrabel ist.* (Vgl. § 5 des vorigen Kapitels.)

Zweigl. Untergr. enthalten in dreigl. Untergr.

Nach dieser Vorbemerkung seien $X_1 f$ und $X_2 f$ zwei solche infinitesimale Transformationen einer Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$, die eine zweigliedrige Untergruppe erzeugen. Wir deuten diese Untergruppe als eine Gerade im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe $E_1 f \,.\,. E_r f$. Alsdann bleibt die Gerade bei $E_1 f$ und $E_2 f$ invariant. (Vgl. § 3 des 18. Kap.) Durch die Gerade gehen nun ∞^{r-3} ebene zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten M_2, die ihrerseits eine *lineare* $(r-3)$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_{r-3} bilden. Da nun sowohl die infinitesimale Transformation $E_1 f$ als auch die infinitesimale Transformation $E_2 f$ der adjungierten Gruppe die Gerade in Ruhe lässt, so transformieren sie die ebene Mannigfaltigkeit M_{r-3} aller M_2 in sich und zwar durch eine Gruppe $\overline{E}_1 f$, $\overline{E}_2 f$, die mit der Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$ isomorph ist. (Vgl. Satz 36, § 5 des 19. Kap.) Die Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$ ist nach Satz 2 integrabel. Nach Theorem 33, § 2 des 18. Kap., ist also auch die Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$, folglich auch die isomorphe Gruppe $\overline{E}_1 f$, $\overline{E}_2 f$ integrabel. Nach Satz 19, § 4 des vorigen Kap., lässt die Gruppe $\overline{E}_1 f$, $\overline{E}_2 f$ deshalb auch eine jener ∞^{r-3} ebenen M_2 in Ruhe. Wir können annehmen, etwa $X_3 f$ habe seinen Bildpunkt in eben dieser invarianten ebenen M_2. Nach Satz 3, § 3 des 18. Kap., lassen sich alsdann $(X_1 X_3)$ und $(X_2 X_3)$ linear aus $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ ableiten. Es erzeugen also diese drei infinitesimalen Transformationen eine *dreigliedrige* Gruppe. Also folgt:

---

*) Diesen Satz benutzte Lie zum ersten Male in den Göttinger Nachr. Decbr. 1874.

Satz 3: *Jede zweigliedrige Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ gehört mindestens einer dreigliedrigen Untergruppe an.*

Man sieht am Verlaufe des Beweises, dass ein Satz, dass jede dreigliedrige einer viergliedrigen Untergruppe angehöre, sich nicht ebenso beweisen liesse. In der That ist ein solcher Satz auch nicht richtig, wie etwa die Gruppe $p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$ zeigt. Der Beweis scheitert daran, dass es dreigliedrige Gruppen giebt, die nicht integrabel sind, z. B. die Gruppe $xq,\ xp - yq,\ yp$.

Aber man kann den Satz 3 in anderer Weise verallgemeinern, nämlich so:

Integrabele Untergr. einer Gr. enthalten in einer Untergr.

Satz 4: *Jede integrabele q-gliedrige Untergruppe einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ $(q < r)$ gehört mindestens einer $(q+1)$-gliedrigen Untergruppe der Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ an.*

In der That, sei g_q jene q-gliedrige Untergruppe. Sie wird im Raume R_{r-1} der adjungierten Gruppe $E_1 f \,.\,. E_r f$ durch eine $(q-1)$fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit M_{q-1} dargestellt. Durch sie geht eine gewisse Anzahl $q$fach ausgedehnter ebener Mannigfaltigkeiten M_q. Sei g_q insbesondere die Untergruppe $X_1 f \,.\,. X_q f$, wie wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit des Beweises annehmen dürfen. Alsdann erzeugen $E_1 f \,.\,. E_q f$ ebenso wie $X_1 f \,.\,. X_q f$ für sich eine Gruppe, da mit

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r{}_s\, c_{iks} X_s f$$

auch

$$(E_i E_k) \equiv \sum_1^r{}_s\, c_{iks} E_s f$$

ist (nach Theorem 33, § 2 des 18. Kap.). Nach Voraussetzung ist die Gruppe $X_1 f \,.\,. X_q f$ von der besonderen Zusammensetzung:

$$(X_i X_{i+k}) \equiv \sum_1^{i+k-1}{}_s\, c_{i,\, i+k,\, s} X_s f$$

der integrabelen Gruppen. Also auch die Gruppe $E_1 f \,.\,. E_q f$, die überdies linear und homogen ist. Die letztere Gruppe lässt unsere ebene M_{q-1} in Ruhe. Also bleibt bei ihr nach Satz 19, § 5 des vorigen Kapitels auch mindestens eine ebene M_q in Ruhe, welche unsere M_{q-1} enthält. Es habe etwa $X_{q+1} f$ seinen Bildpunkt in dieser M_q. Alsdann erkennen wir also nach Satz 3, § 3 des 18. Kap., dass $(X_1 X_{q+1})$, $(X_2 X_{q+1}) \ldots (X_q X_{q+1})$ sich linear aus $X_1 f \,.\,. X_{q+1} f$ ableiten lassen.

Also bilden auch $X_1 f \,.\,. X_{q+1} f$ eine Gruppe. Damit ist der Satz bewiesen.

Zwar lässt die Gruppe $E_1 f \,.\,. E_q f$ auch eine ebene M_{q+1} in Ruhe, welche die soeben besprochene M_q enthält. Daraus können wir aber nicht schliessen, dass diese M_{q+1} eine $(q + 2)$-gliedrige Untergruppe der Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ darstellt. Denn: enthält sie etwa den Bildpunkt von $X_{q+2} f$, so folgt nach dem citierten Satze zwar, dass $(X_1 X_{q+2}) \dots (X_q X_{q+2})$ linear aus $X_1 f \,.\,. X_{q+2} f$ ableitbar sind, nicht aber, dass dies auch für $(X_{q+1} X_{q+2})$ gilt*).

§ 2. Bestimmung aller Typen von dreigliedrigen Zusammensetzungen.

Zweigliedr. Zusammensetzungen.

Wir haben schon oben, in Satz 2, alle Typen von *zweigliedrigen Zusammensetzungen* angegeben: Aus einer zweigliedrigen Gruppe kann man stets zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$ so auswählen, dass entweder

$$(X_1 X_2) \equiv X_1 f \quad \text{oder aber} \quad (X_1 X_2) \equiv 0$$

ist. Der eine Fall schliesst den andern aus. Ein Beispiel einer Gruppe der ersteren Art ist $p \quad xp$, einer Gruppe der letzteren $p \quad q$. Bei einer Gruppe der zweiten Art sind alle Transformationen in ihrer Reihenfolge mit einander vertauschbar, nach Satz 6, § 2 des 17. Kap. Auch ist hier jede eingliedrige Untergruppe invariant. Bei einer Gruppe der ersteren Art ist nur ihre derivierte Gruppe $X_1 f$ invariant. Die infinitesimalen Transformationen der beiden Gruppen lassen sich bei Zuhülfenahme der adjungierten Gruppe als Punkte einer Geraden darstellen. Wir gelangen dadurch zur schematischen Figur 50. Die invarianten Untergruppen sind darin besonders markiert.

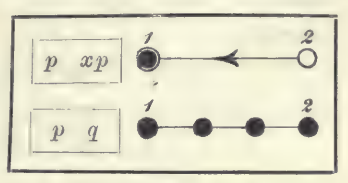


Fig. 50.

Wenden wir uns nun zu den *dreigliedrigen Zusammensetzungen*.

Zuordnung eines Pktes. zur Geraden im Raum d. adj. Gruppe

Liegt eine Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$ vor, so gilt die Bemerkung allgemein, dass sie jeder Geraden im Raume R_{r-1} ihrer adjungierten

---

*) Diese Entwickelungen veröffentlichte Lie zum ersten Male und zwar in analytischer Form im 3. Bande des Archiv for Math., Christiania 1878. Welche Rolle der Satz 4 in seinen ältesten Untersuchungen gespielt hat, deutete er bei dieser Gelegenheit mit folgenden Worten an: „Dieses letzte Theorem, das in dieser Abhandlung nicht benutzt wird, wurde bei meiner ursprünglichen Bestimmung von allen Gruppen einer Ebene fast bei jedem Schritte angewandt.“

Gruppe $E_1f..E_rf$ einen Punkt — im Ausnahmefall gar nichts — zuordnet. Denn die infinitesimalen Transformationen $\Sigma\alpha_i X_i f$, $\Sigma\beta_k X_k f$ werden im Raume $(e_1:\cdots:e_r)$ durch zwei Punkte mit den homogenen Coordinaten $\alpha_1..\alpha_r$ bez. $\beta_1..\beta_r$ dargestellt. Ist nun

$$\left(\sum_1^r{}^i\alpha_i X_i f,\ \sum_1^r{}^k\beta_k X_k f,\right)\equiv\sum_1^r{}^s\gamma_s X_s f,$$

so ordnet die Gruppe der Geraden jener beiden Punkte $(\alpha_1:\cdots:\alpha_r)$ und $(\beta_1:\cdots:\beta_r)$ den Punkt $(\gamma_1:\cdots:\gamma_r)$ zu, denn der Klammerausdruck aus irgend zwei infinitesimalen Transformationen, deren Bildpunkte auf jener Geraden liegen, unterscheidet sich nur um einen constanten Factor von $\Sigma\gamma_s X_s f$.

Zusammensetzung dreigliedr. Gruppen.

Handelt es sich nun um eine *dreigliedrige* Gruppe X_1f, X_2f, X_3f, so werden wir ihre infinitesimalen Transformationen $\Sigma\alpha_i X_i f$ als Punkte einer *Ebene* mit den homogenen Coordinaten α_1, α_2, α_3 darstellen. Jeder Geraden dieser Ebene wird dann ein Punkt zugeordnet, der eventuell verschwinden kann. Ist

$$\left(\sum_1^3{}^i\alpha_i X_i f,\ \sum_1^3{}^k\beta_k X_k f\right)\equiv\sum_1^3{}^s\gamma_s X_s f,$$

so ist der Geraden, welche die Punkte $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ verbindet, der Punkt $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ zugeordnet. Es sind offenbar

$$\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\quad \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\quad \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$$

homogene Liniencoordinaten der in Rede stehenden Geraden. Die obige Relation lässt sich nun, da $(X_iX_k)+(X_kX_i)\equiv 0$ ist, auch so schreiben:

$$(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)(X_2X_3)+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)(X_3X_1)+$$
$$+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(X_1X_2)=\sum_1^3{}^s\gamma_s X_s f.$$

Nach dem Hauptsatze wird aber:

$$(X_iX_k)\equiv\sum_1^3{}^s c_{iks}X_s f\quad(i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

sein, sodass der Vergleich der Coefficienten auf beiden Seiten ergiebt:

$$(13)\quad\begin{cases}\gamma_1=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)c_{231}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)c_{311}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)c_{121},\\ \gamma_2=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)c_{232}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)c_{312}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)c_{122},\\ \gamma_3=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)c_{233}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)c_{313}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)c_{123}.\end{cases}$$

Man sieht: Die homogenen Coordinaten γ_1, γ_2, γ_3 des Punktes, der der Geraden mit den homogenen Coordinaten $(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)$, $(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)$,

$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$ zugeordnet ist, drücken sich linear und homogen durch letztere Liniencoordinaten aus. Daher folgt:

Satz 5: *Jede dreigliedrige Gruppe X_1f, X_2f, X_3f bestimmt in der Bildebene ihrer adjungierten Gruppe eine Correlation der Geraden und Punkte.*

Diese Correlation (13) kann nun eine wirkliche oder ausgeartete sein, je nach dem Verhalten ihrer Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{231} & c_{311} & c_{121} \\ c_{232} & c_{312} & c_{122} \\ c_{233} & c_{313} & c_{123} \end{vmatrix}.$$

Ist diese Determinante von Null verschieden, so ist die Correlation nicht ausgeartet.

Der Fall, dass diese Determinante nicht Null ist, lässt sich auch so charakterisieren: Zwischen den drei Klammerausdrücken

$$(14) \qquad (X_iX_k) \equiv c_{ik1}X_1f + c_{ik2}X_2f + c_{ik3}X_3f$$
$$(i, k = 1, 2, 3)$$

besteht keine lineare Relation mit constanten Coefficienten, d. h. die erste derivierte Gruppe ist ebenfalls dreigliedrig.

Erste deriv. Gruppe dreigliedrig.

Wir wollen uns zunächst mit diesem Fall, dass *die erste derivierte Gruppe dreigliedrig* ist, beschäftigen.

Tragen wir in die Identität

$$((X_1X_2)X_3) + ((X_2X_3)X_1) + ((X_3X_1)X_2) \equiv 0$$

die Werte (14) in den inneren Klammern ein, so kommt:

$$(c_{122} - c_{313})(X_2X_3) + (c_{233} - c_{121})(X_3X_1) + (c_{311} - c_{232})(X_1X_2) \equiv 0.$$

Da nun (X_2X_3), (X_3X_1), (X_1X_2) nach Voraussetzung keine lineare Relation mit constanten Coefficienten erfüllen, so folgt:

$$c_{122} = c_{313}, \quad c_{233} = c_{121}, \quad c_{311} = c_{232}.$$

Die obige Determinante ist somit *symmetrisch*. Daher ist die Correlation (13) nach bekannten Sätzen die *polare Zuordnung* von Punkten zu Geraden vermöge eines gewissen nicht ausgearteten Kegelschnittes in der Ebene.

Wir können nun aus der Schar aller Σ Const. Xf drei beliebige von einander unabhängige als X_1f, X_2f, X_3f herausgreifen, d. h. drei solche, deren Bildpunkte ein beliebiges wirkliches Dreieck darstellen. Wir wählen X_1f und X_3f so, dass ihre Bildpunkte auf dem Kegelschnitt liegen, während X_2f zum Bildpunkt den Schnittpunkt der

Tangenten dieser beiden Punkte haben möge. Jeder der Tangenten ist der Berührpunkt, der Berührsehne ist der Bildpunkt von $X_2 f$ polar zugeordnet. Wir haben also:

$$(X_1 X_2) \equiv \alpha X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv \beta X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv \gamma X_3 f.$$

Die Constanten α, β, γ sind sämtlich von Null verschieden, da sonst die erste derivierte Gruppe nicht dreigliedrig wäre. Durch Einsetzung dieser Klammerausdrücke in die Jacobi'sche Identität zwischen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ ergiebt sich $\alpha = \gamma$. Indem man als neue $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ nun die drei infinitesimalen Transformationen, multipliciert mit passenden nicht verschwindenden Constanten benutzt, kann man ohne Mühe erreichen, dass die obigen Relationen die Form annehmen:

$$\text{(I)} \qquad (X_1 X_2) \equiv X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_3 f.$$

Ein Beispiel zu dieser Zusammensetzung ist die bekannte Gruppe $p \quad xp \quad x^2 p$.

Hätten wir als Bildpunkte von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ die Ecken eines Polardreiecks des Kegelschnittes gewählt, so hätten wir ebenso leicht die cyklische Zusammensetzung herstellen können:

$$\text{(I')} \qquad (X_1 X_2) \equiv X_3 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_1) \equiv X_2 f,$$

die also der vorhergehenden äquivalent ist.

Ein Beispiel zur letzteren Form der Gruppe ist dies:

$$-xq + yp \quad q + xyp + y^2 q \quad -p - x^2 p - xyq.$$

In der weiter unten gegebenen Figur 51 ist die hier gefundene Zusammensetzung schematisch unter I dargestellt. Dass die Gruppe ihre eigene erste derivierte Gruppe ist, soll in der Figur durch die Schraffur angedeutet werden. Die Gruppe besitzt keine invariante Untergruppe.

Erste deriv. Gruppe zweigliedr.

Nunmehr kommen wir zu der Annahme, dass *die erste derivierte Gruppe zweigliedrig* sei.

Es mögen in der betrachteten Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ etwa $X_1 f$, $X_2 f$ diese zweigliedrige erste derivierte Gruppe darstellen. Alsdann sind alle drei Klammerausdrücke linear aus $X_1 f$ und $X_2 f$ allein ableitbar; insbesondere darf nach Satz 2 des vorigen Paragraphen entweder

$$(X_1 X_2) \equiv X_1 f$$

oder aber

$$(X_1 X_2) \equiv 0$$

angenommen werden. Erstere Annahme ist jedoch aus einem anderen Grunde ausgeschlossen. Denn wenn man die Werte

$$(X_1 X_2) \equiv \lambda X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv \alpha X_1 f + \beta X_2 f,$$
$$(X_2 X_3) \equiv \gamma X_1 f + \delta X_2 f$$

in die Identität zwischen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ einführt, so kommt:

$$-\lambda \delta X_1 f + \lambda \beta X_2 f = 0,$$

d. h. $\lambda\delta = \lambda\beta = 0$. Aber β und δ sind nicht beide Null, weil sonst die erste derivierte Gruppe nur eingliedrig wäre. Also ist $\lambda = 0$, d. h. $(X_1 X_2) \equiv 0$. Führen wir statt $X_1 f$ die infinitesimale Transformation $a X_1 f + b X_2 f$ $(a \neq 0)$ ein, so können wir a und b passend so wählen, dass $(X_1 X_3) \equiv$ Const. $X_1 f$ wird, sodass wir haben:

$$(X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv \alpha X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv \gamma X_1 f + \delta X_2 f.$$

So lange, wie wir zunächst voraussetzen wollen, $\alpha \neq \delta$ ist, kann $X_2 f +$ Const. $X_1 f$ als neues $X_2 f$ so eingeführt werden, dass $(X_2 X_3) \equiv$ Const. $X_2 f$ wird. Wir können daher auch

$$(X_2 X_3) \equiv \delta X_2 f$$

annehmen. Natürlich ist nun sowohl α wie δ von Null verschieden. Ohne Mühe lässt sich $\alpha = 1$ machen. Ist dann $\delta \neq 1$, so kommt der Typus:

$$\text{(II)} \qquad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv c X_2 f \quad (c \neq 0, \neq 1);$$

ist aber $\delta = 1$, so kommt:

$$\text{(III)} \qquad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_2 f.$$

Beide Fälle sind wesentlich von einander verschieden, denn bei der Annahme (II) besitzt die Gruppe nur zwei eingliedrige invariante Untergruppen, nämlich $X_1 f$ und $X_2 f$, bei der Annahme (III) aber hat sie ∞^1 solche, nämlich jede von der Form $\alpha X_1 f + \beta X_2 f$. Übrigens kann man, wie man leicht nachweist, die Constante c in (II) nicht weiter specialisieren, sie ist wesentlich. Der Typus (II) stellt also in Wahrheit ∞^1 verschiedene Typen dar.

Beispiele zu (II) und (III) geben die beiden Gruppen:

$$p \quad q \quad xp + cyq \quad (c \neq 0, 1), \qquad p \quad q \quad xp + yq.$$

In der weiter unten befindlichen Fig. 51 sind die beiden Typen unter II und III schematisch dargestellt. Die Doppelgerade stellt die erste derivierte Gruppe dar. Die schwarzen Punkte geben die invarianten eingliedrigen Untergruppen.

In dem oben ausgeschlossenen Fall, dass $\alpha = \delta$ ist, kann man ohne Mühe, indem man $\frac{1}{\alpha} X_3 f$ als $X_3 f$ benutzt, zu der Form gelangen,

in der $\alpha = 0$ ist. Da nun $\beta \neq 0$ ist, weil sonst der Typus (II) oder (III) hervorginge, so kann man $\beta X_1 f$ als neues $X_1 f$ verwerten. So kommt man zum Typus

(IV) $\quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f + X_2 f.$

Ein Beispiel hierzu ist

$$p \quad q \quad (x + y)p + yq.$$

Die Gruppen von der Zusammensetzung (IV) besitzen nur eine eingliedrige invariante Untergruppe, nämlich $X_1 f$. Man vergleiche Fig. 51 unter IV. Dies zeigt auch unmittelbar, dass die Gruppen dieser Art nicht durch andere Auswahl ihre infinitesimalen Transformationen auf die Form der Zusammensetzung (II) oder (III) gebracht werden können.

Erste deriv. Gruppe eingliedrig.

Sei nun drittens *die erste derivierte Gruppe eingliedrig*, etwa $X_1 f$. Dann haben wir:

$$(X_1 X_2) \equiv \alpha X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv \beta X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv \gamma X_1 f.$$

α, β, γ sind nicht sämtlich Null. Die Einsetzung dieser Werte in die Identität zwischen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ giebt keine Relation zwischen α, β, γ. Aber es macht keine Mühe, zu erreichen, dass entweder

(V) $\quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv 0$

oder

(VI) $\quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv 0, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f$

wird.

Beispiele zu (V) und (VI) geben die Gruppen

$$p \quad q \quad xp, \qquad q \quad p \quad xq.$$

Natürlich ist bei Gruppen von der Zusammensetzung (V) oder (VI) jede zweigliedrige Untergruppe, die $X_1 f$ enthält, invariant, nach Satz 28, § 5 des vorigen Kapitels. Ausser $X_1 f$ selbst besitzen diese Gruppen aber keine eingliedrige invariante Untergruppe. Dass beide Typen (V) und (VI) wesentlich verschieden sind, sieht man sofort. In der unten gegebenen Fig. 51 sind sie schematisch dargestellt.

Erste deriv. Gruppe nullgliedrig.

Endlich viertens verbleibt die Annahme, dass *die erste derivierte Gruppe nullgliedrig* ist. Hier haben wir den Typus:

(VII) $\quad (X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv 0, \quad (X_2 X_3) \equiv 0.$

Ein Beispiel giebt die Gruppe

$$q \quad xq \quad x^2 q.$$

Jede Gerade und jeder Punkt der Ebene der adjungierten Gruppe stellt eine invariante Untergruppe dar. Siehe Fig. 51 unter VII.

Also hat sich ergeben:

Theorem 36: *Jede dreigliedrige Gruppe lässt sich durch passende Auswahl dreier von einander unabhängiger X_1f, X_2f, X_3f aus der Schar ihrer infinitesimalen Transformationen auf eine solche Form bringen, dass sie eine der folgenden von einander wesentlich verschiedenen Zusammensetzungen besitzt:*

Tafel aller dreigliedr. Zusammensetzungen.

$$\text{I.}\quad (X_1X_2)\equiv X_1f,\quad (X_1X_3)\equiv 2X_2f,\quad (X_2X_3)\equiv X_3f.$$

$$\text{II.}\quad (X_1X_2)\equiv 0,\quad (X_1X_3)\equiv X_1f,\quad (X_2X_3)\equiv cX_2f\quad (c\neq 0,1),$$

$$\text{III.}\quad (X_1X_2)\equiv 0,\quad (X_1X_3)\equiv X_1f,\quad (X_2X_3)\equiv X_2f,$$

$$\text{IV.}\quad (X_1X_2)\equiv 0,\quad (X_1X_3)\equiv X_1f,\quad (X_2X_3)\equiv X_1f+X_2f.$$

$$\text{V.}\quad (X_1X_2)\equiv 0,\quad (X_1X_3)\equiv X_1f,\quad (X_2X_3)\equiv 0,$$

$$\text{VI.}\quad (X_1X_2)\equiv 0,\quad (X_1X_3)\equiv 0,\quad (X_2X_3)\equiv X_1f.$$

$$\text{VII.}\quad (X_1X_2)\equiv 0,\quad (X_1X_3)\equiv 0,\quad (X_2X_3)\equiv 0.$$

Diese sieben Typen von Zusammensetzungen werden durch die nebenstehende schematische Figur dargestellt.

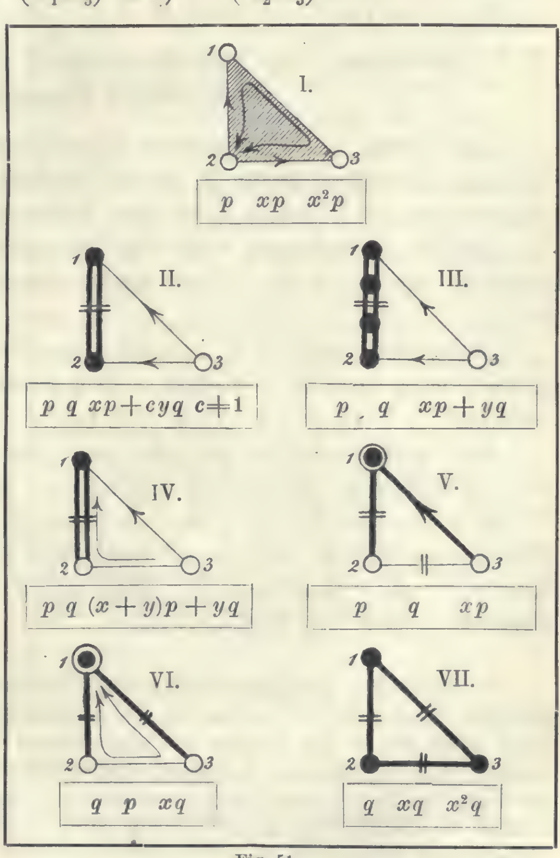


Fig. 51.

Aus diesem Theorem folgt unmittelbar der wichtige

Satz 6: *Jede nicht-integrabele dreigliedrige Gruppe lässt sich auf eine solche Form X_1f, X_2f, X_3f bringen, dass*

$$(X_1X_2)\equiv X_1f,$$
$$(X_1X_3)\equiv 2X_2f,$$
$$(X_2X_3)\equiv X_3f$$

wird.

Auch können wir unter Berufung auf eine zum Schluss des § 3 des 18. Kap. eingeführte, in § 5 des vor. Paragraphen abermals gebrauchte Bezeichnung sagen:

Satz 7: *Jede einfache dreigliedrige Gruppe lässt sich auf eine solche Form $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ bringen, dass*

$$(X_1 X_2) \equiv X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_3 f$$

wird.

Endlich sahen wir oben, dass wir eine Gruppe von dieser Art auch auf eine solche Form bringen können, dass

$$(X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_1) \equiv X_2 f, \quad (X_1 X_2) \equiv X_3 f$$

wird.

Wir haben schon öfters auf die Wichtigkeit der dreigliedrigen Gruppen von dieser Zusammensetzung hingewiesen. (Vgl. z. B. § 3 des 18. Kap.) Es sind dies die nicht-integrabelen, ebenso die einfachen Gruppen von *geringster* Parameterzahl. Auch ist jetzt ein Satz bewiesen, den wir in § 3 des 18. Kap. auf Seite 476 vorwegnahmen, um ein interessantes Ergebnis möglichst allgemein aussprechen zu können*).

§ 3. Bestimmung der Zusammensetzung aller nicht-integrabelen viergliedrigen Gruppen.

Um vorerst einige allgemeine Ergebnisse über die viergliedrigen Gruppen abzuleiten, knüpfen wir an Satz 31, § 5 des vorigen Paragraphen, an. Aus jenem Satze folgt sofort:

Satz 8: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe G_r eine $(r-1)$-gliedrige einfache Gruppe G_{r-1}, so ist letztere eine invariante Untergruppe der G_r.*

Denn sonst enthielte G_{r-1} nach jenem Satze eine invariante Untergruppe, wäre also nicht einfach. Diesen Satz 8 werden wir sogleich benutzen.

G_4 mit einfacher G_3.

Wir wollen nämlich von jetzt an zuerst *viergliedrige Gruppen G_4, die eine einfache dreigliedrige Untergruppe besitzen*, ins Auge fassen. Es folgt aus Satz 8 sofort, dass diese einfache Gruppe eine invariante Untergruppe der G_4 sein muss. Nach Satz 7 des vorigen Paragraphen lässt sich aber jede einfache dreigliedrige Gruppe auf eine solche Form $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ bringen, dass:

---

*) Wir wollen nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass die einfache dreigliedrige Gruppe in der Theorie der Differentialgleichungen wesentlich dieselbe Rolle spielt wie in der Theorie der algebraischen Gleichungen die Galois'sche Gruppe einer allgemeinen Gleichung fünften Grades. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ist das Analogon zur algebraischen Gleichung fünften Grades; die Quadraturen spielen dieselbe Rolle, wie die Auflösungen binomischer Gleichungen, u. s. w.

(15) $(X_1 X_2) \equiv X_1 f, \quad (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_3 f$

oder, wenn man will:

(16) $(X_1 X_2) \equiv X_3 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_1) \equiv X_2 f$

wird. Ist $X_4 f$ eine vierte von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ unabhängige infinitesimale Transformation der G_4, so ist, da $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine invariante Untergruppe vorstellt:

$$(X_i X_4) \equiv \alpha_{i1} X_1 f + \alpha_{i2} X_2 f + \alpha_{i3} X_3 f$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

Die adjungierte Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$, $E_4 f$ der G_4 lässt in ihrem Raume R_3 mit den homogenen Punktcoordinaten e_1, e_2, e_3, e_4 die Ebene $e_4 = 0$, die Ebene der invarianten Untergruppe, in Ruhe. Ferner erzeugen $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ eine solche dreigliedrige invariante Untergruppe der adjungierten Gruppe, dass sie die Punkte der Ebene $e_4 = 0$ genau so unter einander transformieren, wie es die adjungierte Gruppe der dreigliedrigen Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ mit den Punkten der Ebene thut, deren homogene Coordinaten e_1, e_2, e_3 sind. Bei der Gruppe $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ bleibt somit in der Ebene $e_4 = 0$ ein und auch nur ein Kegelschnitt invariant. Siehe § 3 des 18. Kap., Fig. 45. Es muss daher auch nach Satz 18, § 4 des 19. Kap., die ganze viergliedrige adjungierte Gruppe, also auch $E_4 f$ diesen Kegelschnitt invariant lassen.

Die adjungierte Gruppe $E_1 f \ldots E_4 f$ transformiert aber die Punkte der Ebene $e_4 = 0$ projectiv unter einander. Es ist nun die allgemeine projective Gruppe eines Kegelschnittes nur dreigliedrig. (Vgl. § 3 des 11. Kap.) Daraus folgt, dass $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$, $E_4 f$ die Ebene $e_4 = 0$ nur dreigliedrig in sich transformieren, d. h. dass es Constanten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 giebt derart, dass

$$\lambda_1 E_1 f + \lambda_2 E_2 f + \lambda_3 E_3 f + \lambda_4 E_4 f$$

jeden Punkt der Ebene $e_4 = 0$ in Ruhe lässt. Sicher ist dabei $\lambda_4 \neq 0$. Es ist also auch $\Sigma \lambda_k X_k f$ von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ unabhängig. Wir dürfen mithin $\Sigma \lambda_k X_k f$ als neues $X_4 f$ benutzen. Thun wir dies, so finden wir rückwärts: $E_4 f$ lässt alle Punkte der Ebene $e_4 = 0$ einzeln in Ruhe. Nach Satz 3, § 3 des 18. Kap. folgt hieraus, dass wir nun anzunehmen haben:

$$(X_1 X_4) \equiv \alpha_1 X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv \alpha_2 X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv \alpha_3 X_3 f$$

und allgemein:

$$(e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f,\ X_4 f) \equiv \text{Const.}\,(e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f),$$

denn der allgemeine Punkt von $e_4 = 0$ stellt die infinitesimale Transformation $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ dar. Dies ist aber nur dann mög-

lich, wenn die Constanten α_1, α_2, α_3 einander gleich sind. Wir bezeichnen ihren Wert mit α. Nehmen wir an, $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ erfüllen die cyklischen Relationen (16), so giebt nun die Identität

$$((X_1 X_2) X_4) + ((X_2 X_4) X_1) + ((X_4 X_1) X_2) \equiv 0$$

sofort $\alpha = 0$. Hiermit haben wir gefunden:

Satz 9: *Enthält eine viergliedrige Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ eine dreigliedrige einfache Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, so kann man $X_4 f$ stets so wählen, dass jedes $(X_i X_4) \equiv 0$ wird*).*

Legen wir statt (16) die damit gleichberechtigte Zusammensetzung (15) zu Grunde, so finden wir also als einen ersten Typus von Zusammensetzungen viergliedriger Gruppen diesen:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv X_1 f, & (X_1 X_3) \equiv 2 X_2 f, & (X_2 X_3) \equiv X_3 f, \\ (X_1 X_4) \equiv 0, & (X_2 X_4) \equiv 0, & (X_3 X_4) \equiv 0. \end{cases}$$

Beispielsweise hat die Gruppe

$$p \quad xp \quad x^2 p \quad q$$

diese Zusammensetzung.

Ein schematisches Bild von dieser Zusammensetzung im Raume der adjungierten Gruppe giebt die weiter unten befindliche Figurentafel 52 unter I. Die erste derivierte Gruppe ist $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$. Ihre Ebene ist in der Figur besonders hervorgehoben. Die G_4 besitzt ausser dieser invarianten G_3 nur eine invariante Untergruppe, nämlich $X_4 f$. Auch ihr Bildpunkt ist besonders markiert.

G_4 ohne einfache G_3.

Wir haben nun die viergliedrigen Gruppen zu betrachten, die keine einfache dreigliedrige Gruppe enthalten.

Wir werden nachweisen, *dass jede derartige Gruppe integrabel ist.*

Nach Satz 1 und 3 des § 1 enthält jede G_4 dreigliedrige Untergruppen, und jede ihrer infinitesimalen Transformationen gehört mindestens einer solchen an. Nun sollen die in G_4 enthaltenen G_3 nach Voraussetzung nicht einfach sein. Nach Satz 6 und 7 des § 2 sind sie daher integrabel.

G_4 mit inv. integr. G_3.

Enthält zunächst die G_4 eine *invariante* integrabele G_3, so enthält sie also eine Reihenfolge von Untergruppen G_3, G_2, G_1 derart, dass G_1 in G_2, G_2 in G_3 und G_3 in G_4 invariant ist. Nach § 5 des 19. Kap. ist also G_4 selbst integrabel, was wir eben beweisen wollten.

G_4 ohne inv. integr. G_3.

Es bleibt somit nur noch die Annahme zu erledigen, dass die G_4 *keine invariante* integrabele G_3 enthält. Wie wir wissen, enthält sie sicher nur integrabele G_3. Jede solche wird durch eine Ebene im Raume

*) Von Lie in den Math. Ann. Bd. XI, 1876—77 ausgesprochen.

R_3 der adjungierten Gruppe $E_1 f \dots E_4 f$ dargestellt. Diese Ebene geht bei allen infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkte in der Ebene liegen, in sich über, nimmt also bei der ganzen adjungierten Gruppe höchstens ∞^1 Lagen an. Andererseits nimmt sie sicher ∞^1 Lagen an, denn sonst bliebe sie invariant und stellte eine gegen die Voraussetzung in der G_4 enthaltene invariante integrabele G_3 dar. Die ∞^1 Ebenen können nun entweder eine abwickelbare Fläche umhüllen oder im besonderen sämtlich durch eine Gerade gehen.

Abwickelbare Fläche.

Im allgemeinen Fall, *dass die ∞^1 Ebenen eine abwickelbare Fläche erzeugen*, könnte diese allerdings in einen Kegel ausarten. Sehen wir vorerst von dieser Möglichkeit ab, so wird die Fläche eine Rückkehrcurve haben. Die Fläche bleibt bei der adjungierten Gruppe in Ruhe und auch die Rückkehrcurve als Ort der Schnittpunkte von je drei consecutiven Ebenen der Ebenenschar. Die ∞^1 Punkte der Rückkehrcurve werden also bei $E_1 f \dots E_4 f$ unter sich vertauscht, natürlich vermöge einer Gruppe, nach Satz 36, § 5 des 19. Kap. Aber diese Gruppe kann nach Satz 14, § 4 des 12. Kap., höchstens dreigliedrig sein. Also giebt es nicht sämtlich verschwindende Constanten $\lambda_1 \dots \lambda_4$ derart, dass

$$\lambda_1 E_1 f + \lambda_2 E_2 f + \lambda_3 E_3 f + \lambda_4 E_4 f$$

alle Punkte der Curve, daher auch alle jene ∞^1 Schmiegungsebenen der Curve in Ruhe lässt. Der Bildpunkt $(\lambda_1 \dots \lambda_4)$ dieser infinitesimalen Transformation kann aber nicht in allen diesen Ebenen liegen, sobald die Fläche kein Kegel ist. Da ferner jede Ebene bei allen Ef, deren Bildpunkte in ihr liegen, in Ruhe bleibt, so folgt somit, dass jede der Ebenen bei vier $\Sigma\,\mathrm{Const.}\,Ef$, deren Bildpunkte ein wirkliches Tetraeder bilden, invariant ist, also bei allen $\Sigma\,\mathrm{Const.}\,Ef$, da sie linear aus diesen vieren ableitbar sind. Mithin ist jede der ∞^1 Ebenen bei der adjungierten Gruppe invariant. Dies widerspricht nun der Thatsache, dass sie bei der adjungierten Gruppe in einander übergehen.

Specialfall: Ebenenbüschel.

Gehen die ∞^1 Ebenen sämtlich durch eine Gerade, so folgern wir zunächst, dass diese Gerade bei der adjungierten Gruppe in Ruhe bleibt, also eine zweigliedrige invariante Untergruppe der G_4 darstellt. Jede infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe, die auf dieser Geraden ihren Bildpunkt hat, lässt jede der ∞^1 Ebenen einzeln in Ruhe. Daher werden diese ∞^1 Ebenen bei der adjungierten Gruppe höchstens zweigliedrig — und zwar projectiv — unter einander transformiert. Nach Theorem 15, § 2 des 5. Kap., bleibt folglich wenigstens eine dieser Ebenen in Ruhe. Sie stellt also eine invariante integrabele G_3 dar. Dies widerspricht der Voraussetzung.

Specialfall: Kegel.

Wir haben hiernach nur noch den Fall zu betrachten, *dass die* ∞^1 *Ebenen einen Kegel umhüllen.* Der Kegel und seine Spitze bleiben hier natürlich bei der adjungierten Gruppe in Ruhe. Die Spitze stellt eine eingliedrige invariante Untergruppe der G_4 dar. Ehe wir diese Annahme weiter verfolgen, wollen wir einen sich schon jetzt ergebenden wichtigen Satz formulieren. Da wir stets eine invariante Untergruppe erhalten haben, so können wir sagen:

Keine einfache G_4.

Theorem 37: *Es giebt keine einfache viergliedrige Gruppe.*

Betrachten wir jetzt den Fall von ∞^1 Ebenen, die einen Kegel umhüllen. Die invariante Kegelspitze können wir als Bildpunkt von $X_4 f$ benutzen. Alsdann ist nach § 3 des 18. Kap. zu setzen:

$$(X_1 X_4) \equiv \alpha_1 X_4 f, \quad (X_2 X_4) \equiv \alpha_2 X_4 f, \quad (X_3 X_4) \equiv \alpha_3 X_4 f.$$

Ferner sei:

$$(X_i X_k) \equiv c_{ik1} X_1 f + c_{ik2} X_2 f + c_{ik3} X_3 f + \beta_{ik} X_4 f,$$
$$(i, k = 1, 2, 3).$$

Setzt man diese Werte in die Identität

$$((X_1 X_2) X_3) + ((X_2 X_3) X_1) + ((X_3 X_1) X_2) \equiv 0$$

ein und setzt man sodann die Coefficienten von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ einzeln gleich Null, so erhält man genau dieselben Relationen zwischen den Constanten c_{iks}, als ob man die Identität zwischen $\bar{X}_1 f$, $\bar{X}_2 f$, $\bar{X}_3 f$ unter Annahme der folgenden drei *verkürzten* Klammerausdrücke gebildet hätte:

$$(\bar{X}_i \bar{X}_k) \equiv c_{ik1} \bar{X}_1 f + c_{ik2} \bar{X}_2 f + c_{ik3} \bar{X}_3 f$$
$$(i, k = 1, 2, 3).$$

Es ist demnach sicher, dass die Constanten c_{iks} die Relationen erfüllen, die nach dem dritten Fundamentalsatze zwischen den charakteristischen Constanten c_{iks} bestehen müssen, um die Existenz einer dreigliedrigen Gruppe $\bar{G}_3$ oder $\bar{X}_1 f$, $\bar{X}_2 f$, $\bar{X}_3 f$ von dieser Zusammensetzung zu verbürgen. Wäre nun diese Gruppe $\bar{G}_3$ integrabel, so könnten wir, indem wir passende lineare Combinationen der $\bar{X}_i f$ als neue $\bar{X}_i f$ einführten, erreichen, dass

$$(\bar{X}_1 \bar{X}_2) \equiv \lambda \bar{X}_1 f,$$
$$(\bar{X}_1 \bar{X}_3) \equiv \mu \bar{X}_1 f + \nu \bar{X}_2 f,$$
$$(\bar{X}_2 \bar{X}_3) \equiv \varrho \bar{X}_1 f + \sigma \bar{X}_2 f + \tau \bar{X}_3 f$$

würde, eben nach dem Begriff der integrabelen Gruppen. Wenn wir die entsprechenden linearen Combinationen mit $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ vornehmen würden, so könnten wir also erreichen, dass

$$(X_1X_2) \equiv \lambda X_1 f \qquad\qquad\qquad + \beta_{12} X_4 f,$$
$$(X_1X_3) \equiv \mu X_1 f + \nu X_2 f \qquad\quad + \beta_{13} X_4 f,$$
$$(X_2X_3) \equiv \varrho X_1 f + \sigma X_2 f + \tau X_3 f + \beta_{23} X_4 f$$

würde. Da nun überdies

$$(X_1X_4) \equiv \alpha_1 X_4 f, \quad (X_2X_4) \equiv \alpha_2 X_4 f, \quad (X_3X_4) \equiv \alpha_3 X_4 f$$

wäre, so würde $X_4 f$ in $X_4 f$, $X_1 f$, diese Untergruppe in $X_4 f$, $X_1 f$, $X_2 f$, letztere in der ganzen G_4 invariant sein. Die ganze Gruppe G_4 wäre folglich integrabel, was wir gerade zu beweisen wünschten.

Es ist daher nur noch die Möglichkeit zu untersuchen, dass $\overline{X}_1 f$, $\overline{X}_2 f$, $\overline{X}_3 f$ eine nicht-integrabele $\overline{G}_3$ bestimmen. Nach Satz 6 des § 2 dürfen wir dann für $\overline{G}_3$ die cyklische Zusammensetzung voraussetzen:

$$(\overline{X}_2\overline{X}_3) \equiv \overline{X}_1 f, \quad (\overline{X}_3\overline{X}_1) \equiv \overline{X}_2 f, \quad (\overline{X}_1\overline{X}_2) \equiv \overline{X}_3 f,$$

sodass entsprechend

$$(X_2X_3) \equiv X_1 f + \beta_{23} X_4 f,$$
$$(X_3X_1) \equiv X_2 f + \beta_{31} X_4 f,$$
$$(X_1X_2) \equiv X_3 f + \beta_{12} X_4 f$$

wird, während

$$(X_1X_4) \equiv \alpha_1 X_4 f, \quad (X_2X_4) \equiv \alpha_2 X_4 f, \quad (X_3X_4) \equiv \alpha_3 X_4 f$$

ist. Die Identität zwischen $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ giebt nun sofort $\alpha_1 = 0$. Analog ist $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Führen wir $X_1 f + \beta_{23} X_4 f$, $X_2 f + \beta_{31} X_4 f$, $X_3 f + \beta_{12} X_4 f$ als neues $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ ein, so sehen wir, dass $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ eine nicht-integrabele einfache G_3 erzeugen. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass die G_4 keine einfache G_3 enthalten soll.

Unsere Überlegungen liefern uns folglich den

G_4 ohne einfache G_3 ist integr.

Satz 10: *Eine viergliedrige Gruppe, die keine einfache dreigliedrige Gruppe enthält, ist stets integrabel.*

Ausserdem:

Satz 11: *Jede nicht-integrabele viergliedrige Gruppe lässt sich durch passende Auswahl ihrer infinitesimalen Transformationen* $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, $X_4 f$ *auf eine solche Form bringen, dass*

$$(X_1X_2) \equiv X_1 f, \quad (X_1X_3) \equiv 2 X_2 f, \quad (X_2X_3) \equiv X_3 f,$$
$$(X_1X_4) \equiv (X_2X_4) \equiv (X_3X_4) \equiv 0$$

wird *).

---

*) Von Lie ausgesprochen in den Math. Ann. Bd. XI.

§ 4. Zusammensetzung der integrabelen viergliedrigen Gruppen ohne dreigliedrige Involutionsgruppe.

Es ist zweckmässig, bei der Bestimmung der Zusammensetzung der integrabelen viergliedrigen Gruppen G_4 diejenigen gesondert zu betrachten, die eine dreigliedrige Gruppe G_3 enthalten, deren infinitesimale Transformationen sämtlich mit einander vertauschbar sind.

Involutionsgruppe.

Wir wollen eine Gruppe, deren sämtliche infinitesimale Transformationen mit einander vertauschbar sind, kurz eine *Involutionsgruppe* nennen. Nach Satz 6, § 2 des 17. Kap., soll also eine Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ eine Involutionsgruppe dann und nur dann heissen, *wenn alle Klammerausdrücke $(X_i X_k)$ identisch verschwinden.*

Es sollen, wie gesagt, in unserem gegenwärtigen Problem die integrabelen G_4 mit Involutions-G_3 gesondert betrachtet werden, und zwar im nächsten Paragraphen. Hier betrachten wir alle übrigen integrabelen viergliedrigen Gruppen G_4 oder $X_1 f, X_2 f, X_3 f, X_4 f$.

Erste deriv. Gruppe dreigliedrig.

Sei zunächst die erste derivierte Gruppe der G_4 dreigliedrig: $X_1 f, X_2 f, X_3 f$. Sie ist auch integrabel, nach Satz 34, § 5 des 19. Kap. Wir müssen also die verschiedenen integrabelen G_3 ins Auge fassen. Nach Theorem 36 des § 2 haben wir deren sechs zu unterscheiden, die damals mit den Nummern II ... VII bezeichnet wurden. Wir werden sehen, dass die Fälle II, III, IV, V in unserem jetzigen Problem nicht vorkommen können. Denn in allen diesen können wir annehmen:

$$(X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_1 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_3) \equiv \alpha X_1 f + \beta X_2 f.$$

Es besitzen II, III, IV nur eine zweigliedrige invariante Untergruppe $X_1 f, X_2 f$, der Typus V allerdings ∞^1. Aber im letzteren Falle besteht nur eine der zweigliedrigen invarianten Untergruppen aus vertauschbaren Transformationen, nämlich auch $X_1 f, X_2 f$. Im Raume R_3 der adjungierten Gruppe $E_1 f \dots E_4 f$ der G_4 wird die erste derivierte G_3 durch eine invariante Ebene dargestellt, jede zweigliedrige invariante Untergruppe der G_3 durch eine Gerade in dieser Ebene. Die Untergruppe $E_1 f, E_2 f, E_3 f$, die in der adjungierten der G_4 invariant ist, lässt diese Gerade invariant. Die Gerade, die $X_1 f, X_2 f$ darstellt, ist in allen vier betrachteten Fällen eine isolierte invariante Mannigfaltigkeit bei $E_1 f, E_2 f, E_3 f$. Daher bleibt sie nach Satz 18, § 4 des 19. Kap., auch bei der adjungierten Gruppe der G_4 in Ruhe. Also ist zu setzen:

$$(X_1X_4) \equiv \gamma X_1f + \delta X_2f, \quad (X_2X_4) \equiv \lambda X_1f + \mu X_2f,$$
$$(X_3X_4) \equiv \varrho X_1f + \sigma X_2f + \tau X_3f.$$

Bildet man nun für $i = 1, 2$

$$((X_iX_3)X_4) + ((X_3X_4)X_i) + ((X_4X_i)X_3) \equiv 0,$$

so erhält man, wenn man die Coefficienten vergleicht, leicht $\tau = 0$, d. h. die erste derivierte Gruppe ist entgegen der Voraussetzung nur zweigliedrig: X_1f, X_2f.

Wir brauchen hiernach nur die Fälle VI und VII des Theorems 36 des § 2 zu betrachten. Im Fall VII ist die G_3 eine Involutionsgruppe. Da wir in diesem Paragraphen von solchen absehen, so bleibt nur die Annahme VI übrig:

$$(17) \qquad (X_1X_2) \equiv 0, \quad (X_1X_3) \equiv 0, \quad (X_2X_3) \equiv X_1f.$$

Die Gruppe X_1f, X_2f, X_3f besitzt nur eine eingliedrige invariante Untergruppe, nämlich X_1f. Nach Satz 18, § 4 des 19. Kap., folgt daher analog wie oben, dass X_1f auch in der G_4 invariant ist. Es ist also:

$$(X_1X_4) \equiv \alpha X_1f.$$

Die Strahlen durch den Bildpunkt von X_1f, die in der invarianten Ebene $e_4 = 0$ des R_3 der adjungierten Gruppe $E_1f \,.\,.\, E_4f$ der G_4 liegen, werden durch diese adjungierte Gruppe unter sich vertauscht. Diese ∞^1 Strahlen werden aber höchstens eingliedrig, und zwar projectiv, transformiert, denn E_1f, E_2f, E_3f lassen jeden dieser Strahlen in Ruhe, da jeder eine invariante Untergruppe der G_3 darstellt und E_1f, E_2f, E_3f in der Ebene $e_4 = 0$ die adjungierte Gruppe der G_3 bilden. Nach Theorem 15, § 2 des 5. Kap., bleibt deshalb mindestens ein Strahl bei $E_1f \,.\,.\, E_4f$ in Ruhe. Da nun die Zusammensetzung (17) nicht gestört wird, wenn man $X_2f + \lambda X_3f$ als X_2f einführt, d. h. da alle Strahlen durch den Bildpunkt von X_1f in der Ebene $e_4 = 0$ innerhalb der G_3 gleichberechtigte invariante Untergruppen darstellen, so folgt, dass wir annehmen dürfen, dass gerade der Strahl vom Bildpunkt von X_1f nach dem von X_2f bei der adjungierten Gruppe in Ruhe bleibt.

Nun aber können nach Theorem 15 entweder alle oder zwei oder gerade nur einer der Strahlen invariant sein. *Im ersten und zweiten Falle* können wir annehmen, dass auch der Strahl vom Bildpunkt von X_1f nach dem von X_3f in Ruhe bleibt. Dann haben wir also ausser (17) zu setzen:

Erste und zweite Möglichkeit.

$$(X_1X_4) \equiv \alpha X_1f, \quad (X_2X_4) \equiv \beta X_2f + \varrho X_1f, \quad (X_3X_4) \equiv \gamma X_3f + \sigma X_1f.$$

Hierin muss $\beta\gamma \neq 0$ sein, weil sonst die erste derivierte Gruppe der

G_4 nur zweigliedrig wäre. Wir können ohne Mühe erreichen, dass insbesondere $\beta = 1$ wird. Indem wir $X_4f + \sigma X_2f - \varrho X_3f$ als X_4f einführen, erreichen wir darauf, dass $\varrho = \sigma = 0$ wird. Die Identität

$$((X_2X_3)X_4) + ((X_3X_4)X_2) + ((X_4X_2)X_3) \equiv 0$$

liefert nun $\alpha = 1 + \gamma$. Wenn wir α mit c bezeichnen, so ist also $\gamma = c - 1$. Da $\gamma \neq 0$ sein soll, so ist auch $c \neq 1$. Daher ergiebt sich der Typus:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (X_1X_2) \equiv 0, & (X_1X_3) \equiv 0, & (X_2X_3) \equiv X_1f, \\ (X_1X_4) \equiv cX_1f, & (X_2X_4) \equiv X_2f, & (X_3X_4) \equiv (c-1)X_3f \\ & (c \neq 1). & \end{cases}$$

Ein Beispiel hierzu ist dieses:

$$q \quad p \quad xq \quad xp + cyq.$$

Man kann übrigens nachweisen, dass sich die Constante c nicht weiter specialisieren lässt. In der Tafel Fig. 52, die weiter unten gegeben wird, ist das Bild der Zusammensetzung (II) schematisch wiedergegeben. Die erste derivierte Gruppe, ebenso die invarianten zwei- und eingliedrigen Untergruppen sind besonders hervorgehoben. Ist $c \neq 2$, so sind nur die Untergruppen X_1f, X_2f und X_1f, X_3f sowie X_1f invariant. Für $c = 2$ aber ist jede Untergruppe X_1f, $\alpha X_2f + \beta X_3f$ invariant sowie X_1f. Für $c = 2$ ist daher eine besondere Figur entworfen worden.

Dritte Möglichkeit.

Wir müssen nun *drittens* den Fall ins Auge fassen, dass von den Strahlen vom Bildpunkt von X_1f aus in der Ebene $e_4 = 0$ bei der adjungierten Gruppe der G_4 nur der Strahl nach dem Bildpunkt von X_2f invariant ist. Hier haben wir ausser (17) anzunehmen:

$$(X_1X_4) \equiv \alpha X_1f, \quad (X_2X_4) \equiv \beta X_2f + \varrho X_1f,$$
$$(X_3X_4) \equiv \gamma X_3f + \sigma X_1f + \tau X_2f,$$

wobei $\tau \neq 0$ ist. Es soll eine Untergruppe X_1f, $\lambda X_2f + \mu X_3f$ nur dann invariant sein, wenn $\mu = 0$ ist. Es ist aber:

$$(\lambda X_2f + \mu X_3f,\ X_4f) \equiv (\lambda\beta + \mu\tau)X_2f + \mu\gamma X_3f + (\lambda\varrho + \mu\sigma)X_1f.$$

Dies soll also die Form Const. $(\lambda X_2f + \mu X_3f)$ + Const. X_1f nur für $\mu = 0$ annehmen, es muss also $\beta = \gamma$ sein. Ausserdem ist $\gamma \neq 0$, weil sonst die erste derivierte Gruppe nur zweigliedrig wäre. Wenn nun

$$\frac{1}{\beta}X_4f + \frac{\sigma}{\beta}X_2f - \frac{\varrho}{\beta}X_3f$$

als neues X_4f benutzt wird, so ergiebt sich, dass in obiger Zusammensetzung $\beta = \gamma = 1$, $\varrho = 0$, $\sigma = 0$ anzunehmen ist. Alsdann liefert die

Identität zwischen X_2f, X_3f, X_4f noch $\alpha = 2$. Wenn endlich noch $\sqrt{\frac{\tau}{2}} \cdot X_2f$ und $\frac{1}{\sqrt{\frac{\tau}{2}}} X_3f$ als neues X_2f und X_3f benutzt werden, so ergiebt sich der Typus:

$$\text{(III)} \begin{cases} (X_1X_2) \equiv 0, & (X_1X_3) \equiv 0, \quad (X_2X_3) \equiv X_1f, \\ (X_1X_4) \equiv 2X_1f, & (X_2X_4) \equiv X_2f, \quad (X_3X_4) \equiv 2X_2f + X_3f. \end{cases}$$

Ein Beispiel hierzu ist die Gruppe:

$$-q \quad xq \quad p \quad xp + (2y + x^2)q.$$

Auch diese Zusammensetzung ist in der Fig. 52 unter III. schematisch dargestellt. Die adjungierte Gruppe, die einzige zweigliedrige invariante Untergruppe X_1f, X_2f sowie die einzige eingliedrige invariante Untergruppe X_1f sind wieder besonders markiert.

Erste deriv. Gruppe zweigliedr.

Sei nunmehr die erste derivierte Gruppe der G_4 oder: X_1f, X_2f, X_3f, X_4f gerade zweigliedrig: X_1f, X_2f. Alsdann ist X_1f, X_2f, $\alpha X_3f + \beta X_4f$ stets eine invariante Untergruppe. Alle diese invarianten G_3 werden im Raume R_3 der adjungierten Gruppe der G_4 durch ein Büschel von Ebenen dargestellt. Jede dieser Ebenen ist bei der adjungierten Gruppe $E_1f\,..\,E_4f$ invariant. Ausser diesen besitzt aber die G_4 keine andere dreigliedrige invariante Untergruppe, nach Satz 29, § 5 des 19. Kap. Es sind nun nach Satz 2, § 1, zwei Fälle zu unterscheiden: Bei der ersten derivierten Gruppe X_1f, X_2f ist entweder

$$(X_1X_2) \equiv X_1f \quad \text{oder} \quad (X_1X_2) \equiv 0$$

zu setzen. Ausserdem haben wir anzunehmen:

$$(X_1X_3) \equiv \alpha X_1f + \varrho X_2f, \quad (X_1X_4) \equiv \gamma X_1f + \tau X_2f,$$
$$(X_2X_3) \equiv \beta X_1f + \sigma X_2f, \quad (X_2X_4) \equiv \delta X_1f + \varphi X_2f,$$
$$(X_3X_4) \equiv \varepsilon X_1f + \psi X_2f.$$

Setzen wir *erstens* $(X_1X_2) \equiv X_1f$ und rechnen wir die Identität zwischen X_1f, X_2f, X_3f aus, so kommt sofort $\varrho = \sigma = 0$. Analog ist dann $\tau = \varphi = 0$, während die Identität zwischen X_1f, X_3f, X_4f noch $\psi = 0$ liefert. Wir kommen daher zu der ausgeschlossenen Annahme, dass die erste derivierte Gruppe nur eingliedrig ist.

Es ist somit *zweitens*

$$(X_1X_2) \equiv 0$$

zu setzen. E_1f und E_2f lassen alsdann die Bildpunkte aller infinitesimalen Transformationen $e_1X_1f + e_2X_2f$ in Ruhe. Mithin werden diese Punkte, die ja auf einer invarianten Geraden liegen, bei der adjungierten Gruppe nur von E_3f und E_4f, d. h. höchstens zweigliedrig

projectiv transformiert. Nach Theorem 15, § 2 des 5. Kap., bleibt also sicher mindestens ein Punkt dieser Punktreihe, sagen wir der Bildpunkt von $X_1 f$, bei der adjungierten Gruppe fest. Es ist dann $\varrho = \tau = 0$ zu setzen. Nun lässt sich offenbar passend $aX_3 f + bX_4 f$ als neues $X_3 f$ einführen, sodass auch $\alpha = 0$ wird. Die einzige Identität, die jetzt noch Ergebnisse liefert, ist die zwischen $X_2 f, X_3 f, X_4 f$. Sie ergiebt:

$$\beta\gamma + \sigma\delta - \varphi\beta = 0. \tag{18}$$

Sei zunächst $\sigma = 0$. Dann ist $\beta \neq 0$, weil sonst $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ eine Involutions-G_3 bilden, was ausgeschlossen wurde. Aus der Relation folgt also dann $\gamma = \varphi$, und es kommt, wenn man $\beta X_1 f$ als neues $X_1 f$ benutzt:

$$\begin{gathered} (X_1 X_2) \equiv 0, \\ (X_1 X_3) \equiv 0, \quad (X_1 X_4) \equiv \gamma X_1 f, \\ (X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv \delta X_1 f + \gamma X_2 f, \\ (X_3 X_4) \equiv \varepsilon X_1 f + \psi X_2 f. \end{gathered}$$

Wäre $\gamma = 0$, so enthielte unsere viergliedrige Gruppe eine Involutions-G_3: $X_1 f, X_2 f, X_4 f - \delta X_3 f$. Also kann γ ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden. Wird sodann $X_4 f - \delta X_3 f$ als neues $X_4 f$ eingeführt, so verschwindet das neue δ. Wenn man schliesslich $X_3 f - \psi X_2 f$ als neues $X_3 f$ und $X_4 f + \varepsilon X_2 f$ als neues $X_4 f$ benutzt, so wird $(X_3 X_4) \equiv 0$. Also ergiebt sich der Typus:

$$\left\{\begin{array}{lll} (X_1 X_2) \equiv 0, & (X_1 X_3) \equiv 0, & (X_2 X_3) \equiv X_1 f, \\ (X_1 X_4) \equiv X_1 f, & (X_2 X_4) \equiv X_2 f, & (X_3 X_4) \equiv 0. \end{array}\right. \tag{IV}$$

Z. B. besitzt die Gruppe

$$q \quad p \quad xq \quad xp + yq$$

diese Zusammensetzung.

Eine Gruppe von der Zusammensetzung (IV) hat eine eingliedrige invariante Untergruppe, $X_1 f$, sowie zwei zweigliedrige invariante Untergruppen, nämlich ausser der ersten derivierten Gruppe $X_1 f, X_2 f$ noch $X_1 f, X_3 f$. Ferner ist $X_1 f, X_2 f, \lambda X_3 f + \mu X_4 f$ die allgemeine Form jeder dreigliedrigen invarianten Untergruppe. In Fig. 52 ist die Zusammensetzung (IV) schematisch dargestellt.

Sei andererseits $\sigma \neq 0$. Dann lässt sich $aX_1 f + bX_2 f$ passend als neues $X_2 f$ und $\frac{1}{\sigma} X_3 f$ als $X_3 f$ so einführen, dass $(X_2 X_3) \equiv X_2 f$, also $\sigma = 1$, $\beta = 0$ wird. Die Relation (18) giebt dann $\delta = 0$. Benutzt man $X_4 f - \varphi X_3 f$ als $X_4 f$, so wird $\varphi = 0$ und es kommt:

$$(X_1X_2) \equiv 0, \quad (X_1X_3) \equiv 0, \quad (X_2X_3) \equiv X_2f,$$
$$(X_1X_4) \equiv \gamma X_1f, \quad (X_2X_4) \equiv 0, \quad (X_3X_4) \equiv \varepsilon X_1f + \psi X_2f.$$

Hier ist sicher $\gamma \neq 0$, weil sonst X_1f, X_2f, X_4f eine Involutions-G_3 bilden. Also werden wir $\frac{1}{\gamma} X_4f$ als neues X_4f benutzen, sodass $\gamma = 1$ wird. Indem wir alsdann $X_3f - \varepsilon X_1f$ und $X_4f + \psi X_2f$ als neues X_3f und X_4f einführen, finden wir $(X_3X_4) \equiv 0$, sodass der Typus hervorgeht:

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} (X_1X_2) \equiv 0, & (X_1X_3) \equiv 0, \quad (X_2X_3) \equiv X_2f, \\ (X_1X_4) \equiv X_1f, & (X_2X_4) \equiv 0, \quad (X_3X_4) \equiv 0. \end{cases}$$

Ein Beispiel hierzu ist die Gruppe:

$$q \quad p \quad xp \quad yq.$$

Eine Gruppe von der Zusammensetzung (V) besitzt zwei eingliedrige invariante Untergruppen X_1f und X_2f. Im übrigen haben wir gerade diese Zusammensetzung früher schon als Beispiel ausführlich behandelt. Siehe Fig. 48, § 3 des 18. Kap. Auf der unten folgenden Figurentafel 52 ist die Zusammensetzung (V) ebenfalls schematisch dargestellt.

Sei schliesslich die erste derivierte Gruppe nur eingliedrig, also allgemein:

Erste deriv. Gruppe eingliedrig.

$$(X_iX_k) \equiv \alpha_{ik}X_1f \quad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Die Identität:

$$((X_2X_3)X_4) + ((X_3X_4)X_2) + ((X_4X_2)X_3) \equiv 0$$

giebt dann

$$\alpha_{23}\alpha_{14} + \alpha_{34}\alpha_{12} + \alpha_{42}\alpha_{13} = 0.$$

Man kann nun zwei von einander unabhängige $aX_2f + bX_3f + cX_4f$ stets so bestimmen, dass sie mit X_1f combiniert Null geben. Benutzt man sie als X_2f und X_3f, so ist also $\alpha_{12} = \alpha_{13} = 0$, und die obige Gleichung giebt

$$\alpha_{23}\alpha_{14} = 0.$$

Wäre $\alpha_{23} = 0$, so würden X_1f, X_2f, X_3f eine Involutions-G_3 bilden. Also ist $\alpha_{23} \neq 0$, d. h. $\alpha_{14} = 0$. Daher ist auch $\alpha_{34} \neq 0$, $\alpha_{42} \neq 0$.

Wir haben somit:

$$(X_1X_i) \equiv 0, \quad (X_iX_k) \equiv \alpha_{ik}X_1f,$$
$$(i, k = 2, 3, 4),$$

wobei alle drei $\alpha_{ik} \neq 0$ sind. Nun lassen sich a, b so wählen, dass $aX_2f + bX_3f$ mit X_4f vertauschbar wird, sodass diese beiden

mit $X_1 f$ eine Involutions-G_3 bilden, was nicht sein darf. Hier gelangen wir also zu gar keiner Zusammensetzung.

Wir sind daher zu Ende mit der Bestimmung aller Typen von Zusammensetzungen viergliedriger Gruppen ohne dreigliedrige Involutions-Untergruppen.

§ 5. Zusammensetzung der viergliedrigen Gruppen mit dreigliedriger Involutionsgruppe.

Es sei $X_1 f \dots X_4 f$ eine viergliedrige Gruppe G_4, die eine dreigliedrige Involutionsgruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ enthält, sodass also

$$(X_1 X_2) \equiv 0, \quad (X_2 X_3) \equiv 0, \quad (X_3 X_1) \equiv 0$$

ist.

Existenz einer invarianten Invol.-G_3.

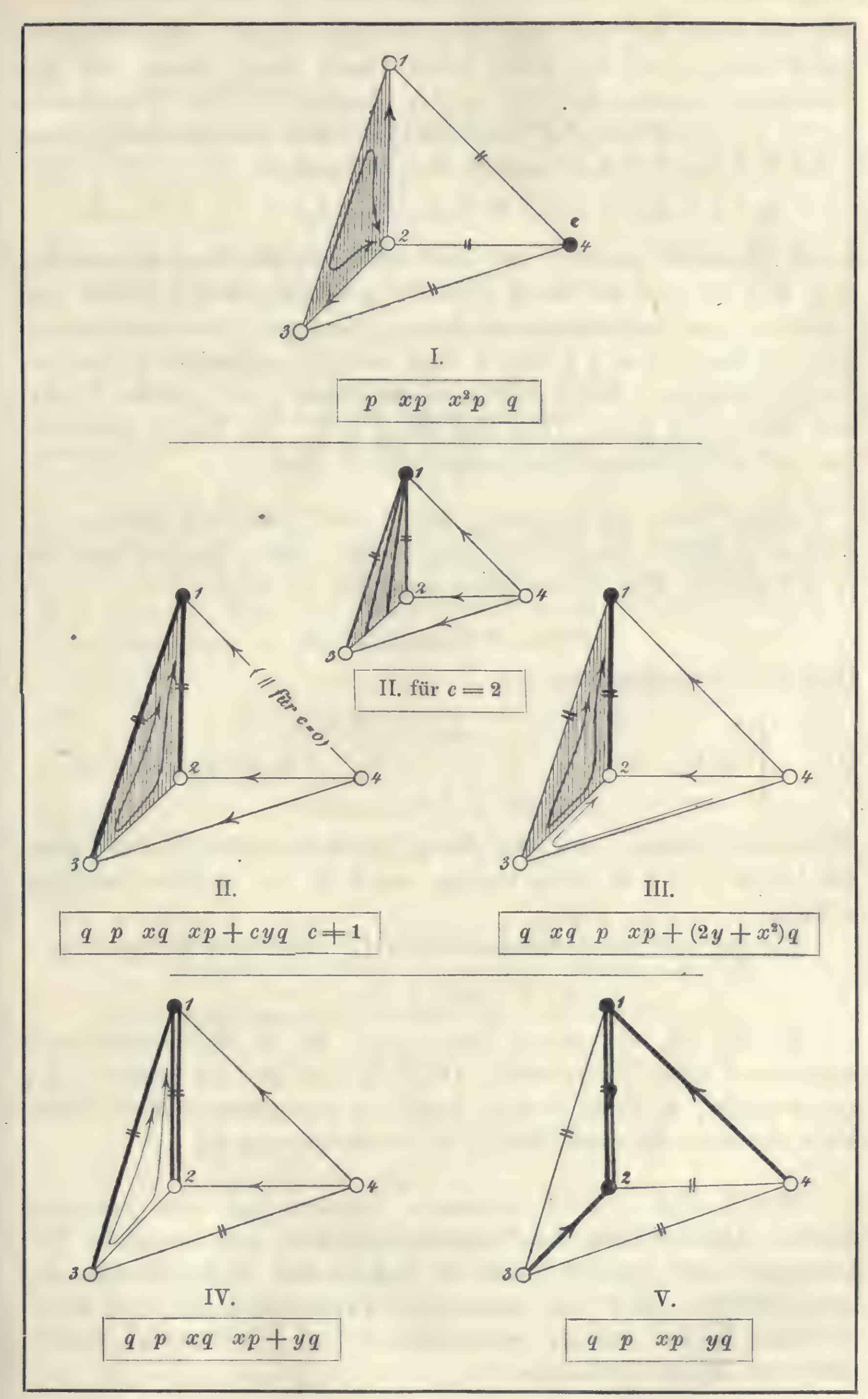
Sicher enthält die G_4 eine *invariante* dreigliedrige Involutionsgruppe. Denn wenn die Gruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ selbst nicht in der G_4 invariant ist, so nimmt ihre Bildebene $e_4 = 0$ im Raume R_3 der adjungierten Gruppe $E_1 f \dots E_4 f$ bei dieser adjungierten Gruppe andere Lagen an. Wir können daher annehmen, dass alsdann sowohl $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ als auch $X_1 f$, $X_2 f$, $X_4 f$ eine Involutionsgruppe darstellen. Dasselbe gilt dann offenbar auch von $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f + \lambda X_4 f$. Die zugehörigen Bildebenen bilden ein Büschel, das von der adjungierten Gruppe $E_1 f \dots E_4 f$ in sich transformiert wird, denn die Bildpunkte von $X_1 f$ und $X_2 f$ bleiben bei der adjungierten Gruppe fest, da alle Klammerausdrücke mit $X_1 f$ und $X_2 f$ Null ergeben. Die adjungierte Gruppe transformiert die ∞^1 Ebenen des Büschels projectiv und zwar höchstens zweigliedrig, da $E_1 f$ und $E_2 f$ jede der Ebenen für sich invariant lassen. Also bleibt nach Theorem 15, § 2 des 5 Kap., mindestens eine der Ebenen in Ruhe. Sie stellt eine *invariante* Involutions-G_3 der G_4 dar.

Diese Überlegung lässt sich sofort verallgemeinern und führt dadurch zu dem

Satz 12: *Enthält eine r-gliedrige Gruppe eine $(r-1)$-gliedrige Involutionsgruppe, so enthält sie sicher eine invariante $(r-1)$-gliedrige Involutionsgruppe.*

Sie ist daher auch sicher integrabel. Eine nicht-integrabele r-gliedrige Gruppe enthält also keine $(r-1)$-gliedrige Involutionsgruppe.

Wir dürfen hiernach annehmen, $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ sei eine *invariante* Involutions-G_3 der G_4. $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ lassen jeden Punkt der zugehörigen Bildebene $e_4 = 0$ im R_3 in Ruhe. Diese Punkte werden



1
2
3
4
c
I.
p xp x²p q
II. für c = 2
(∥ für c=0)
II.
q p xq xp + cyq c ≠ 1
III.
q xq p xp + (2y + x²)q
IV.
q p xq xp + yq
V.
q p xp yq

Fig. 52.

also nur durch $E_4 f$ und zwar projectiv transformiert. Allgemein wird $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ durch einen Punkt dieser Ebene mit den homogenen Coordinaten e_1, e_2, e_3 dargestellt. Die Coordinaten e_1, e_2, e_3 werden von $E_4 f$ linear und homogen transformiert, indem $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ vermöge $X_4 f$ übergeht in

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + (e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f,\ X_4 f)\delta t.$$

Durch passende Auswahl der drei infinitesimalen Transformationen $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ aus der Schar aller $e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$ lässt sich erreichen, dass die infinitesimale lineare homogene Transformation von e_1, e_2, e_3 eine der in § 3 des 19. Kap. unter IX aufgestellten typischen Formen annimmt. Dabei bleiben in der Ebene $e_4 = 0$ gewisse Punkte und Geraden in Ruhe. (Vgl. Fig. 49, S. 511.) Sie stellen invariante ein- und zweigliedrige Untergruppen der G_4 dar.

Erster Fall.

Erster Fall: Es bleiben in der Ebene $e_4 = 0$ drei Geraden und Punkte in Ruhe. Dieser Fall entspricht der ersten Gruppe unter IX in § 3 des 19. Kap., die so geschrieben werden kann:

$$\alpha x_1 p_1 + \beta x_2 p_2 + \gamma x_3 p_3.$$

Hier ist also anzunehmen:

$$(1)\qquad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv \alpha X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv \beta X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv \gamma X_3 f \\ (\alpha \mp \beta \mp \gamma). \end{cases}$$

Wäre $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \gamma$ oder $\beta = \gamma$, so würden mehr als drei Punkte der Ebene $e_4 = 0$ in Ruhe bleiben, ein Fall, der nachher besonders auftritt.

Ein Beispiel zur Zusammensetzung (I) giebt diese Gruppe:

$$p \quad q \quad r \quad \alpha x p + \beta y q + \gamma z r.$$

In Fig. 53, die weiter unten folgt, ist die Zusammensetzung schematisch unter I. dargestellt. Der Fall, dass eine der Zahlen α, β, γ verschwindet, ist dabei deshalb besonders angegeben, weil in diesem Falle die erste derivierte Gruppe bloss zweigliedrig ist.

Zweiter Fall.

Zweiter Fall: Zwei invariante Geraden und zwei invariante Punkte. Letztere seien die Bildpunkte von $X_1 f$, $X_2 f$, erstere die Verbindende beider Punkte sowie die Gerade vom Bildpunkt von $X_2 f$ nach dem von $X_3 f$. Der zugehörige Typus unter IX in § 3 des 19. Kap. ist der zweite, wenn darin 1 und 2 vertauscht werden, sodass er so zu schreiben ist:

$$x_3 p_2 + \alpha x_1 p_1 + \beta(x_2 p_2 + x_3 p_3).$$

Es ist somit anzunehmen:

$$\text{(II)} \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv \alpha X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv \beta X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv X_2 f + \beta X_3 f \\ (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

Wäre $\alpha = \beta$, so würden mehr als zwei Punkte in Ruhe bleiben.

Diese Zusammensetzung hat z. B. die Gruppe

$$p \quad q \quad r \quad zq + \alpha xp + \beta(yq + zr).$$

In Fig. 53 ist die Zusammensetzung unter II. dargestellt. Die Fälle $\alpha = 0$ bez. $\beta = 0$, in denen die erste derivierte Gruppe nur zweigliedrig ist, sind durch besondere Figuren wiedergegeben.

Dritter Fall.

Dritter Fall: Eine invariante Gerade und ein invarianter Punkt. Letzterer sei der Bildpunkt von $X_1 f$, erstere die Gerade von diesem Punkte zum Bildpunkt von $X_2 f$. Die zugehörigen Typen unter IX in § 3 des 19. Kap. sind der dritte und vierte, in denen aber 1 mit 2 zu vertauschen ist, also entweder:

$$x_3 p_2 + x_2 p_1 + x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

oder:

$$x_3 p_2 + x_2 p_1.$$

Daher ist entweder:

$$\text{(III)} \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv X_1 f + X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv X_2 f + X_3 f \end{cases}$$

oder:

$$\text{(III}'\text{)} \quad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv 0, \quad (X_2 X_4) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_4) \equiv X_2 f. \end{cases}$$

Die erstere Zusammensetzung hat z. B. die Gruppe:

$$p \quad q \quad r \quad zq + yp + xp + yq + zr,$$

die letztere diese:

$$p \quad q \quad r \quad zq + yp.$$

Siehe wieder Fig. 53 unter III.

Vierter Fall.

Vierter Fall: Invariante Strahlen eines Büschels und invariante Punktreihe, deren Gerade dem Büschel nicht angehört. Dies ist der Fall des fünften Typus unter IX in § 3 des 19. Kap. Wenn wir den Bildpunkt von $X_3 f$ als Mittelpunkt des Büschels, die Gerade durch die Bildpunkte von $X_1 f$ und $X_2 f$ als Träger der Punktreihe wählen,

so haben wir in dem angegebenen Typus 1 mit 3 zu vertauschen, sodass wir schreiben können:

$$\alpha x_1 p_1 + \alpha x_2 p_2 + \gamma x_3 p_3.$$

Es ergiebt sich daher:

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv \alpha X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv \alpha X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv \gamma X_3 f \\ (\alpha \neq \gamma). \end{cases}$$

Bei der Annahme $\alpha = \gamma$ würden alle Punkte der Ebene $e_4 = 0$ in Ruhe bleiben.

Hier haben wir als Beispiel die Gruppe:

$$p \quad q \quad r \quad \alpha(xp + yq) + \gamma zr.$$

Die Annahmen $\alpha = 0$ bez. $\gamma = 0$ sind besonders ausgezeichnet, da bei ihnen die erste derivierte Gruppe nur zweigliedrig ist. In der später zu gebenden Figurentafel 54 sind unter IV. die Zusammensetzungen dargestellt.

Fünfter Fall.

Fünfter Fall: Invariante Strahlen eines Büschels und invariante Punktreihe, deren Gerade dem Büschel angehört, d. h. der 6. und 7. Typus unter IX in § 3 des 19. Kap. Wir wählen als Punktreihe die Gerade, welche die Bildpunkte von $X_1 f$ und $X_2 f$ verbindet, als Mittelpunkt des Büschels den Bildpunkt von $X_2 f$. Alsdann liefern jene Typen:

$$x_3 p_2 + x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$$

bez.:

$$x_3 p_2$$

sofort die beiden Zusammensetzungen:

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv X_2 f + X_3 f \end{cases}$$

und:

$$(\mathrm{V}')\quad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv 0, \quad (X_2 X_4) \equiv 0, \quad (X_3 X_4) \equiv X_2 f. \end{cases}$$

Beispiele dazu sind die Gruppen:

$$p \quad q \quad r \quad zq + xp + yq + zr$$

und:

$$p \quad q \quad r \quad zq.$$

In Fig. 54 sind auch diese beiden Zusammensetzungen unter V. schematisch dargestellt.

Sechster Fall: Alle Punkte der Ebene $e_4 = 0$ bleiben in Ruhe. Hier haben wir entweder vom letzten Typus unter IX. in § 3 des 19. Kap. auszugehen: $x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$ oder aber von der identischen Transformation. Erstere Annahme giebt die Zusammensetzung:

Sechster Fall.

$$\text{(VI)} \quad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv X_1 f, \quad (X_2 X_4) \equiv X_2 f, \quad (X_3 X_4) \equiv X_3 f, \end{cases}$$

letztere diese:

$$\text{(VI')} \quad \begin{cases} (X_1 X_2) \equiv (X_2 X_3) \equiv (X_3 X_1) \equiv 0, \\ (X_1 X_4) \equiv (X_2 X_4) \equiv (X_3 X_4) \equiv 0. \end{cases}$$

Diese Zusammensetzungen besitzen z. B. die Gruppen

$$p \quad q \quad r \quad xp + yq + zr$$

und

$$q \quad xq \quad x^2 q \quad x^3 q.$$

In Fig. 54 sind diese Zusammensetzungen unter VI. dargestellt.

Hiermit ist die Bestimmung aller möglichen Zusammensetzungen von viergliedrigen Gruppen beendet. Dass die aufgestellten Typen sämtlich wesentlich von einander verschieden sind, erhellt ohne weiteres.

In betreff der Figuren heben wir noch hervor: Auf den Tafeln 53 und 54 sind die invarianten Untergruppen, die durch Punkte und Geraden der Ebene $e_4 = 0$ dargestellt werden, besonders hervorgehoben, ebenso die ersten derivierten Gruppen. Doch sind diejenigen invarianten Untergruppen nicht markiert, welche die erste derivierte Gruppe enthalten. Letzteres aus dem Grunde, weil ja *jede* ebene Mannigfaltigkeit, welche die ebene Mannigfaltigkeit der ersten derivierten Gruppe enthält, eine invariante Untergruppe darstellt. Die invarianten Untergruppen, die nicht in der Ebene $e_4 = 0$ darzustellen wären, sind ebenfalls nicht besonders markiert, weil sie evident sind. Sie werden nämlich durch die Geraden bez. Ebenen vom Bildpunkte von $X_4 f$ nach allen invarianten Punkten bez. Geraden der Ebene $e_4 = 0$ gegeben. Die graphische Wiedergabe dieser invarianten Untergruppen würde die Bilder verwirren. Dass bei der letzten Figur von diesen Grundsätzen abgewichen wurde, liegt darin, dass hier jeder Punkt, jede Gerade und jede Ebene des R_3 eine invariante Untergruppe darstellt.

Bemerkungen zu den Figurentafeln.

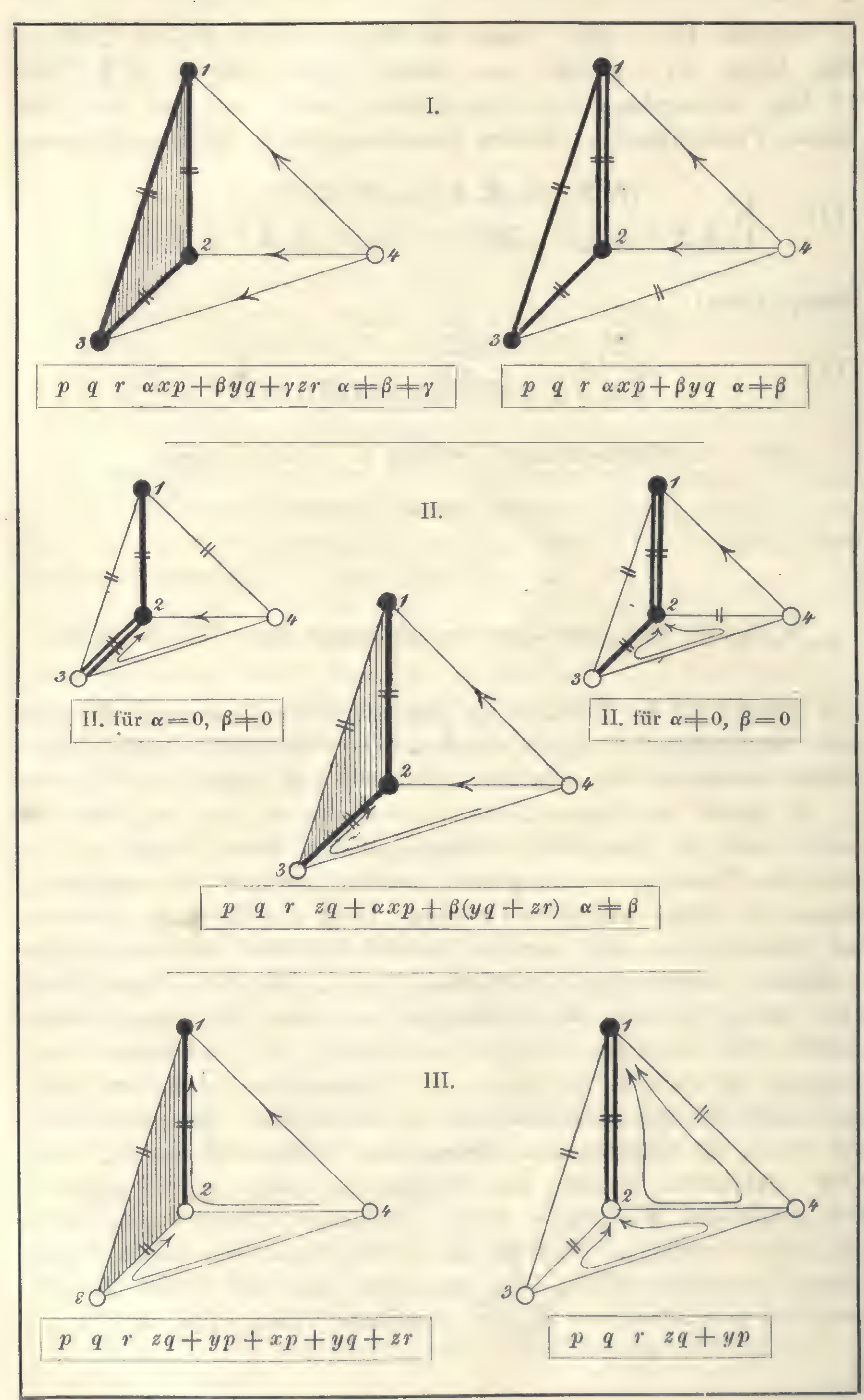

I.
1
2
3
4
$p \quad q \quad r \quad \alpha xp + \beta yq + \gamma zr \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma$
$p \quad q \quad r \quad \alpha xp + \beta yq \quad \alpha \neq \beta$
II.
II. für $\alpha = 0, \ \beta \neq 0$
II. für $\alpha \neq 0, \ \beta = 0$
$p \quad q \quad r \quad zq + \alpha xp + \beta(yq + zr) \quad \alpha \neq \beta$
III.
$p \quad q \quad r \quad zq + yp + xp + yq + zr$
$p \quad q \quad r \quad zq + yp$

Fig. 53.

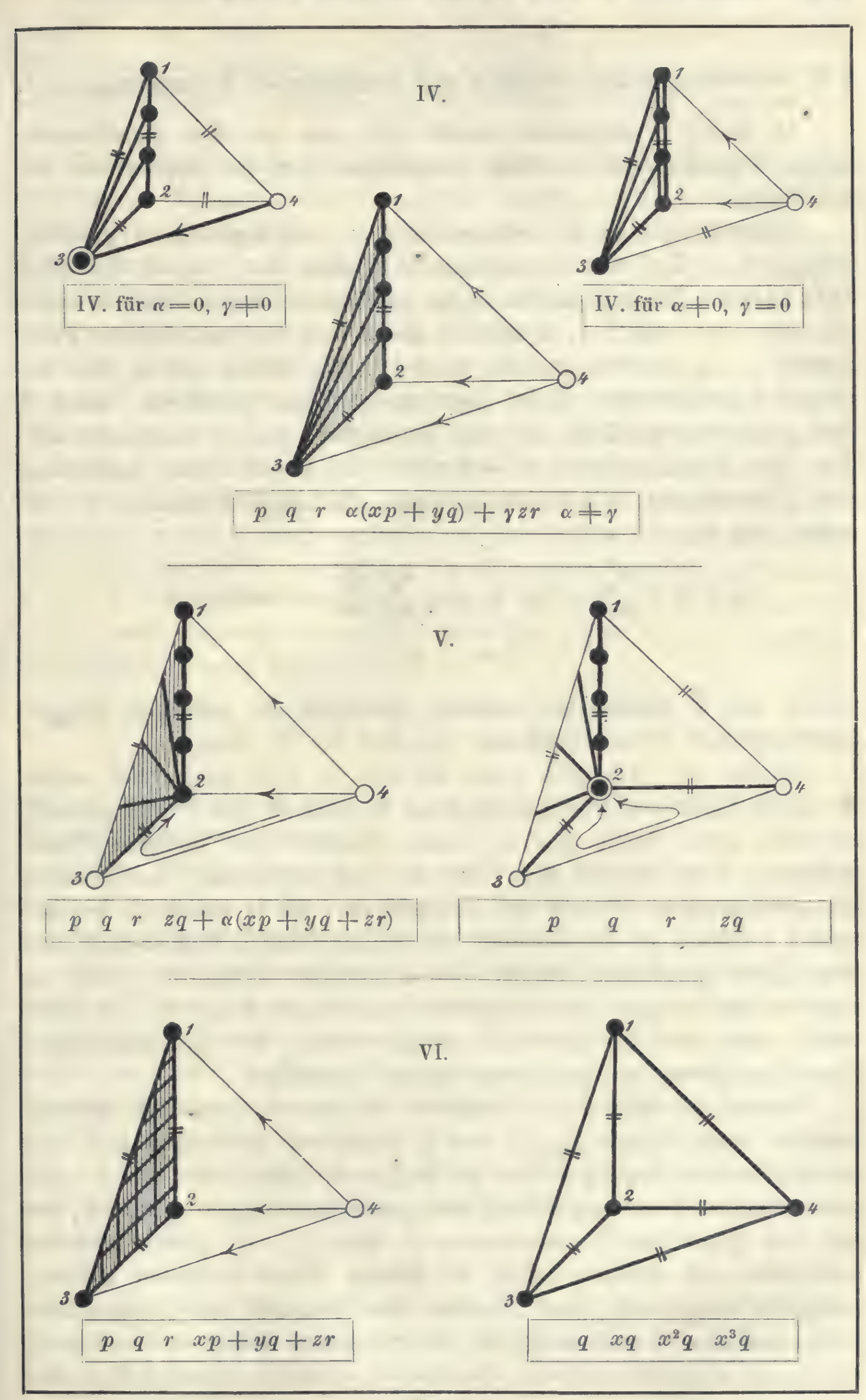

IV.
1
2
3
4
IV. für $\alpha = 0,\ \gamma \neq 0$
IV. für $\alpha \neq 0,\ \gamma = 0$
$p \quad q \quad r \quad \alpha(xp + yq) + \gamma zr \quad \alpha \neq \gamma$
V.
$p \quad q \quad r \quad zq + \alpha(xp + yq + zr)$
$p \quad q \quad r \quad zq$
VI.
$p \quad q \quad r \quad xp + yq + zr$
$q \quad xq \quad x^2q \quad x^3q$

Fig. 54.

§ 6. Gleichberechtigte endliche und infinitesimale Transformationen.

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit den gleichberechtigten Transformationen einer vorgelegten Gruppe eingehender beschäftigen.

Angenommen, in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ liege eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ vor; die adjungierte Gruppe in $e_1 \ldots e_r$ sei $E_1 f \ldots E_r f$. Jede endliche Transformation S der gegebenen Gruppe kann in canonischer Form (vgl. § 1, 2 des 18. Kap.) mit den canonischen Parametern $e_1 \ldots e_r$ gegeben gedacht werden. Wir wollen auf sie eine beliebige Transformation T der gegebenen Gruppe ausführen. Auch T darf in canonischer Form mit den Parametern $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ vorgestellt werden. Die Transformation $S' = T^{-1} S T$, die aus S durch Ausführung von T hervorgeht, wird dann gewisse canonische Parameter $e_1' \ldots e_r'$ haben, für die

$$e_i' = e_i + \sum_1^r {}_k \varepsilon_k E_k e_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^r {}_k \sum {}_l \varepsilon_k \varepsilon_l E_k(E_l e_i) + \cdots$$

$$(i = 1, 2 \ldots r)$$

ist. S und S' heissen *mit einander* (*innerhalb der gegebenen Gruppe*) *gleichberechtigte Transformationen* (vgl. § 3 des 18. Kap.).

Deuten wir, wie in § 1 des 18. Kap., S. 460, ausgeführt wurde, $e_1 \ldots e_r$ als *Cartesische* Coordinaten eines Raumes R_r von r Dimensionen, so stellt jeder Punkt $(e_1 \ldots e_r)$ dieses Raumes eine endliche Transformation S der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ dar und umgekehrt. Insbesondere der Anfangspunkt O stellt die Identität dar, die O unendlich benachbarten Punkte $(e_1 \ldots e_r)$ bedeuten die infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i X_i f$ der gegebenen Gruppe. Die adjungierte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ ist alsdann eine Gruppe von Punkttransformationen dieses R_r, sie führt gerade nur solche Punkte in einander über, die gleichberechtigte Transformationen der gegebenen Gruppe darstellen.

Denken wir uns also, wir hätten die *kleinste invariante Mannigfaltigkeit* eines Punktes $(e_1 \ldots e_r)$ des R_r gegenüber der Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ schon bestimmt (vgl. § 1 des 16. Kap.), so hätten wir damit auch alle endlichen Transformationen der gegebenen Gruppe gefunden, die mit der gegebenen Transformation S oder $(e_1 \ldots e_r)$ gleichberechtigt sind. Sie sind nämlich durch die Punkte dieser kleinsten Mannigfaltigkeit dargestellt. Das *Problem*, alle Scharen von gleichberechtigten endlichen Transformationen der gegebenen Gruppe zu bestimmen, deckt sich also mit dem, alle kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten

Erstes Problem: Gleichber. endl. Transf.

gegenüber der adjungierten Gruppe $E_1 f \dots E_r f$ im Raume R_r von r Dimensionen zu bestimmen. Hierfür aber haben wir im 16. Kap. eine allgemeine Methode gefunden, die wir nachher anwenden werden.

Zweites Problem: Gleichber. eingliedr. Untergr.

Vorher besprechen wir ein *zweites Problem:* Da jede eingliedrige Untergruppe der gegebenen Gruppe bei Ausführung einer Transformation der gegebenen Gruppe wieder in eine eingliedrige Untergruppe übergeht, so kann man auch nach den (*innerhalb der gegebenen Gruppe*) *gleichberechtigten eingliedrigen Untergruppen* fragen. Jede solche wird durch einen Strahl durch den Anfangspunkt O dargestellt; die adjungierte Gruppe führt — als lineare homogene Gruppe — jeden solchen Strahl wieder in Strahlen durch O über. Es wird also unsere Aufgabe sein, die Mannigfaltigkeit aller der Strahlen zu bestimmen, in die ein Strahl durch den Anfangspunkt bei der adjungierten Gruppe übergeht. Jede derartige Mannigfaltigkeit wird durch ein *in* $e_1 \dots e_r$ *homogenes* bei der adjungierten Gruppe invariantes Gleichungensystem dargestellt. Man findet bekanntlich diese Mannigfaltigkeiten, indem man zu den infinitesimalen Transformationen $E_1 f \dots E_r f$ der adjungierten Gruppe noch diejenige hinzufügt, die jeden Punkt in der Richtung seines Radiusvectors fortführt:

$$\mathsf{E}f \equiv e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + \cdots + e_r \frac{\partial f}{\partial e_r}$$

und sodann bei der Gruppe $E_1 f \dots E_r f$, $\mathsf{E}f$ die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten bestimmt.

Unser jetziges Problem kann übrigens offenbar auch so ausgesprochen werden: Allen Scharen von (*innerhalb der gegebenen Gruppe*) *gleichberechtigten infinitesimalen Transformationen* zu finden.

Wenn zwei endliche Transformationen der gegebenen Gruppe mit einander gleichberechtigt sind, so sind es auch die beiden eingliedrigen Untergruppen, denen sie angehören. Denn sind p und p' die Bildpunkte der beiden endlichen Transformationen im Raume R_r, so enthält die adjungierte Gruppe sicher eine Transformation, die p in p' überführt, also auch den Strahl Op in Op'. Diese Strahlen stellen aber die in Frage stehenden eingliedrigen Untergruppen dar. Man ersieht hieraus, *dass unser zweites Problem erledigt ist, sobald man das erste gelöst hat.*

Wir werden also eine endliche Transformation S der gegebenen Gruppe ins Auge fassen und die kleinste invariante Mannigfaltigkeit M ihres Bildpunktes p im Raume R_r gegenüber der adjungierten Gruppe aufsuchen. Wir wählen auf ihr beliebige Punkte allgemeiner

Lage p', Bildpunkte endlicher Transformationen S' der Gruppe $X_1 f \,.\,. X_r f$. Mit S sind alle S' gleichberechtigt und ausser ihnen keine Transformationen. Mit der eingliedrigen Untergruppe, der S angehört und die durch Op dargestellt wird, sind alle eingliedrigen Untergruppen gleichberechtigt, denen die S' angehören und die durch die Strahlen Op' dargestellt werden, und *ausserdem keine* eingliedrigen Untergruppen. Wenn der Strahl Op der Mannigfaltigkeit M vollständig angehört, so gehört ihr auch jeder der Strahlen Op' vollständig an, da p wie p' von allgemeiner Lage auf M ist (vgl. Satz 3, 4, § 1 des 16. Kap.). Alsdann also ist jede Transformation der durch Op dargestellten eingliedrigen Untergruppe mit jeder der durch Op' dargestellten gleichberechtigt. Wenn dagegen die Mannigfaltigkeit M den Strahl Op nicht enthält, so enthält sie auch nicht den Strahl Op'. In diesem Falle ist zwar die Untergruppe, die durch Op dargestellt wird, mit der durch Op' dargestellten gleichberechtigt, nicht aber jede Transformation der einen mit jeder der anderen.

Zurückführung auf ein Invarianten-Problem.

Unsere beiden Probleme kommen hiernach darauf hinaus, *alle kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten im Raume R_r bei der adjungierten Gruppe zu bestimmen.* Unter diesen Mannigfaltigkeiten haben dann nach dem Bemerkten diejenigen ein eigenes Interesse, die aus lauter Strahlen durch O bestehen, deren *Gleichungen* also in $e_1 \,.\,. e_r$ homogen sind.

Nachdem wir somit die Probleme auf ein schon früher erledigtes zurückgeführt haben, gehen wir dazu über, die früher entwickelte Methode anzuwenden. Wir machen dabei von einigen Formeln Gebrauch, die vorangeschickt werden sollen.

Formeln bei der adjungiert. Gruppe.

Nach dem Hauptsatze bestehen Relationen von der Form

$$(X_i X_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} X_s f \quad (i, k = 1, 2 \,.\,. r).$$

Nach Theorem 33, § 2 des 18 Kap., ist nun

$$(19) \qquad E_k f \equiv \sum_1^r {}_s \sum {}_i\, c_{iks} e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1, 2 \,.\,. r).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(20) \qquad \sum_1^r {}_i\, c_{iks} e_i = \varepsilon_{ks} \quad (k = 1, 2 \,.\,. r),$$

so ist auch:

$$(19') \qquad E_k f \equiv \sum_1^r {}^s \varepsilon_{ks} \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Wir bilden die Matrix aller $E_1 f \,.\,.\, E_r f$ und von

$$\mathsf{E} f \equiv e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + \cdots + e_r \frac{\partial f}{\partial e_r},$$

nämlich:

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1r} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varepsilon_{r1} & \varepsilon_{r2} & \cdots & \varepsilon_{rr} \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_r \end{vmatrix}.$$

Die r-reihige Determinante, die aus der Matrix durch Streichen der k^{ten} Horizontalreihe und Multiplication mit $(-1)^{r+1-k}$ hervorgeht, sei mit $\varDelta_k$ bezeichnet, insbondere aber $\varDelta_{r+1}$ kurz mit $\varDelta$. Es ist also $\varDelta$ die Determinante aller ε_{ks}. In § 1 dieses Kapitels haben wir in Formel (10) erkannt, dass $\varDelta$ identisch Null ist:

$$\varDelta \equiv | \varepsilon_{ks} | \equiv 0.$$

Es folgt hieraus, dass zwischen $E_1 f \,.\,.\, E_r f$ eine lineare Gleichung identisch besteht. In der That ist

$$(22) \qquad e_1 E_1 f + \cdots e_r E_r f \equiv 0,$$

denn hierin ist die linke Seite

$$\sum_1^r {}^k e_k E_k f \equiv \sum_{i,k,s}^{1\,.\,.\,r} c_{iks} e_i e_k \frac{\partial f}{\partial e_s}.$$

Unter dem Summenzeichen kommt $e_i e_k \frac{\partial f}{\partial e_s}$ zweimal, einmal mit dem Coefficienten c_{iks} und dann mit dem Coefficienten c_{kis} vor. Da aber $c_{iks} + c_{kis}$ nach dem dritten Fundamentalsatz Null ist, so ist auch die ganze Summe identisch Null. Die Identität (22) hat ihre begriffliche Erklärung darin, dass die infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe, die im homogenen Raume den Bildpunkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ besitzt, diesen Punkt in Ruhe lässt. Wir haben ja auch damals, als vom Verschwinden der Determinante $\varDelta$ die Rede war, in § 1 dieses Kap., $\varrho = 0$ als triviale Wurzel der dortigen Gleichung (9) bezeichnet, für die eben die damalige Gleichung (8) durch $\varepsilon_k = e_k$ erfüllt wird, wodurch unsere Identität (22) hervorgeht.

Die Identität (22) zerfällt unmittelbar in die r einzelnen:

$$e_1 \varepsilon_{1s} + e_2 \varepsilon_{2s} + \cdots + e_r \varepsilon_{rs} = 0$$
$$(s = 1, 2 \,.\,.\, r).$$

Denken wir uns zu dieser Gleichung links zum Schluss noch $e_s \cdot 0$ hinzugefügt, so liegt ein System von r linearen homogenen Gleichungen hinsichtlich der $r+1$ Grössen $e_1 \dots e_r$, 0 vor. Da diese $r+1$ Grössen nicht sämtlich Null sind, so folgt, dass sie sich zu einander wie die r-reihigen Unterdeterminanten der Matrix des Systems verhalten. Diese Matrix ist aber die Matrix (21), nur sind die Horizontalreihen mit den Verticalreihen vertauscht. Also folgt — auch genau hinsichtlich des Vorzeichens —

$$(23) \qquad \frac{\Delta_1}{e_1} = \frac{\Delta_2}{e_2} = \dots = \frac{\Delta_r}{e_r}.$$

Δ_k ist eine homogene ganze Function vom r^{ten} Grade in $e_1 \dots e_r$, also $\frac{\Delta_k}{e_k}$ eine homogene rationale Function $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades in $e_1 \dots e_r$. Es ist nun auch klar, dass sie eine ganze Function ist, denn wäre sie gebrochen, d. h. hätte sie den nicht hebbaren Nenner e_k, so müsste sie wegen (23) ebenso die nicht hebbaren Nenner $e_1 \dots e_r$ haben.

Die Function J.

Es existiert also eine homogene ganze Function $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades J von $e_1 \dots e_r$ derart, dass

$$(24) \qquad \Delta_k = e_k J \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

ist.

Ferner schicken wir einen Satz voraus, der sich auf die Form der Invarianten einer linearen homogenen Gruppe bezieht. Nach Theorem 29, § 4 des 16. Kap., findet man alle Invarianten einer Gruppe $U_1 f \dots U_q f$ durch Integration des (höchstens q-gliedrigen) vollständigen Systems $U_1 f = 0, \dots U_q f = 0$. Es gilt nun der

Invarianten einer lin. hom. Gruppe.

Satz 13: *Besitzt eine lineare homogene Gruppe in $e_1 \dots e_r$ gerade ϱ von einander unabhängige Invarianten, so besitzt sie auch ϱ von einander unabhängige Invarianten, die sämtlich homogen in $e_1 \dots e_r$ sind, und zwar entweder sind sie sämtlich homogen von nullter Ordnung, oder aber es sind $\varrho - 1$ homogen von nullter und eine homogen von erster Ordnung.*

Ist nämlich $U_1 f \dots U_q f$ die vorgelegte lineare homogene Gruppe in $e_1 \dots e_r$, so sind ihre Invarianten die Lösungen des vollständigen höchstens q-gliedrigen Systems

$$U_1 f = 0, \quad \dots U_q f = 0.$$

Angenommen, dies sei ein p-gliedriges vollständiges System $(p \leq q)$, sodass gerade $r - p$ von einander unabhängige Invarianten vorhanden sind. Alsdann bilden die folgenden linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen in $r+1$ unabhängigen Veränderlichen $e_1 \dots e_r, f$:

$$(25) \qquad U_1F = 0 \ldots U_qF = 0, \quad \mathsf{E}F + f\frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

ein vollständiges System, da wegen der Form von $\mathsf{E}f$ (vgl. S. 595)

$$\left(U_iF,\ \mathsf{E}F + f\frac{\partial F}{\partial f}\right) \equiv 0 \quad (i = 1, 2 \ldots q)$$

ist. Das System ist gerade $(p + 1)$-gliedrig, da die letzte Gleichung offenbar von den q ersten unabhängig ist. Das System enthält $r + 1$ Veränderliche, hat also $r + 1 - (p + 1) = r - p$ von einander unabhängige Lösungen $F(e_1 \ldots e_r, f)$. Unter diesen werden gewisse von f freie vorhanden sein. Für diese reduciert sich das System auf

$$U_1F = 0 \ldots U_qF = 0, \quad \mathsf{E}F = 0.$$

Diese Gleichungen bilden ein p-gliedriges System in $e_1 \ldots e_r$, wenn die letzte Gleichung nur eine Folge der übrigen ist, sonst ein $(p + 1)$-gliedriges. Sie besitzen also im ersten Fall gerade $r - p$, im zweiten Fall nur $r - p - 1$ von einander unabhängige Lösungen F, die Invarianten der Gruppe und wegen $\mathsf{E}F = 0$ homogen von *nullter* Ordnung in $e_1 \ldots e_r$ sind. Ist der zweite Fall eingetreten, so existiert noch eine nicht von f freie Lösung F von (25). Setzen wir sie gleich Constans:

$$F(e_1 \ldots e_r, f) = a,$$

so giebt die Auflösung nach f eine Function f, die den Gleichungen $U_1f = 0 \ldots U_qf = 0$ und

$$\mathsf{E}f = f$$

genügt, d. h. die Invariante der Gruppe und homogen von *erster* Ordnung ist.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir an die rechnerische Erledigung des oben begrifflich erläuterten Problems. Alle Invarianten der adjungierten Gruppe $E_1f \ldots E_rf$ findet man durch Integration des vollständigen Systems

$$E_1f = 0 \ldots E_rf = 0.$$

Es ist höchstens $(r - 1)$-gliedrig, da seine Determinante $\Delta \equiv 0$ ist, und besitzt deshalb mindestens eine Lösung. *Die adjungierte Gruppe besitzt also mindestens eine Invariante.* Nach dem vorhergehenden Satze wissen wir überdies, dass entweder alle Invarianten oder aber alle bis auf eine homogen von nullter Ordnung angenommen werden können, während im letzteren Falle die noch fehlende Invariante homogen von erster Ordnung gewählt werden kann.

Erste Annahme: Alle Inv. hom. von nullter Ordnung.

Sind *alle Invarianten homogen von nullter Ordnung*, so liefern sie gleich Const. gesetzt eine solche invariante Zerlegung des Raumes R_r mit den gewöhnlichen Coordinaten $e_1 .. e_r$, dass die einem Punkte allgemeiner Lage zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit aus lauter Strahlen durch O besteht. Wir werden aber weiter unten nachweisen, *dass der hier betrachtete Fall gar nicht eintreten kann.*

Zweite Annahme: Eine Inv. hom. von erster Ordn.

Ist eine Invariante homogen von erster Ordnung, während die übrigen homogen von nullter Ordnung gewählt werden können, so ergiebt sich, wenn die Invarianten gleich Constans gesetzt werden, eine solche invariante Zerlegung des R_r, dass die einem Punkt allgemeiner Lage zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit nicht mehr aus Strahlen durch O besteht. Wenn überhaupt nur eine Invariante — also die von erster Ordnung — vorhanden wäre, so würden also zwei allgemein gewählte eingliedrige Untergruppen oder infinitesimale Transformationen der gegebenen Gruppe, für die ja nur die Invarianten nullter Ordnung in betracht kommen, stets mit einander gleichberechtigt sein. Sind mehr als eine Invariante vorhanden, so ist dies nicht mehr der Fall. Aber bei beiden Annahmen sind nicht mehr die allgemeinen endlichen Transformationen zweier gleichberechtigter eingliedriger Untergruppen ebenfalls gleichberechtigt. Vielmehr giebt die von erster Ordnung homogene Invariante das Kriterium zur Entscheidung der Frage, welche endlichen Transformationen der zweiten Untergruppe mit einer allgemeinen der ersten gleichberechtigt sind. Es sind nämlich diejenigen, für welche die fragliche Invariante denselben Wert besitzt.

Bedeutung der Function J.

Eine besondere Rolle spielt die oben gefundene Function J.

Nehmen wir nämlich zunächst an, *J sei identisch Null*, so sind nach (24) $\Delta_1 .. \Delta_r$ sämtlich wie Δ identisch Null. Das vollständige System

$$(26) \qquad E_1 f = 0, \quad \ldots E_r f = 0, \quad \mathsf{E} f = 0$$

ist somit alsdann höchstens $(r-1)$-gliedrig und besitzt daher mindestens eine Lösung, die wegen $\mathsf{E} f = 0$ von nullter Ordnung homogen ist. Ist $J \equiv 0$, so ist es also sicher, dass die adjungierte Gruppe mindestens eine Invariante nullter Ordnung besitzt, anders ausgesprochen, dass zwei eingliedrige Untergruppen oder infinitesimale Transformationen der gegebenen Gruppe im allgemeinen nicht gleichberechtigt sind.

Ist andererseits die Function *J nicht identisch Null*, so sind $\Delta_1 .. \Delta_r$ nach (24) sämtlich von Null verschieden, sodass das voll-

ständige System (26) gerade r-gliedrig ist. *Dann also giebt es keine Invariante nullter Ordnung.* Mit anderen Worten: Zwei eingliedrige Untergruppen oder infinitesimale Transformationen der gegebenen Gruppe sind im allgemeinen gleichberechtigt. Im vorliegenden Falle besitzt die adjungierte Gruppe sicher nnr eine Invariante, die homogen ist und homogen vom ersten Grade angenommen werden kann. Wir werden später erkennen, dass J selbst eine Invariante ist und daher $J^{\frac{1}{r-1}}$ als die Invariante erster Ordnung gewählt werden kann, sodass im Falle $J \not\equiv 0$ die Bestimmung der Invarianten geleistet ist.

Beispiele.

1. Beispiel: Es liege die Gruppe vor

$$p \quad xp \quad x^2p.$$

Hier ist die adjungierte Gruppe (vgl. § 3 des 18. Kap.):

$$E_1 f \equiv - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - 2 e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2},$$

$$E_3 f \equiv e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3},$$

$$E_3 f \equiv 2 e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3},$$

also die Matrix (20):

$$\begin{vmatrix} - e_2 & - 2e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & - e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix},$$

daher, wie es sein muss, $\Delta \equiv 0$ und ausserdem

$$\Delta_1 \equiv - 4e_1^2 e_3 + e_1 e_2^2,$$

$$\Delta_2 \equiv - 4e_1 e_2 e_3 + e_2^3,$$

$$\Delta_3 \equiv - 4c_1 e_3^2 + c_2^2 e_3,$$

sodass

$$J \equiv \frac{\Delta_i}{e_i} \equiv - 4 e_1 e_3 + e_2^2$$

wird. $J = 0$ stellt einen einzeln invarianten Kegel im Raume R_3 mit den Cartesischen Coordinaten e_1, e_2, e_3 dar. Um alle Invarianten der adjungierten Gruppe zu finden, haben wir das vollständige System zu integrieren:

$$E_1 f = 0, \quad E_2 f = 0, \quad E_3 f = 0,$$

das zweigliedrig ist. Man erkennt, dass $f = J$ eine Lösung des Systems ist. Insbesondere ist also $\sqrt{e_2^2 - 4 e_1 e_3}$ die Invariante erster

Ordnung. $\sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3} = \text{Const.}$ stellt also eine Schar von einzeln invarianten Flächen zweiter Ordnung dar. Von allen diesen besteht nur der Kegel $e_2^2 - 4e_1e_3 = 0$ aus lauter Strahlen durch O. Für einen Punkt allgemeiner Lage des Raumes R_3 ist die hindurchgehende Fläche $\sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3} = \text{Const.}$ die kleinste invariante Mannigfaltigkeit. Specieller Lage sind nur die Punkte des Kegels $J = 0$. Für keinen Punkt von $J = 0$, ausser dem invarianten Anfangspunkt, verschwinden alle zweireihigen Determinanten von

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} -e_2 & -2e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2 \end{vmatrix}.$$

Daher ist der Kegel $J = 0$ für jeden seiner Punkte, ausser der Spitze, die kleinste invariante Mannigfaltigkeit. Hieraus schliessen wir: Bei der Gruppe $p,\ xp,\ x^2p$ sind alle endlichen Transformationen (e_1, e_2, e_3), für die $\sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3}$ denselben Wert hat, gleichberechtigt. Dagegen sind überhaupt alle eingliedrigen Untergruppen oder, was dasselbe ist, infinitesimalen Transformationen $e_1p + e_2xp + e_3x^2p$ mit einander gleichberechtigt, mit Ausnahme derer, für die $e_2^2 = 4e_1e_3$ ist. Diese sind nur unter sich gleichberechtigt. Hätten wir e_1, e_2, e_3 als homogene Punktcoordinaten der Ebene gedeutet und entsprechend nur die infinitesimalen Transformationen ins Auge gefasst, so hätte $J = 0$ einen invarianten Kegelschnitt dargestellt, wie in Fig. 45, § 3 des 18. Kap.

2. Beispiel: Bei der Gruppe

$$p \quad q \quad xp + cyq \quad (c \neq 0)$$

lautet die adjungierte Gruppe:

$$E_1f \equiv -e_3\frac{\partial f}{\partial e_1}, \quad E_2f \equiv -ce_3\frac{\partial f}{\partial e_2}, \quad E_3f \equiv e_1\frac{\partial f}{\partial e_1} + ce_2\frac{\partial f}{\partial e_2},$$

also die Matrix (20):

$$\begin{vmatrix} -e_3 & 0 & 0 \\ 0 & -ce_3 & 0 \\ e_1 & ce_2 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}.$$

Hier ist

$$\Delta_1 \equiv -ce_1e_3^2, \quad \Delta_2 \equiv -ce_2e_3^2, \quad \Delta_3 \equiv -ce_3^3.$$

also

$$J \equiv \frac{\Delta_i}{e} \equiv -ce_3^2.$$

Das vollständige System

$$E_1 f = 0, \quad E_2 f = 0, \quad E_3 f = 0$$

in e_1, e_2, e_3 ist zweigliedrig und wird durch $f = J$ erfüllt. Wir können e_3 als die lineare Invariante wählen. $e_3 = \text{Const.}$ stellt also eine Schar von ∞^1 einzeln invarianten Ebenen im R_3 dar. Specieller Lage sind nur die Punkte von $e_3 = 0$. Für diese verschwinden alle zweireihigen Determinanten von

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} -e_3 & 0 & 0 \\ 0 & -ce_3 & 0 \\ e_1 & ce_2 & 0 \end{vmatrix},$$

nicht aber die einreihigen — abgesehen vom Anfangspunkt. Für $e_3 = 0$ haben wir also nur ein eingliedriges System mit der Lösung $e_1^c : e_2$. Hieraus folgt, da überdies nur die Ebene $e_3 = 0$ aus lauter Strahlen durch O besteht: Zwei endliche Transformationen (e_1, e_2, e_3) der gegebenen Gruppe sind dann und nur dann gleichberechtigt, wenn e_3 bei beiden denselben von Null verschiedenen Wert hat oder bei beiden $e_3 = 0$ ist und $e_1^c : e_2$ gleichen Wert hat. Zwei eingliedrige Untergruppen allgemeiner Lage sind dagegen stets gleichberechtigt. Nur die eingliedrigen Untergruppen $e_1 p + e_2 q$ sind stets nur unter sich gleichberechtigt.

3. *Beispiel:* Bei der Gruppe

$$p \quad xp \quad q$$

ist die adjungierte:

$$E_1 f \equiv -e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1}, \quad E_2 f \equiv e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1}, \quad E_3 f \equiv 0,$$

also $\varDelta_1 \equiv \varDelta_2 \equiv \varDelta_3 \equiv 0$ und daher $J \equiv 0$. Hier existiert also sicher eine Invariante nullter Ordnung. In der That ist das vollständige System

$$E_1 f = 0, \quad E_2 f = 0, \quad E_3 f = 0$$

nur eingliedrig und besitzt die Lösungen e_2 und e_3, sodass $\frac{e_2}{e_3}$ die Invariante nullter Ordnung ist. Der Raum zerfällt in ∞^2 einzeln invariante Geraden $e_2 = \text{Const.}$, $e_3 = \text{Const.}$ parallel der ersten Axe. Einziger Punkt, für den auch alle einreihigen Determinanten von $\varDelta$ verschwinden, ist der Anfangspunkt. Zwei endliche Transformationen (e_1, e_2, e_3) der vorgelegten Gruppe sind also nur dann gleichberechtigt, wenn e_2 und e_3 bei beiden denselben Wert haben. Von den eingliedrigen Untergruppen $e_1 p + e_2 xp + e_3 q$ sind diejenigen gleich-

berechtigt, bei denen $\frac{e_2}{e_3}$ denselben Wert hat. Nur die eingliedrige Untergruppe p, die allein durch einen invarianten Strahl durch O dargestellt wird, besitzt keine gleichberechtigte. —

Wir wollen nun ein anderes früher, in § 1, betrachtetes Problem wieder aufnehmen, weil es mit unseren jetzigen Fragen in engem Zusammenhang steht.

Involutions-G_2, denen $\Sigma e X f$ angehört.

Liegt nämlich eine bestimmte infinitesimale Transformation $\Sigma e_i X_i f$ der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ vor, so findet man alle zweigliedrigen *Involutions*-Untergruppen, denen sie angehört, indem man *zunächst* $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$ so bestimmt, dass identisch

$$\left(\sum_1^r {}^i e_i X_i f,\ \sum_1^r {}^k \varepsilon_k X_k f\right) \equiv \sum_{s,i,k}^{1..r} e_i \varepsilon_k c_{iks} X_s f = \varrho \sum_1^r {}^s \varepsilon_s X_s f$$

wird. Dies giebt für ϱ nach § 1 die Bedingung

$$\Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} \sum^i e_i c_{i11} - \varrho & \sum^i e_i c_{i21} & \cdot\ \cdot & \sum^i e_i c_{ir1} \\ \sum^i e_i c_{i12} & \sum^i e_i c_{i22} - \varrho & \cdot\ \cdot & \sum^i c_i c_{ir2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \sum^i e_i c_{i1r} & \sum^i e_i c_{i2r} & \cdot\ \cdot & \sum^i e_i c_{irr} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Man hat *alsdann* nur die Wurzeln $\varrho = 0$ dieser Gleichung r^{ten} Grades zu berücksichtigen. Durch Nullsetzen von ϱ aber geht aus $\Delta(\varrho)$ die identisch verschwindende Determinante Δ hervor:

$$\Delta(0) = \Delta \equiv \left| \sum_1^r {}^i e_i c_{iks} \right| \equiv |\, \varepsilon_{ks} \,| \equiv 0.$$

Wenn nun zwar alle $(r - m)$-reihigen, nicht aber alle $(r - m - 1)$-reihigen Unterdeterminanten von Δ verschwinden, so ist $\varrho = 0$ bekanntlich eine mindestens $(m + 1)$fache Wurzel der Gleichung $\Delta(\varrho) = 0$. Für diese Wurzel reducieren sich die Bestimmungsgleichungen für $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$ (Gleichungen (8) in § 1) auf gerade $r - m - 1$ von einander unabhängige, sodass sie ∞^{m+1} Wertsysteme von $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r$, also nur ∞^m Wertsysteme der Verhältnisse $\varepsilon_1 : \dots : \varepsilon_r$ bestimmen. Unter diesen ist das System $e_1 : \dots : e_r$ vorhanden, das auszuschliessen ist. Die Wertsysteme $\varepsilon_1 : \dots : \varepsilon_r$ und $\varepsilon_1 + \lambda e_1 : \dots : \varepsilon_r + \lambda e_r$ liefern dieselbe Gruppe $\Sigma e_i X_i f$, $\Sigma \varepsilon_i X_i f$. Es giebt daher nur ∞^{m-1} Wertsysteme, die als wesentlich verschieden in betracht kommen. Die vorgelegte infinitesimale Transformation $\Sigma e_i X_i f$ gehört somit gerade ∞^{m-1} zweigliedrigen Involutions-Untergruppen an.

Andererseits hat bei der gemachten Voraussetzung, dass alle $(r-m)$-reihigen, nicht aber alle $(r-m-1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\Delta(\varrho)$ für $\varrho=0$ verschwinden, die adjungierte Gruppe

$$E_k f \equiv \sum_1^r {}_s \sum_i c_{iks}\, e_i \frac{\partial f}{\partial e_s} \quad (k=1,\,2\,..\,r)$$

nach Theorem 29, § 4 des 16. Kap., gerade $m+1$ von einander unabhängige Invarianten.

Satz 14: *In einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f\,..\,X_r f$ gehört eine allgemein gewählte infinitesimale Transformation dann und nur dann gerade ∞^{m-1} verschiedenen zweigliedrigen Involutions-Untergruppen an, wenn die adjungierte Gruppe $E_1 f\,..\,E_r f$ der Gruppe $X_1 f\,..\,X_r f$ gerade $m+1$ von einander unabhängige Invarianten besitzt.*

Wenn die adjungierte Gruppe nur eine Invariante besitzt, so ist die Zahl jener Involutions-Untergruppen gleich Null, wenn sie gerade zwei Invarianten besitzt, so ist diese Zahl Eins, wie man ohne Mühe einsieht, wenn man die obige Betrachtung für diese besonderen Fälle durchführt. Es ist daher in unserem Satze für $n=-1$ die Grösse ∞^n gleich Null, für $n=0$ aber gleich Eins zu setzen.

Im Fall unseres Satzes ist die kleinste invariante Mannigfaltigkeit, welche die adjungierte Gruppe einem Punkte $(e_1\,..\,e_r)$ allgemeiner Lage im r-fach ausgedehnten Raume R_r mit den gewöhnlichen Punktcoordinaten $e_1\,..\,e_r$ zuordnet, gerade $(r-m-1)$fach ausgedehnt.

Wir werden den Satz nachher anwenden, um zu beweisen, dass die adjungierte Gruppe sicher eine Invariante besitzt, die nicht von nullter Ordnung homogen ist.

Um diese Anwendung machen zu können, fassen wir noch ein anderes ebenfalls in § 1 schon besprochenes Problem abermals ins Auge:

Inf. Transf., die $\Sigma e X f$ in Ruhe lassen.

Eine vorgelegte infinitesimale Transformation $\Sigma e_i X_i f$ der gegebenen Gruppe bleibt bei einer anderen $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ in Ruhe, d. h. der Strahl, welcher die eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_i X_i f$ im R_r darstellt, bleibt bei der infinitesimalen Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ der adjungierten Gruppe in Ruhe, wenn

$$(\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma \varepsilon_k X_k f) = \sigma \Sigma e_i X_i f$$

ist, nach Satz 2, § 3 des 18. Kap. Die Frage nach den $\Sigma \varepsilon_k X_k f$, die dieser Bedingung genügen, wurde nun schon in § 1 besprochen. Siehe Gleichung (6) des § 1. Wir bemerkten schon damals, dass es vor-

kommen kann, dass kein Wertsystem $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ existiert, das unserer Forderung bei nicht verschwindendem σ genügt.

Jetzt aber werden wir zeigen, dass in der That, sobald $e_1 \ldots e_r$ *allgemein* gewählt werden, nur solche unsere Forderung erfüllende Wertsysteme $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ existieren können, für die der Factor $\sigma = 0$ ist. Mit anderen Worten, wir werden beweisen, dass in einer vorgelegten Gruppe nicht jede allgemein gewählte eingliedrige Untergruppe einer zweigliedrigen Untergruppe als *invariante* Untergruppe angehören kann, es sei denn, dass die zweigliedrige eine Involutionsgruppe ist.

Wir nehmen — entgegen dem, was wir beweisen wollen — an, dass sich $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r$ so bestimmen lassen, dass

$$(\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma \varepsilon_k X_k f) \equiv \sigma \Sigma e_i X_i f \quad (\sigma \neq 0)$$

ist, wenn $\Sigma e_i X_i f$ eine *allgemein* gewählte infinitesimale Transformation der gegebenen Gruppe bedeutet. Bei dieser Annahme enthält die Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ mindestens ∞^{r-1} zweigliedrige Untergruppen G_2 mit nicht vertauschbaren Transformationen, da jede der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i X_i f$ in mindestens einer als invariante Untergruppe enthalten ist. Wir wollen uns ein anschauliches Bild davon machen, indem wir auf die geometrische Deutung zurückgehen, die wir früher häufig benutzten. Wir deuten $e_1 \ldots e_r$ als *homogene* Punktcoordinaten in einem Raume R_{r-1} von nur $r-1$ Dimensionen, der durch die adjungierte Gruppe $E_1 f \ldots E_r f$ in sich transformiert wird. In diesem Raume werden jene G_2 durch ∞^{r-1} Geraden dargestellt, sodass durch jeden Punkt mindestens eine Gerade hindurchgeht. Nehmen wir an, durch einen Punkt allgemeiner Lage gehen gerade ∞^p dieser Geraden. Da es insgesamt ∞^{r-1} Punkte giebt und je ∞^1 Punkte auf einer Geraden liegen, so sind dann $\infty^{p+(r-1)-1}$ Geraden vorhanden. Es sollen aber mindestens ∞^{r-1} sein. Daher ist:

$$p + r - 2 \geqq r - 1,$$

also

$$p \geqq 1.$$

Durch einen beliebigen Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ gehen also mindestens ∞^1 solche Geraden, darunter mindestens eine, die eine G_2 darstellt, in der gerade $\Sigma e_i X_i f$ selbst invariant ist.

Es ist sicher, dass $\Sigma e_i X_i f$ nicht in allen den G_2 invariant ist, die durch jene ∞^p Geraden dargestellt werden. Denn durch jeden anderen Punkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ geht ja auch mindestens eine Gerade, die eine G_2 darstellt, in der $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ invariant ist. Von allen diesen ∞^{r-1} Geraden gehen, wie wir sahen, sicher ∞^1 durch den Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$.

Und diese ∞^1 Geraden stellen somit G_2 dar, die nicht $\Sigma e_i X_i f$ als invariant enthalten.

Also werden unter den ∞^p G_2, die nicht Involutionsgruppen sind und die $\Sigma e_i X_i f$ enthalten, sicher mindestens ∞^1 solche vorhanden sein, die $\Sigma e_i X_i f$ nicht als invariant enthalten. Wir fassen alle diese G_2 ins Auge. Sie werden durch gewisse ∞^q Geraden durch den Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ dargestellt, und zwar ist q mindestens gleich Eins. Auf jeder dieser Geraden liegt ein Punkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ derart, dass

$$(27) \qquad (\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma \varepsilon_k X_k f) \equiv \varrho \Sigma \varepsilon_k X_k f$$

ist. Diese Punkte $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ bilden eine $q$fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_q. Diese Mannigfaltigkeit ist natürlich continuierlich, wenn wir die beschränkende Annahme $\varrho \neq 0$ nicht machen. Ihr gehört dann offenbar auch der Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ selbst an, da

$$(\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma e_i X_i f) \equiv 0 \cdot \Sigma e_i X_i f$$

ist. Führt man nun die infinitesimale Transformation $\Sigma e_i E_i f$ der adjungierten Gruppe aus, so bleibt nach (27) und nach Satz 2, § 3 des 18. Kap. jeder Punkt $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ dieser M_q in Ruhe. Ist die mindestens einfach ausgedehnte M_q nicht selbst eben, so liegt sie doch in einer kleinsten ebenen Mannigfaltigkeit M, die also auch mindestens einfach ausgedehnt ist. Sie wird erzeugt von allen Geraden, welche die M_q schneiden. Da die adjungierte Gruppe Geraden in Geraden überführt, so lässt also die infinitesimale Transformation $\Sigma e_i E_i f$ jede Gerade in M in Ruhe, also auch jeden Punkt. Somit bleibt also auch jeder Punkt der Geraden, die den Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ mit irgend einem jener Punkte $(\varepsilon_1 : \cdots : \varepsilon_r)$ verbindet, für die (27) gilt, bei Ausführung von $\Sigma e_i E_i f$ in Ruhe. Hieraus folgt, dass, wie auch λ gewählt ist, stets

$$(\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma \varepsilon_k X_k f + \lambda \Sigma e_i X_i f)$$

die Form

$$\text{Const.}\ (\Sigma e_k X_k f + \lambda \Sigma e_i X_i f)$$

haben muss. Aber dies ist offenbar falsch. Somit ist unsere Voraussetzung falsch.

Wählt man also eine *allgemeine* infinitesimale Transformation $\Sigma e_i X_i f$ einer vorgelegten Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, so existiert *keine* infinitesimale Transformation $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ derart, dass

G_2, in der $\Sigma e X f$ als inv. enthalten ist.

$$(\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma \varepsilon_k X_k f) = \sigma \Sigma e_i X_i f$$

und dabei $\sigma \neq 0$ wird.

Unser Ergebnis kann auch so ausgesprochen werden: Es giebt gerade soviele infinitesimale Transformationen der adjungierten Gruppe,

die den Punkt allgemeiner Lage $(e_1 : \cdots : e_r)$ des R_{r-1} in Ruhe lassen, als es infinitesimale Transformationen $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ giebt, die mit $\Sigma e_i X_i f$ vertauschbar sind.

In der Betrachtung, die zum Satz 14 führte, nahmen wir an, dass es überhaupt ∞^{m+1} infinitesimale Transformationen $\Sigma \varepsilon_k X_k f$ giebt, die mit der allgemein gewählten infinitesimalen Transformation $\Sigma e_i X_i f$ vertauschbar sind, also nur ∞^{m-1} zweigliedrige Involutions-Untergruppen, denen $\Sigma e_i X_i f$ angehört. Es giebt dann nach unserem jetzigen Ergebnis gerade ∞^{m+1} infinitesimale Transformationen der adjungierten Gruppe, die den Punkt $(e_1 : \cdots : e_r)$ des R_{r-1} invariant lassen. Dieser Punkt erhält daher bei der adjungierten Gruppe durch alle $\Sigma \varepsilon_k E_k f$ genau $r - m - 1$ von einander unabhängige Fortschreitungsrichtungen. Also ist die allgemeine eingliedrige Untergruppe $\Sigma e_i X_i f$ der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ mit genau ∞^{r-m-1} eingliedrigen Untergruppen gleichberechtigt. Der R_{r-1} besitzt also bei der adjungierten Gruppe eine solche invariante Zerlegung, dass die einem Punkte allgemeiner Lage zugeordnete kleinste invariante Mannigfaltigkeit gerade $(r-m-1)$-fach ausgedehnt ist. Da der R_{r-1} gerade $(r-1)$fach ausgedehnt ist, so wird diese invariante Zerlegung durch gerade $r-1-(r-m-1)=m$ von einander unabhängige Invarianten der adjungierten Gruppe vermittelt. Aber wie wir wissen, kommen hierbei nur die Invarianten nullter Ordnung der adjungierten Gruppe in betracht. Somit folgt: Die adjungierte Gruppe besitzt genau m von einander unabhängige Invarianten von nullter Ordnung. Da sie nach Satz 14 überhaupt gerade $m + 1$ von einander unabhängige Invarianten besitzt, so ergiebt sich, dass eine Invariante vorhanden ist, die nicht nullter Ordnung ist, die also, wie wir sahen, homogen von erster Ordnung angenommen werden kann.

Existenz einer Inv. erster Ordn. der adj. Gruppe.

Satz 15: *Die adjungierte Gruppe $E_1 f \,.\,.\, E_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ besitzt stets eine Invariante, die homogen von erster Ordnung in $e_1 \,.\,.\, e_r$ ist. Die übrigen etwa noch vorhandenen Invarianten können sämtlich homogen von nullter Ordnung gewählt werden.*

Hiermit ist eine früher aufgestellte Behauptung bewiesen, und wir können weiterhin sagen:

Satz 16: *Es giebt keine Gruppe, in der eine allgemein ausgewählte endliche Transformation mit allen endlichen Transformationen ihrer eingliedrigen Untergruppe gleichberechtigt wäre.*

Da die von nullter Ordnung homogenen Invarianten das vollständige System

$$E_1 f = 0 \;.\,.\; E_r f = 0, \quad \mathsf{E} f = 0$$

befriedigen, aber die Invariante erster Ordnung die Gleichung $\mathsf{E}f = 0$ nicht erfüllt, so können wir den Satz 15 auch so aussprechen:

Satz 17: *Die adjungierte Gruppe $E_1 f \,..\, E_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ enthält niemals die infinitesimale Transformation*

$$e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + \cdots + e_r \frac{\partial f}{\partial e_r}.$$

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, eine andere früher aufgestellte Behauptung nachzuweisen. Wir müssen zeigen, dass die oben betrachtete Function J, sobald sie nicht identisch verschwindet, eine *Invariante* der adjungierten Gruppe ist.

J als Invariante der adj. Gruppe.

Wir sahen früher, dass, wenn $J \not\equiv 0$ ist, bei der adjungierten Gruppe keine Invariante nullter Ordnung vorhanden ist, d. h. dass die oben auftretende Zahl $m = 0$ ist. Es giebt also hier nach Satz 14 keine zweigliedrige Involutions-Untergruppe, der $\Sigma e_i X_i f$ angehört. Man könnte dies auch directer einsehen, worauf wir aber nicht eingehen wollen. Wir schliessen weiter: Wenn $J \not\equiv 0$ ist, ist es also unmöglich, die Forderung

$$(\Sigma e_i X_i f,\ \Sigma \varepsilon_k X_k f) = 0$$

durch ein anderes Wertsystem $\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_r$ zu erfüllen als durch das System $\lambda e_1 \,..\, \lambda e_r$, d. h. unter den Ausdrücken $(\Sigma e_i X_i f,\ X_k f)$ für $k = 1, 2 \,..\, r$ sind gerade $r - 1$ von einander unabhängige. Daher ist die erste derivierte Gruppe der Gruppe $X_1 f \,..\, X_r f$ mindestens $(r-1)$-gliedrig.

Die Function J ist also bei solchen r-gliedrigen Gruppen $X_1 f \,..\, X_r f$, deren erste derivierte Gruppe weniger als $(r-1)$-gliedrig ist, sicher identisch Null.

Ferner wissen wir, dass, sobald $J \not\equiv 0$ ist, die *Gleichung:*

$$J = 0$$

bei der adjungierten Gruppe $E_1 f \,..\, E_r f$ invariant ist. Also sind $E_1 J \,..\, E_r J$ sämtlich Null in Folge von $J = 0$. Nun aber ist J eine ganze homogene Function $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades in $e_1 \,..\, e_r$, also auch $E_1 J \,..\, E_r J$. Daher kann $E_i J$ nur dann vermöge $J = 0$ verschwinden, wenn $E_i J$ die Form Const. $\cdot\, J$ hat. Also ist allgemein:

$$E_i J \equiv c_i J \quad (i = 1, 2 \,..\, r).$$

Es handelt sich darum, nachzuweisen, dass die r Constanten c_i sämtlich Null sind.

Es ist offenbar

$$E_i(E_k J) - E_k(E_i J) \equiv c_i c_k J - c_k c_i J \equiv 0.$$

Mithin lassen alle $(E_i E_k)$ die Function J invariant. Die *erste derivierte*

Gruppe der adjungierten Gruppe lässt also J invariant. Wenn also die adjungierte Gruppe — oder, was auf dasselbe hinauskommt — die Gruppe $X_1 f .. X_r f$ ihre eigene erste derivierte Gruppe ist, wenn also diese Gruppen *perfect* sind (vgl. § 5 des 19. Kap.), so ist die Invarianz von J bei der ganzen adjungierten Gruppe bewiesen.

Fall einer perfecten Gruppe.

Fall einer G_r mit $(r-1)$-gliedr. derivierter Gruppe.

Es bleibt als nur noch übrig, die Invarianz von J bei einer solchen Gruppe $X_1 f .. X_r f$ zu beweisen, deren erste derivierte Gruppe gerade $(r-1)$-gliedrig ist. In einem solchen Falle sei $X_1 f .. X_{r-1} f$ die erste derivierte Gruppe. Alsdann sind auch $E_1 f .. E_{r-1} f$ linear aus den $(E_i E_k)$ ableitbar. Da diese Klammerausdrücke J invariant lassen, wie wir soeben sahen, so bleibt also nur zu beweisen, dass auch $E_r J \equiv 0$ ist. Aus

$$(E_i E_k) \equiv \sum_1^r {}_s\, c_{iks} E_s f$$

ersieht man, dass bei den gemachten Annahmen alle c_{iks}, in denen $s = r$ ist, Null werden. Also sind von den oben unter (20) eingeführten Grössen ε_{ks} auch alle die, in denen $s = r$ ist, gleich Null. Die Matrix (21) lautet daher jetzt:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{1,\,r-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{r1} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{r,\,r-1} & 0 \\ e_1 & \cdot & \cdot & e_{r-1} & e_r \end{vmatrix},$$

sodass

$$\varDelta_r = -e_r \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{1,\,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{r-1,\,1} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{r-1,\,r-1} \end{vmatrix}$$

wird. Da $J \equiv \frac{\varDelta_r}{e_r}$ ist, so kommt:

$$J \equiv - \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{1,\,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{r-1,\,1} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{r-1,\,r-1} \end{vmatrix} \equiv -D,$$

wenn D die vorstehende $(r-1)$-reihige Determinante bedeutet. Wir werden nun direct beweisen, dass $E_r J \equiv 0$ ist. Das Increment nämlich, das J bei $E_r f$ erfährt, ist dieses:

$$\delta J \equiv - \sum_1^{r-1} {}_i \sum {}_k \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik}.$$

Es ist aber nach (19)

$$E_r f \equiv \sum_1^{r-1} {}_s\, \varepsilon_{rs} \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

und also

$$\delta \varepsilon_{ik} \equiv \sum_1^r {}_j\, c_{jik} \delta e_j = \sum_1^{r-1} {}_j\, c_{jik}\, \varepsilon_{rj}\, \delta t = \sum_1^{r-1} {}_j\, c_{jik} \sum_1^r {}_l\, c_{lrj} e_l \delta t,$$

sodass

$$\delta J = - \sum_{i,k,j}^{1..r-1} \sum_1^r {}_l \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ik}} c_{jik} c_{lrj} e_l \delta t$$

wird. Nun besteht nach dem dritten Fundamentalsatz, § 4 des 15. Kap., die Relation:

$$\sum_1^{r-1} {}_j\, c_{jik}\, c_{lrj} = - \sum_1^{r-1} {}_j\, c_{rij}\, c_{jlk} - \sum_1^{r-1} {}_j\, c_{ilj}\, c_{jrk},$$

sodass kommt:

$$\delta J = \sum_{i,k,j}^{1..r-1} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ik}} \left(c_{rij} \sum_1^r {}_l\, c_{lkj}\, e_l + c_{jrk} \sum_1^r {}_l\, c_{ilj}\, e_l \right) \delta t.$$

Da nach dem dritten Fundamentalsatz $c_{jlk} = -c_{ljk}$ und $c_{ilj} = -c_{lij}$ ist, so lässt sich dies auch so schreiben:

$$\delta J = - \sum_{i,k,j}^{1..r-1} \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ik}} (c_{rij}\, \varepsilon_{jk} + c_{jrk}\, \varepsilon_{ij}) \delta t.$$

Verstehen wir für den Augenblick unter (ij) die Zahl 1 oder 0, je nachdem $i = j$ oder $\neq j$ ist, so gelten bekanntlich die Determinantensätze:

$$\sum_1^{r-1} {}_k \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{jk} = (ij) D, \quad \sum_1^{r-1} {}_i \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{ij} = (kj)\, D,$$

sodass kommt:

$$\delta J = - \left(\sum_{i,j}^{1..r-1} (ij) D c_{rij} + \sum_{k,j}^{1..r-1} (kj) D c_{jrk} \right) \delta t$$

$$= - \left(\sum_1^{r-1} {}_j\, c_{rjj} + \sum_1^{r-1} {}_j\, c_{jrj} \right) D \delta t.$$

Da aber $c_{rjj} + c_{jrj}$ nach dem dritten Fundamentalsatz Null ist, so kommt in der That:

$$\delta J = 0\,^{*)}.$$

---

*) Während des Druckes bemerkt Herr Engel, dass aus $E_i J = c_i J$ und (22) unmittelbar $c_i = 0$ folgt.

Satz 18: *Ist $E_1f\,..\,E_rf$ die adjungierte Gruppe einer r-gliedrigen Gruppe $X_1f\,..\,X_rf$ und verschwinden nicht alle r-reihigen Determinanten der Matrix von $E_1f\,..\,E_rf$ und*

$$e_1\frac{\partial f}{\partial e_1}+e_2\frac{\partial f}{\partial e_2}+\cdot\cdot+e_r\frac{\partial f}{\partial e_r},$$

so unterscheiden sich die r Determinanten, die durch Streichen einer der r ersten Horizontalreihen der Matrix hervorgehen, nur um die bez. Factoren $e_1\,..\,e_r$ und eventuell durch das Vorzeichen von einer nicht verschwindenden Function J, die ganz und homogen von $r-1^{\text{ter}}$ Ordnung in $e_1\,..\,e_r$ ist. J ist alsdann Invariante der adjungierten Gruppe, und jede Invariante der adjungierten Gruppe ist eine Function von J allein.

Unsere Betrachtungen lehren also, dass $J^{\frac{1}{r-1}}$ die Invariante erster Ordnung der adjungierten Gruppe ist. Übrigens haben wir auch gesehen, dass J nur bei solchen r-gliedrigen Gruppen als nicht identisch verschwindend auftreten kann, deren erste derivierte Gruppen entweder auch r-gliedrig oder aber $(r-1)$-gliedrig sind. Für beide Fälle haben wir früher Beispiele angegeben.

Wenn man diese Theorien verwertet, so kann man die in den §§ 3, 4 gegebene Bestimmung aller viergliedrigen Zusammensetzungen erheblich abkürzen. Wir gehen aber hierauf nicht weiter ein.

Kapitel 21.

Höhere complexe Zahlensysteme.

Die Theorie der höheren complexen Zahlensysteme bildet ein besonderes Kapitel der Gruppentheorie. Als eine interessante Anwendung der letzteren wollen wir daher die Elemente dieser Theorie an dieser Stelle entwickeln.

Zunächst wird es unsere Aufgabe sein, den Begriff: höheres complexes Zahlensystem zu erklären. Dabei erscheint es uns angebracht, eine knappe Übersicht über den Entwickelungsgang dieses Begriffs einzuflechten. Zugleich geben wir die wichtigsten Sätze über Zahlensysteme, sowie schliesslich eine Reihe von Beispielen.

§ 1. Begriff und ältere Geschichte der Zahlensysteme.

Geben wir zunächst *die allgemeinen Definitionen:*

Einheiten. Es sollen $e_1\,..\,e_n$ n Grössen — wir nennen sie *Einheiten* — be-

deuten, die nicht mit einander vergleichbar sind und von denen wir vorerst nichts darüber voraussetzen, ob und in wie weit sie den gewöhnlichen Rechenregeln folgen. Demgegenüber verstehen wir unter einer *gewöhnlichen Zahl* immer eine solche, die den gewöhnlichen Regeln der Arithmetik Folge leistet, also eine Zahl von der allgemeinen Form $\alpha + \beta i$, in der α und β reelle Zahlen sind und $i = \sqrt{-1}$ ist. Wir wollen übereinkommen, dass, wenn a eine gewöhnliche Zahl ist, das Product $a e_k$ mit $e_k a$ gleichbedeutend sein soll.

Sind $x_1 \ldots x_n$ irgend welche gewöhnliche Zahlen, so soll der Ausdruck

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

eine allgemeine complexe Zahl heissen. Wir bezeichnen sie kurz mit x. Das Pluszeichen steht hier nur, um überhaupt eine Verknüpfung herzustellen*).

Complexe Zahl.

Setzen wir nun Rechenregeln für diese Zahlen fest. *Addition* und *Subtraction* sollen die Operationen heissen, vermöge deren aus

Addition, Subtraction.

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$
$$y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$$

die beiden Zahlen folgen:

$$(x_1 \pm y_1) e_1 + (x_2 \pm y_2) e_2 + \cdots + (x_n \pm y_n) e_n,$$

wenn hier die Zeichen $\pm$ in den Klammern die gewöhnliche Addition und Subtraction andeuten. Das Ergebnis, die *Summe* bez. *Differenz* von x und y, bezeichnen wir wie gewöhnlich mit $x + y$ und $x - y$.

Bekanntlich bestehen für die gewöhnliche Addition drei Fundamentalgesetze, nämlich erstens das *associative*

Gesetze der Addition.

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

zweitens das *commutative*

$$a + b = b + a,$$

drittens giebt es eine Zahl Null, sodass

$$a + 0 = 0 + a = a$$

ist. Alle drei Gesetze werden von unseren höheren complexen Zahlen

*) Eigentlich müssten wir statt des Pluszeichens ein anderes Zeichen gebrauchen, um Verwechselungen mit dem sogleich einzuführenden Zeichen der Addition vorzubeugen. Wir sehen davon ab, da schliesslich beide Verknüpfungen doch dieselben Gesetze erfüllen.

offenbar auch erfüllt*). Die Zahl Null wird von $x_1 e_1 + \cdot\cdot + x_n e_n$ dann und nur dann dargestellt, wenn $x_1 .. x_n$ sämtlich verschwinden. Denn wegen der Unvergleichbarkeit der Einheiten $e_1 .. e_n$ mit einander oder, wie man sagt, wegen ihrer *Irreducibilität* soll zwischen ihnen keine lineare homogene Relation mit gewöhnlichen nicht sämtlich verschwindenden Coefficienten bestehen.

Irreducibilität der Einheiten.

Multiplication.

Distributives Gesetz.

Um einen *Multiplicationsprocess* zu definieren, knüpfen wir an die Addition an: Wie bei den gewöhnlichen Zahlen beide Operationen durch das *distributive* Gesetz

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

verknüpft sind, so wollen wir auch hier das distributive Gesetz aufrecht erhalten. Danach ist das *Product xy* zweier höherer Zahlen

$$x = \sum_1^n {}^i x_i e_i, \quad y = \sum_1^n {}^k y_k e_k$$

zunächst von der Form

$$(1) \qquad xy = \sum_1^n {}^i \sum {}^k x_i y_k e_i e_k .$$

Hier treten nun noch n^2 Producte $e_i e_k$ auf. Wie wir diese definieren wollen, steht völlig dahin. Auch braucht z. B. $e_i e_k$ nicht gleich $e_k e_i$ zu sein. Wir wollen aber verlangen, *dass jedes Product zweier höherer complexer Zahlen wieder eine höhere complexe Zahl ist,* dass also insbesondere jedes Product $e_i e_k$ eine solche Zahl ist:

*) Man kann allgemein nach den Operationen

$$x_i' = f_i(x_1 .. x_n, y_1 .. y_n) \quad (i = 1, 2 .. n)$$

fragen, welche die Grundgesetze

$$f_i(f(x, y)z) = f_i(x, f(y, z)),$$
$$f_i(x, y) = f_i(y, x)$$

erfüllen und bei denen eine Wertereihe $a_1 .. a_n$ existiert, für die

$$f_i(x, a) = f_i(a, x) = x_i$$

ist. Die Lie'schen Theoreme der Gruppentheorie zeigen ohne weiteres, dass man stets solche neue Veränderliche $\mathfrak{x}_1 .. \mathfrak{x}_n, \mathfrak{y}_1 .. \mathfrak{y}_n$ durch cogrediente Transformationen einführen kann, dass für diese Veränderlichen die Operation lautet:

$$\mathfrak{x}_i' = \mathfrak{x}_i + \mathfrak{y}_i \quad (i = 1, 2 .. n).$$

Schur hat dies in den Math. Ann. 33 (1888), S. 49—60, nochmals entwickelt, sowie die entsprechende Frage für den Multiplicationsprocess daselbst behandelt.

(2) $$e_i e_k = \sum_1^n {}^k \gamma_{iks} e_s \quad (i,\ k = 1,\ 2 \ldots n).$$

Die Coefficienten γ_{iks} können wir — vorbehaltlich späterer Einschränkungen — irgendwie als gewöhnliche Zahlen auswählen. Nun wird das Product (1):

(3) $$xy = \sum_{i,\,k,\,s}^{1 \ldots n} \gamma_{iks} x_i y_k e_s,$$

also ebenfalls eine complexe Zahl, nämlich

$$xy = u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n,$$

wenn u_s die gewöhnliche Zahl

(4) $$u_s = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1,\ 2 \ldots n)$$

bedeutet.

Division.

Ferner setzen wir voraus, *dass die zur Multiplication inverse Operation, die Division, im allgemeinen ausführbar sei*, d. h. dass sich y aus $xy = u$ im allgemeinen bei gegebenem x und u und andererseits y auch aus $yx = v$ im allgemeinen bei gegebenen x und v bestimmen lasse. Dies führt nach (4) zu der Voraussetzung, *dass die beiden Determinanten*

$$\Delta_x \equiv \left| \sum_1^n {}^i \gamma_{iks} x_i \right|, \qquad \Delta_x' \equiv \left| \sum_1^n {}^k \gamma_{iks} x_k \right|$$

nicht identisch verschwinden sollen. Man bemerkt, dass es im allgemeinen zwei Arten der Division giebt.

Associatives Gesetz.

Endlich setzen wir noch voraus, dass die Multiplication das *associative* Gesetz

$$(ab)c = a(bc)$$

erfülle*). Dies führt zu Bedingungen für die Coefficienten γ_{iks} in (2).

---

*) Auf ganz andere und wegen ihrer Bedeutung für die Gruppentheorie wichtigere Zahlensysteme wird man geführt, wenn man statt des associativen Gesetzes die beiden Gesetze

$$(ab) + (ba) = 0$$

und

$$((ab)c) + ((bc)a) + ((ca)b) = 0$$

zu Grunde legt. Denn diese Systeme stellen die Zusammensetzungen der Gruppen dar. Es ist interessant zu bemerken, dass ausser diesen Systemen auch die im Texte besprochenen in inniger Beziehung zur Gruppentheorie stehen, wie in den späteren Paragraphen ausgeführt werden wird.

Es ist nämlich zunächst allgemein $(xy)z = x(yz)$, sobald nur die Einheiten das associative Gesetz erfüllen. Aber die Forderung

$$(e_i e_k) e_l = e_i (e_k e_l)$$

schreibt sich nach (2) so:

$$\sum_1^n {}^t \sum {}^s \gamma_{iks} \gamma_{slt} e_t = \sum_1^n {}^t \sum {}^s \gamma_{kls} \gamma_{ist} e_t ,$$

zerfällt also, da $e_1 \ldots e_n$ irreducibel sind, in die einzelnen Bedingungen:

$$(5) \qquad \sum_1^n {}^s (\gamma_{iks} \gamma_{slt} - \gamma_{kls} \gamma_{ist}) = 0$$

$$(i, k, l, t = 1, 2 \ldots n).$$

Die Constanten γ_{iks}, die gewöhnliche Zahlen sind, sollen also — um es zusammenzufassen — einerseits diese Bedingungen (5) erfüllen und andererseits so gewählt sein, dass weder Δ_x noch Δ_x' identisch Null ist.

Zahlensystem.

Hiermit sind *alle* Voraussetzungen erschöpft, die wir an ein *Zahlensystem* stellen. Wir schreiben also, um es ausdrücklich hervorzuheben, der Multiplication nur vor, dass sie erstens mit der Addition distributiv verknüpft sei, dass sie zweitens die inversen Operationen zulasse, und dass sie drittens dem associativen Gesetze folge. *Das commutative Gesetz $ab = ba$ schreiben wir dagegen der Multiplication nicht vor.*

Aus den gemachten Annahmen folgt, dass es eine Zahl, wir nennen sie

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n ,$$

in unserem Systeme geben muss, für die stets

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x$$

ist. In der That: Sei $u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n$ eine bestimmte Zahl, für die weder Δ_u noch Δ_u' Null ist. Alsdann lassen sich aus der Forderung

$$u\varepsilon = u,$$

die ja in n einzelne lineare Gleichungen für $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ mit der Determinante $\Delta_u \neq 0$ zerfällt:

$$\sum {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} u_i \varepsilon_k = u_s \quad (s = 1, 2 \ldots n),$$

die Unbekannten $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ vollständig bestimmen. Ganz ebenso lässt sich, da $\Delta_u' \neq 0$ ist, einsehen, dass es bei *beliebig gegebener Zahl*

$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ stets möglich ist; eine Zahl $z = z_1 e_1 + \cdots + z_n e_n$ so zu berechnen, dass

$$zu = x$$

wird. Das associative Gesetz giebt nun

$$x\varepsilon = (zu)\varepsilon = z(u\varepsilon) = zu = x,$$

also $x\varepsilon = x$ bei beliebigem x.

Um zu beweisen, dass auch $\varepsilon x = x$ ist, schicken wir voraus, dass aus einer Relation

$$uy = 0$$

sofort $y_1 = 0, \; . \; . \; y_n = 0$, also $y = 0$ folgen würde, da diese Bedingung in n lineare *homogene* Gleichungen für $y_1 \, . \, . \, y_n$ mit nicht verschwindender Determinante Δ_u zerfällt. Es ist nun aber nach dem associativen Gesetze und wegen $u\varepsilon = u$:

$$u(\varepsilon x) = (u\varepsilon)x = ux$$

oder

$$u(\varepsilon x) - ux = 0$$

oder, nach dem distributiven Gesetze:

$$u(\varepsilon x - x) = 0,$$

sodass $\varepsilon x - x$ die Rolle des eben benutzten y spielt. Hieraus folgt, dass bei beliebigem x auch $\varepsilon x = x$ ist.

Die Zahl ε reproduciert also jede Zahl bei der Multiplication, sie hat daher die wesentlichen Eigenschaften der Zahl Eins. Wir nennen sie den *Modul* des Zahlensystems. Man kann sofort einsehen, dass die Voraussetzung der Existenz eines Moduls umgekehrt nach sich zieht, dass Δ_x und Δ_x' nicht identisch Null sind. Auch giebt es offenbar nur einen Modul im System.

Modul des Systems.

Hätten wir überall, wo bisher von gewöhnlichen Zahlen, also von Zahlen von der Form $\alpha + \beta i$ die Rede war, reelle Zahlen gesetzt, $n = 2$ gewählt und $\gamma_{111} = \gamma_{122} = \gamma_{212} = 1$, $\gamma_{221} = -1$, die übrigen γ_{iks} gleich Null angenommen, also

Beispiel.

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2, \quad e_2 e_2 = -e_1$$

gesetzt, so hätten wir die Productregel

$$(x_1 e_1 + x_2 e_2)(y_1 e_1 + y_2 e_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) e_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) e_2$$

erhalten, die sich völlig deckt mit der Productregel der gewöhnlichen Zahlen

$$(x_1 + x_2 i)(y_1 + y_2 i) = (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

Die gewöhnlichen Zahlen bilden also einen Specialfall des allgemeinen Zahlensystems, mit der Beschränkung, dass bei ihnen x_1, x_2, y_1, y_2 reell sind. Das hier betrachtete System (e_1, e_2) besitzt alle von uns verlangten Eigenschaften.

Zur Geschichte der Zahlensysteme.

Der Begriff des allgemeinen Zahlensystems hat sich geschichtlich durch zweckmässige Verallgemeinerungen und Fallenlassen unwesentlicher Beschränkungen aus dem Systeme der gewöhnlichen Zahlen $\alpha + \beta i$ gebildet. Seine Geschichte geht also zurück bis auf die *Einführung der Imaginären in die Mathematik.*

Imaginäre in der Algebra.

Die Auflösung der algebraischen Gleichungen zweiten Grades führte zuerst auf imaginäre Zahlen. Die Ausdrücke „reell" und „imaginär" sind allerdings erst von Descartes 1637 eingeführt worden. Man wusste aber schon im 16. Jahrhundert, dass jede algebraische Gleichung zweiten, dritten und vierten Grades reelle oder imaginäre Wurzeln besitzt. Man hat seitdem die imaginären Zahlen vielfach in der Analysis verwendet. So zeigte namentlich Euler 1746 ihren Nutzen bei vielen Rechnungen.

Imaginäre in der Geometrie.

Auch in die Geometrie wurden die Imaginären eingeführt. Sie finden sich jedenfalls bei vielen Geometern des vorigen Jahrhunderts, so z. B. bei Monge 1784 in der Theorie der Minimalflächen und bei Lagrange 1779 im Problem der conformen Abbildung. Lambert spricht 1766 sogar über die Geometrie auf einer imaginären Kugel*).

Fundamentalsatz der Algebra.

Gauss gab nach früheren Beweisversuchen von d'Alembert (1746) u. A. im Jahre 1799 in seiner Dissertation den ersten strengen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra, dass jede algebraische Gleichung Wurzeln $\alpha + \beta i$ besitzt, und benutzte in dieser Arbeit die später so berühmt gewordene *Abbildung der complexen Zahlen* $x + yi$ *durch die Punkte der Ebene mit den cartesischen Coordinaten* x, y. Wenn sich daher diese Abbildung nicht bei früheren Autoren nachweisen lässt, so gehört sie Gauss und *nicht* Argand, wie namentlich Hankel in seiner Theorie der complexen Zahlensysteme (1867) und nach ihm so viele andere behauptet haben. Es haben erst nach Gauss Argand (1806), Français, Servois, Mourey (1828), Warren (1828) u. A. diese Abbildung im Einzelnen untersucht und Gauss selbst kam 1831 ausführlicher darauf zurück, machte aber damals ausdrücklich darauf

Abbildung der complexen Zahlen in der Ebene.

*) Kürzlich lenkte Herr Stäckel gesprächsweise die Aufmerksamkeit auf Lambert's höchst merkwürdige Untersuchungen über das Parallelenaxiom. Lambert spricht unter anderem über die Winkelsumme im Dreieck auf der imaginären Kugel.

aufmerksam, dass er die grundlegenden Ideen schon 1799 in seiner Dissertation gegeben habe. Ferner vervollständigte Gauss unter anderem die von Lagrange gegebene Lösung des Problems der comformen Abbildung.

Integration und Potenzreihen in der Zahlenebene.

Eine neue Epoche für die Theorie der complexen Zahlen hebt erst mit Cauchy's Untersuchungen über die Integrale mit imaginären Grenzen seit 1821 sowie über imaginäre Potenzreihen an. Diese Untersuchungen sowie Abel's Untersuchungen über Potenzreihen (1826) führten zu dem Begriff des Convergenzbereiches und lieferten überhaupt die Grundlage für die jetzige Theorie der analytischen Functionen. Ganz besonders trugen Abel's Umkehrung der von Legendre betrachteten elliptischen Integrale und sein Nachweis der doppelten Periodicität dieser inversen Functionen zur Entwickelung und Ausbreitung dieser Lehre bei*).

Darauf baute sich alsdann Riemann's grosse Theorie der mehrdeutigen Functionen und ihrer Darstellung auf mehrblättrigen Flächen auf. Andererseits vervollständigte Weierstrass durch rein analytische Betrachtungen die Theorien Cauchy's, Abel's und Riemann's in wesentlichen Punkten. Hier können wir natürlich nicht auf die vielen wichtigen Beiträge eingehen, die von Zeitgenossen und Späteren zu der grossen Theorie der analytischen Functionen hinzugefügt wurden.

Geometrische Deutung der Imaginären.

Was die Imaginären in der Geometrie betrifft, so ist zunächst Poncelet's Einführung der Imaginären in die projective Geometrie (1822) zu nennen, wenn gleich Cauchy's Einwände dagegen formell berechtigt waren. Von fundamentaler Bedeutung war seine Entdeckung der imaginären Kreispunkte in der Ebene, die später im Raume zum imaginären Kugelkreis führte.

Durch Plücker's aus den Jahren 1830—40 herrührende Auffassung der Geometrie als eines (teilweis unvollkommenen) Bildes einer rein analytischen Wissenschaft wurden alle Einwände gegen die Berechtigung der Anwendung der Imaginären zum Schweigen gebracht. v. Staudt gab 1856 eine berühmte Deutung der Imaginären in der Geometrie, die vom Coordinatensystem unabhängig ist.

Unter denjenigen, welche die Imaginären für die Geometrie be-

---

*) Kurze Andeutungen in Gauss' Arbeiten um 1800 herum machen es unzweifelhaft, dass Gauss sich schon zu dieser Zeit mit der Theorie der analytischen Functionen beschäftigt hatte.

sonders nutzbringend verwerteten, nennen wir noch Bellavitis, sowie Chasles, Möbius, Laguerre und Darboux*).

Verallgemeinerung der complexen Zahlen.

Verschiedene Rücksichten drängten zu *Verallgemeinerungen des Begriffes der complexen Zahlen.* Einmal ist die Verallgemeinerung der geometrischen Deutung der Imaginären in der Ebene auf den Raum u. s. w. überaus naheliegend, sodass sich die schon von Gauss 1831 aufgeworfene Frage erhebt, „warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können" **), eine Frage, die neuerdings vielfach besprochen wurde. Ferner vermag die Benutzung höherer Zahlensysteme umständliche Formeln zu vereinfachen und schliesslich hat man, wie kürzlich noch Dedekind betont hat, auch stillschweigend häufig von höheren Zahlen Gebrauch gemacht, wenn man im Verlauf von Rechnungen gewisse Symbole einführte und mit diesen operierte.

Der erste, der zu einem wirklich neuen Zahlensystem gelangte, das zugleich neben dem gewöhnlichen complexen System das in mehreren Hinsichten wichtigste Zahlensystem ist, und das interessante Anwendungen zuliess, war Hamilton, der 1843 das System der aus vier Einheiten bestehenden *Quaternionen* aufstellte. Alsdann hat Grassmann 1844 gewisse complexe Zahlensysteme betrachtet, aber in etwas anderer Form: In seinen Ausdehnungslehren von 1844 und 1862 betrachtet er zwar Zahlen von der Form $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$, nimmt auch für die Multiplication das distributive Gesetz an, setzt aber nicht voraus, dass die Producte $e_i e_k$ wieder dem System angehören. Sie stellen vielmehr neue Zahlen dar, für die wieder neue Productregeln gelten u. s. w. Andererseits schreibt er der Multiplication nur gewisse specielle Gesetze vor. Es ist hier nicht der Ort, auf die Deutungen der Grassmann'schen Systeme einzugehen, wir haben es hier vielmehr nur mit ihrer formalen Seite zu thun und müssen da bemerken, dass Grassmann den allgemeinen modernen Begriff eines Zahlensystems nicht besitzt.

Hamilton's Quaternionen.

Grassmann's Systeme.

Englische Mathematiker, wie Cayley und Sylvester, haben sich öfters mit der Aufstellung specieller Zahlensysteme beschäftigt. Aus-

*) Im Jahre 1869 veröffentlichte Lie in der Gesells. d. Wiss. zu Christiania eine andere Interpretation der Imaginären, die den Ausgangspunkt für seine Untersuchungen über Berührungstransformationen, Differentialgleichungen und Transformationsgruppen bildete.

**) Gauss' Werke Bd. II, S. 178.

drücklich wird der *allgemeine Begriff eines geschlossenen complexen Zahlensystems*, eines solchen also, in dem die Producte immer wieder dem System angehören, wohl erst durch Hankel 1867 in seinem schon genannten Werke definiert. Er nimmt übrigens das Bestehen des associativen Gesetzes der Multiplication nicht von vornherein an, sondern verlangt nur das Bestehen des distributiven Gesetzes, indem er sich die Producte $e_i e_k$ in beliebiger Weise als lineare homogene Functionen der Einheiten $e_1 \,.\,.\, e_n$ definiert denkt. Hankel giebt viele geschichtliche Nachweise, sie sind aber nicht immer zutreffend.

Allgem. geschlossenes complexes System.

Das *associative* Gesetz der Multiplication tritt nun in der Folgezeit immer deutlicher hervor und zwar hat dies seinen Grund in der Beziehung, in die man die complexen Zahlen zu den *linearen Transformationen* brachte. Dies wollen wir im nächsten Paragraphen erläutern und alsdann auch geschichtlich weiter verfolgen.

Gesetz der Association.

Lineare Transform.

§ 2. Auffassung der Zahlensysteme als Gruppen und Folgerungen aus dieser Auffassung.

Wir bemerken, dass die Forderung

$$x' = xy$$

in unserem in § 1 definierten Systeme $(e_1 \,.\,.\, e_n)$ äquivalent ist mit den n in $x_1 \,.\,.\, x_n$ und $y_1 \,.\,.\, y_n$ bilinearen Gleichungen:

$$(6) \qquad x_s' = \sum_1^n{}^i \sum{}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1,\, 2 \,.\,.\, n).$$

Fassen wir hierin $x_1 \,.\,.\, x_n$ als Veränderliche, $y_1 \,.\,.\, y_n$ als Parameter, $x_1' \,.\,.\, x_n'$ als neue Veränderliche auf, so stellen diese n Gleichungen eine *lineare homogene Transformation* der n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ in die n Veränderlichen $x_1' \,.\,.\, x_n'$ dar. Jede Multiplication kann also als eine lineare homogene Transformation aufgefasst werden.

Lineare homogene Transform.

Wir lassen es dahingestellt, wer zuerst ausdrücklich bemerkt hat, dass in dieser Weise im gewöhnlich complexen System $(1, i)$ jede Multiplication mit einer Zahl als eine Ähnlichkeitstransformation der ganzen Ebene aufgefasst werden kann, wenn wir auch vermuten, dass diese äusserst wichtige Auffassung schon bei Bellavitis vorkommt. Die entsprechende Auffassung der Multiplicationen in einem Zahlensystem $(e_1 \,.\,.\, e_n)$ als Transformationen tritt in den Arbeiten von Cayley, Laguerre, Clifford, Sylvester, Frobenius und Anderen immer mehr in den Vordergrund.

Die vorausgesetzte Eigenschaft der Associativität der Multiplication führt nun auch zu einer besonderen Eigenschaft jener Schar von linearen homogenen Transformationen, die mit einem Zahlensystem $(e_1 \ldots e_n)$ verknüpft sind. Jene Schar ist nämlich eine *Gruppe*.

Das Zahlensystem als Gruppe.

Denn wenn man zuerst die allgemeine Zahl x mit y, das Ergebnis dann mit y' multipliciert, also setzt

$$x' = xy, \quad x'' = x'y',$$

so ist das Endergebnis

$$x'' = (xy)y' = x(yy'),$$

also dasselbe, als ob x direct mit der Zahl multiplicirt worden wäre, die das Product yy' darstellt. Also: die successive Ausführung der linearen Transformation

$$(6) \qquad x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$ und der linearen Transformation

$$x_t'' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{ikt} x_i' y_k' \quad (t = 1, 2 \ldots n)$$

mit den Parametern $y_1' \ldots y_n'$ ist äquivalent mit der directen Ausführung der linearen Transformation

$$x_t'' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{ikt} x_i y_k'' \quad (t = 1, 2 \ldots n)$$

mit den Parametern $y_1'' \ldots y_n''$, die definiert sind durch die Formeln:

$$(7) \qquad y_s'' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} y_i y_k' \quad (s = 1, 2 \ldots n).$$

Die linearen homogenen Transformationen (6) bilden also in der That eine *Gruppe*. Diese Gruppe hat nun eine besondere Eigenschaft:

Die Parameter $y_1'' \ldots y_n''$ *der ersetzenden Transformation drücken sich durch die Parameter* $y_1 \ldots y_n$, $y_1' \ldots y_n'$ *der beiden ursprünglichen Transformationen vermöge* (7) *genau so aus, wie die neuen Veränderlichen* $x_1' \ldots x_n'$ *durch die ursprünglichen Veränderlichen* $x_1 \ldots x_n$ *und die Parameter* $y_1 \ldots y_n$ *vermöge* (6).

Diese Bemerkung ist in der Folge für uns von besonderer Bedeutung.

Der erste, der die Zahlensysteme ausdrücklich als Gruppen auffasste, war Poincaré*). Er deutete darüber 1884 ein Theorem an, das wir so formulieren wollen:

*) *Sur les nombres complexes.* Comptes Rendus T. 99 (1884), S. 740—742.

Poincaré's Theorem.

Theorem 38: *Zu jedem Zahlensystem gehört eine einfach transitive Gruppe von linearen homogenen Transformationen, in deren endlichen Gleichungen die Parameter linear und homogen auftreten, und umgekehrt gehört zu jeder derartigen Gruppe ein Zahlensystem.*

Von diesem Theorem wenden wir bis auf weiteres nur die erste, soeben bewiesene Hälfte an. Die zweite Hälfte beweisen wir weiter unten.

Dieses Theorem, das übrigens von Poincaré weder ganz präcis gefasst*), noch von ihm bewiesen wurde, begründete einen grossen Fortschritt in der Theorie der complexen Zahlen. Denn nun gingen aus der Lie'schen Gruppentheorie unmittelbar eine Reihe von Sätzen über complexe Zahlen hervor. Im Folgenden geben wir einige dieser Sätze mit selbständiger Begründung**).

Folgerungen aus Sätzen der Gruppentheorie.

Wir haben gesehen, dass die Gleichungen (6), wenn $y_1 \ldots y_n$ als Parameter betrachtet werden, *eine lineare homogene Gruppe mit der oben ausgesprochenen besonderen Eigenschaft* darstellen. Da sie gleich viele Veränderliche $x_1 \ldots x_n$ wie Parameter $y_1 \ldots y_n$ enthält und die Determinante Δ_x des § 1 nicht identisch Null ist, so sind die Gleichungen (6) nach $y_1 \ldots y_n$ auflösbar, sodass sie wirklich *eine einfach transitive Gruppe* bilden. (Vgl. § 2 des 17. Kap.)

Einfach transitive Gruppe.

Die Gruppe enthält die identische Transformation, denn für $y = \varepsilon$ oder also

$$y_1 = \varepsilon_1, \quad y_2 = \varepsilon_2, \quad \ldots y_n = \varepsilon_n,$$

wobei $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ die in § 1 gefundenen gewöhnlichen Zahlen bedeuten, also ε den *Modul* des Systems vorstellt, giebt $x' = xy$ die identische Transformation $x' = x$. Auch enthält die Gruppe *paarweis inverse Transformationen.* Denn es sei y eine complexe Zahl, für die $\Delta_y \neq 0$ ist. Alsdann lässt sich aus der Forderung

$$y\bar{y} = \varepsilon$$

nach § 1 eine gewisse Zahl $\bar{y} = \bar{y}_1 e_1 + \cdots + \bar{y}_n e_n$ ableiten. Ist nun

---

*) Es fehlt in der Note von Poincaré der allerdings wesentliche Zusatz „einfach transitiv". Ferner spricht der Verfasser von Zahlensystemen „analog den Quaternionen". Wir müssen annehmen, dass er hiermit die Systeme mit associativer Multiplication gemeint hat, wie wir sie in § 1 definiert haben.

**) Der Beweis des Theorems 38 wurde erst von Study gegeben. Die schönen Untersuchungen Study's werden wir nachher, in § 3, ausführlich besprechen und hierbei seinen Beweis vollständig wiedergeben.

$$x' = xy,$$

so ist

$$x'\bar{y} = (xy)\bar{y} = x(y\bar{y}) = x\varepsilon = x.$$

Also giebt

$$x' = xy$$

als Auflösung

$$x = x'\bar{y},$$

d. h. zur Transformation mit den Parametern $y_1 \,..\, y_n$ ist die mit den Parametern $\bar{y}_1 \,..\, \bar{y}_n$ invers.

Die hierbei gemachte Voraussetzung $\Delta_y \neq 0$ schliesst nur gewisse Parametersysteme specieller Art aus. Jedenfalls aber sind sicher ∞^n Transformationen der Gruppe paarweis zu einander invers.

Wir haben oben gesehen, dass die Parameter $y_1'' \,..\, y_n''$ der Transformation, die der Aufeinanderfolge der Transformationen mit den Parametern $y_1 \,..\, y_n$ und $y_1' \,..\, y_n'$ äquivalent ist, sich in der Form (7) ausdrücken. Wir erinnern nun an eine früher in einer Note gemachte Bemerkung (in § 1 des 18. Kap., S. 449):

Transformation der Parameter einer Gruppe.

Sind

$$x_i' = f_i(x_1 \,..\, x_n,\ y_1 \,..\, y_r) \quad (i = 1,\ 2 \,..\, n) \tag{8}$$

die Gleichungen einer Gruppe mit den Parametern $y_1 \,..\, y_r$ und ist die Aufeinanderfolge dieser Transformation und der Transformation der Gruppe

$$x_i'' = f_i(x_1' \,..\, x_n',\ y_1' \,..\, y_r') \quad (i = 1,\ 2 \,..\, n)$$

mit den Parametern $y_1' \,..\, y_r'$ derjenigen Transformation der Gruppe

$$x_i'' = f_i(x_1 \,..\, x_n,\ y_1'' \,..\, y_r'') \quad (i = 1,\ 2 \,..\, n)$$

äquivalent, welche die Parameter $y_1'' \,..\, y_n''$ besitzt, so sind $y_1'' \,..\, y_r''$ gewisse Functionen von $y_1 \,..\, y_r,\ y_1' \,..\, y_r'$:

$$y_k'' = \varphi_k(y_1 \,..\, y_r,\ y_1' \,..\, y_r') \quad (k = 1,\ 2 \,..\, r). \tag{9}$$

Bezeichnen wir die Transformation der Gruppe, die zu den Parametern $y_1 \,..\, y_r$ gehört, mit T_y, so ist:

$$T_y T_{y'} = T_{y''}.$$

Nun ist aber stets

$$(T_a T_b) T_c = T_a (T_b T_c),$$

also auch:

$$(T_y T_{y'}) T_{\bar{y}} = T_y (T_{y'} T_{\bar{y}}).$$

Aber wenn

$$T_y T_{y'} = T_{y''}, \quad T_{y'} T_{\bar{y}} = T_{z''}$$

ist, so kommt:

$$(10) \qquad T_{y''} T_{\bar{y}} = T_y T_{z''}$$

und

$$\left. \begin{aligned} y_k'' &= \varphi_k(y_1 \ldots y_r,\, y_1' \ldots y_r'), \\ z_k'' &= \varphi_k(y_1' \ldots y_r',\, \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_r) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1,\, 2 \ldots r).$$

$T_{y''} T_{\bar{y}}$ ist nun der Transformation mit den Parametern $\varphi_1(y'', \bar{y}) \ldots \varphi_r(y'', \bar{y})$ äquivalent, andererseits $T_y T_{z''}$ der mit den Parametern $\varphi_1(y, z'') \ldots \varphi_r(y, z'')$. Hierbei haben wir je r Argumente kurz durch einen Buchstaben angedeutet. Die Relation (10) ergiebt also, dass die Functionen φ die Functionalgleichungen erfüllen:

$$(11) \qquad \varphi_k(\varphi(y, y'), \bar{y}) = \varphi_k(y, \varphi(y', \bar{y})) \quad (k = 1,\, 2 \ldots r).$$

Die Gleichungen (9) stellen also, wenn man darin $y_1 \ldots y_r$ als ursprüngliche, $y_1'' \ldots y_r''$ als neue Veränderliche und $y_1' \ldots y_r'$ als Parameter auffasst, eine *Gruppe* dar. Wie schon an der angegebenen früheren Stelle bemerkt wurde, heisst sie die *Parametergruppe* der gegebenen Gruppe (8). Sie zeigt, wie sich die Parameter der Transformation der Gruppe (8), die der Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Gruppe (8) äquivalent ist, durch die Parameter dieser beiden Transformationen ausdrücken.

Parametergruppe.

Diese Bemerkungen gelten, wenn wir von einer beliebigen Gruppe (8) ausgehen. Gehen wir von der Gruppe (6) unseres Zahlensystems aus, so finden wir ihre Parametergruppe in der Form (7). Da diese Form mit (6) übereinstimmt, so sehen wir, *dass die Gruppe des Zahlensystems mit ihrer Parametergruppe identisch ist.*

Zweite Parametergruppe.

In der Lie'schen Gruppentheorie wird nun ferner bewiesen*), dass die obigen Gleichungen (9) auch dann eine Gruppe, die man die *zweite* Parametergruppe nennen kann, darstellen, wenn man darin $y_1' \ldots y_r'$ als die ursprünglichen Veränderlichen und $y_1 \ldots y_r$ als die Parameter auffasst. Dies führt zur einer analogen Bemerkung für den speciellen Fall der Parametergruppe (7). Da diese mit der Gruppe (6) des Zahlensystems identisch ist, so folgt, *dass mit unserem Zahlensystem eine zweite einfach transitive Gruppe verknüpft ist.*

Zweite einfach transitive Gruppe des Zahlensystems.

In der That sehen wir die Existenz dieser Gruppe auch direct sofort ein: Wir wurden bei der Productbildung $x' = xy$ auf eine Gruppe geführt, indem wir x, also den ersten Factor, als variabel ansahen. Indem wir nun aber den zweiten Factor als veränderlich auf-

---

*) Siehe Lie, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt, bearb. unter Mitw. von Engel, 1888. S. 428.

fassen wollen, was wir dadurch hervorheben, dass wir jetzt den zweiten mit x, den ersten mit y bezeichnen:

$$x' = yx,$$

gelangen wir ganz analog zu einer zweiten einfach transitiven Gruppe

$$x_s' = \sum_1^n{}^i \sum{}^k \gamma_{kis} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$, denn die Aufeinanderfolge der beiden durch

$$x' = yx, \quad x'' = y'x'$$

dargestellten Transformationen von $x_1 \ldots x_n$ in $x_1' \ldots x_n'$ bez. $x_1' \ldots x_n'$ in $x_1'' \ldots x_n''$ ist der durch

$$x'' = (y'y)x$$

dargestellten Transformation von $x_1 \ldots x_n$ in $x_1'' \ldots x_n''$ äquivalent. Die Parameter $y_1'' \ldots y_n''$ dieser Transformation

$$x'' = y''x$$

setzen sich aus den Parametern $y_1 \ldots y_n$ und $y_1' \ldots y_n'$ in der Weise zusammen, dass

$$y'' = y'y$$

ist, also *genau so, wie die neuen Veränderlichen aus den ursprünglichen und aus den Parametern einer allgemeinen Transformation unserer jetzigen Gruppe hervorgehen.*

Die jetzige Gruppe hat also eine analoge besondere Eigenschaft wie die erstere. Übrigens ist sie offenbar wie diese *einfach transitiv*, linear homogen und besitzt die identische sowie paarweis inverse Transformationen.

Vertauschbarkeit beider Gruppen.

Engel hat nun allgemein bewiesen*), dass die beiden einer beliebigen Gruppe (8) zugehörigen Parametergruppen (9) *mit einander vertauschbar* sind. Dementsprechend sind es auch die beiden Gruppen, die unserem Zahlensystem zugehören. In der That können wir auch dies direct nachweisen: Führen wir zuerst die Transformation

$$x' = xy$$

der ersten mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$, alsdann auf $x_1' \ldots x_n'$ die Transformation

$$x'' = zx'$$

der zweiten mit den Parametern $z_1 \ldots z_n$ aus, so ergiebt sich als der Aufeinanderfolge äquivalent die Transformation:

*) Siehe Lie, a. a. O. S. 429.

$$x'' = z(xy),$$

die wir auch ohne die Klammer schreiben können, da infolge des associativen Gesetzes $z(xy) = (zx)y$ ist, also der Ausdruck zxy einen ganz bestimmten Sinn hat:

$$x'' = zxy.$$

Es ergiebt sich, wenn wir die Reihenfolge der beiden Transformationen ändern, genau dasselbe, denn setzen wir:

$$x' = zx,$$

indem wir zuerst die Transformation der zweiten Gruppe mit den Parametern $z_1 \dots z_n$ ausüben, und ferner:

$$x'' = x'y,$$

indem wir alsdann die Transformation der ersten Gruppe mit den Parametern $y_1 \dots y_n$ bewirken, so kommt als Endergebnis:

$$x'' = (zx)y$$

oder also

$$x'' = zxy,$$

wie vorher.

Da unsere beiden mit einander vertauschbaren einfach transitiven Gruppen paarweis inverse Transformationen besitzen, so besitzen sie auch je ∞^{n-1} infinitesimale Transformationen, von denen sie erzeugt werden. Nun haben wir gesehen — vgl. Theorem 31, § 3 des 17. Kap. —, dass alle Transformationen, die mit denen einer vorgelegten einfach transitiven Gruppe vertauschbar sind, eine zweite einfach transitive Gruppe, die zur ersteren *reciproke*, bilden. Also ergiebt sich als Ausfluss aus unserer allgemeinen Gruppentheorie das

Reciproke Gruppen.

Theorem 39: *Mit jedem complexen Zahlensystem in n Einheiten ist ein Paar zu einander reciproker einfach transitiver linearer homogener Gruppen in n Veränderlichen verknüpft, insofern, als die Multiplication $z = xy$ eine Transformation der einen oder anderen Gruppe darstellt, je nachdem man $x_1 \dots x_n$ bez. $y_1 \dots y_n$ als die ursprünglichen Veränderlichen, dabei $y_1 \dots y_n$ bez. $x_1 \dots x_n$ als die Parameter und beide Male $z_1 \dots z_n$ als die neuen Veränderlichen auffasst.*

Theorem über die mit einem System verbundenen Gruppen.

Beide Gruppen haben die Eigenschaft, dass die Parameter der Transformation, die der Aufeinanderfolge zweier Transformationen einer der Gruppen äquivalent ist, sich genau so aus den Parametern der beiden ursprünglichen Transformationen zusammensetzen, wie bei einer allgemeinen Transforma-

tion der betreffenden Gruppe die neuen Veränderlichen aus den alten Veränderlichen und den Parametern.

Weierstrass' Systeme.

Nachdem Poincaré den Zusammenhang zwischen Zahlensystemen und Gruppen angekündigt hatte, liess Weierstrass einen von ihm an Schwarz gerichteten Brief*) veröffentlichen, in dem er sich mit den complexen Zahlensystemen beschäftigt, über die er schon früher in Vorlesungen öfters gesprochen hat. Bei Weierstrass kommt die Auffassung der Multiplication als Transformation nicht vor, dagegen wird der arithmetische Charakter der Zahlensysteme scharf betont. Ferner verlangt er von vornherein die Commutativität der Multiplication, d. h. er setzt voraus, dass stets $\gamma_{iks} = \gamma_{kis}$ sei. Er sucht nun das Gebiet der Zahlen so einzuschränken, dass eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades im allgemeinen in dem Zahlensysteme nur eine endliche Anzahl von Wurzeln hat. Dies nötigt ihn zu einigen Bedingungen, denen er die Coefficienten γ_{iks} unterwerfen muss. Es darf nämlich eine gewisse Gleichung n^{ten} Grades weder gleiche noch verschwindende Wurzeln besitzen. Bei diesen Specialforderungen ist es erklärlich, dass die von Weierstrass behandelten Systeme, wie grosses Interesse sie auch von anderen Gesichtspunkten aus betrachtet besitzen mögen, vom Standpunkt der Transformationstheorie aus geradezu als *trivial* erscheinen. Weierstrass meint, dass die von Gauss aufgeworfene, oben erwähnte Frage, warum in der Arithmetik kein Bedürfnis zu höheren complexen Zahlensystemen vorhanden ist, darin liegt, dass die betreffenden Systeme *überflüssig* seien, glaubt aber, dass Gauss die Antwort darin gefunden zu haben meinte, dass in einem solchen System ein Product Null sein kann, ohne dass einer der Factoren Null ist. Wir bemerken, dass schon lange vorher (1867) Hankel**) eine Antwort auf die Gauss'sche Frage in ähnlichem Sinne, wie es Weierstrass bei Gauss vermutet, gegeben hat. Nun machte Dedekind***) 1885 darauf aufmerksam, dass die durch die Weierstrass'schen speciellen Systeme definierten Grössen geradezu identisch seien mit gewissen in der Algebra eingebürgerten mehrwertigen Grössen. Auch er macht, indem er zur Bestimmung aller Systeme einen anderen Weg einschlägt, jene beschränkenden Voraussetzungen, die Weierstrass aufstellte, wenn er sie auch in anderer Weise ausdrückt. Derselben

Weierstrass' Antwort auf Gauss' Frage.

Hankel's Antwort.

Dedekind's Auffassung.

*) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.* Göttinger Nachrichten 1884, S. 395—419.

**) *Theorie der complexen Zahlensysteme.* 1867, S. 108.

***) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen.* Göttinger Nachr. 1885, S. 141—159. *Erläuterungen dazu,* ebenda 1887, S. 1—7.

arithmetischen Richtung schliessen sich Hölder (1886) und Petersen (1887) an. Auch Kronecker*) beschäftigte sich 1888 mit speciellen, nämlich ebenfalls *commutativen* Systemen. Seine Untersuchungen, die wir nicht genauer kennen, gehen gewiss wesentlich weiter.

Demgegenüber hat die Auffassung der Zahlensysteme als Ausdruck gewisser *Gruppen von Transformationen* zu fruchtbaren neuen Ergebnissen geführt.

Wir haben schon bemerkt, dass Study 1889 den ersten Beweis für das Theorem 38 gab**). Noch wichtiger ist es aber, dass es ihm gelang, das früher aus der allgemeinen Gruppentheorie übernommene Theorem 39 umzukehren. Study zeigte nämlich, dass zu jedem Paar zu einander reciproker einfach transitiver linearer homogener Gruppen eine einfach transitive lineare homogene Gruppe gehört, in der auch die Parameter linear und homogen auftreten, und dass deshalb zu ihnen ein Zahlensystem gehört.

Wir beabsichtigen nun, dieses Theorem von Study zu beweisen. Der Gang, den wir einschlagen, ist im wesentlichen von Study selbst angegeben worden. Wir geben aber im Gegensatz zu ihm eine rein gruppentheoretische Entwickelung.

§ 3. Study's Satz über reciproke einfach transitive lineare homogene Gruppen***).

Wir machen zunächst eine wichtige Vorbemerkung:

Vorbemerkung.

Betrachten wir zwei infinitesimale lineare homogene Transformationen in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ mit den Symbolen:

$$Xf \equiv \sum_1^n{}_i \sum{}_k \alpha_{ik} x_k p_i,$$

$$Yf \equiv \sum_1^n{}_j \sum{}_l \beta_{jl} x_l p_j.$$

Sie sind mit einander *vertauschbar*, d. h. es ist $(XY) \equiv 0$, sobald,

*) *Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme.* Sitzungsber. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1888, 1. Bd., S. 429 ff.

**) *Complexe Zahlen und Transformationsgruppen.* Leipziger Berichte 1889, S. 177—228. Wiederabdruck in den Monatsheften für Math. u. Phys. I, S. 283 bis 355. Wir citieren im Folgenden die Leipziger Berichte.

***) Die in diesem Paragraphen enthaltene rein gruppentheoretische Darstellung der Study'schen Betrachtungen rührt von Scheffers her.

wie die Ausrechnung des Klammerausdruckes zeigt, die Constanten α und β die Relationen erfüllen:

$$(12) \qquad \sum_1^n {}^i (\alpha_{ik}\beta_{\mu i} - \alpha_{\mu i}\beta_{ik}) = 0 \quad (k,\ \mu = 1,\ 2\,..\,n).$$

Ist ferner

$$Zf \equiv \sum_1^n {}^\mu \sum {}^j \gamma_{\mu j} x_j p_\mu$$

eine ebenfalls mit Xf vertauschbare infinitesimale lineare homogene Transformation, so ist analog

$$(13) \qquad \sum_1^n {}^i (\alpha_{ik}\gamma_{\mu i} - \alpha_{\mu i}\gamma_{ik}) = 0 \quad (k,\ \mu = 1,\ 2\,..\,n).$$

Bilden wir nun die infinitesimale lineare homogene Transformation, bei der x_μ den Zuwachs

$$\delta x_\mu = Y(Zx_\mu)\delta t \quad (\mu = 1,\ 2 \cdots n)$$

erfährt. Es ist

$$Zx_\mu \equiv \sum_1^n {}^i \gamma_{\mu j} x_j$$

und daher

$$Y(Zx_\mu) \equiv \sum_1^n {}^j \gamma_{\mu j}\, Yx_j.$$

Da nun andererseits

$$Yx_j \equiv \sum_1^n {}^l \beta_{jl} x_l$$

ist, so folgt:

$$Y(Zx_\mu) \equiv \sum_1^n {}^j \sum {}^l \gamma_{\mu j} \beta_{jl} x_l.$$

Die zu bildende infinitesimale Transformation hat daher das Symbol:

$$Uf \equiv \sum_1^n {}^\mu Y(Zx_\mu)\frac{\partial f}{\partial x_\mu} \equiv \sum_{\mu, j, l}^{1..n} \gamma_{\mu j}\beta_{jl} x_l p_\mu$$

oder kürzer:

$$Uf \equiv \sum_1^n {}^\mu \sum {}^l u_{\mu l} x_l p_\mu,$$

wenn zur Abkürzung allgemein

$$(14) \qquad \sum_1^n {}^j \gamma_{\mu j}\beta_{jl} = u_{\mu l}$$

gesetzt wird. Diese infinitesimale Transformation Uf, die in eigentümlicher Weise aus Yf und Zf gebildet ist, ist wie diese beiden linear und homogen.

Yf und Zf sind, setzen wir voraus, mit Xf vertauschbar, d. h. es bestehen die Relationen (12) und (13). Wir werden nun sehen, dass alsdann auch Uf mit Xf vertauschbar ist. Zu diesem Zwecke müssen wir zeigen, dass analog (12) und (13) auch die Relationen bestehen:

$$\sum_1^n{}^i (\alpha_{ik} u_{ji} - \alpha_{ji} u_{ik}) = 0 \quad (j, k = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

sobald (12) und (13) erfüllt sind. Nach (14) ist die links stehende Summe gleich:

$$\sum_1^n{}^i \sum{}^\mu (\alpha_{ik} \beta_{\mu i} \gamma_{j\mu} - \alpha_{ji} \beta_{\mu k} \gamma_{i\mu}).$$

Da aber nach (12)

$$\sum_1^n{}^i \alpha_{ik} \beta_{\mu i} = \sum_1^n{}^i \alpha_{\mu i} \beta_{ik}$$

und nach (13)

$$\sum_1^n{}^i \gamma_{i\mu} \alpha_{ji} = \sum_1^n{}^i \gamma_{ji} \alpha_{i\mu}$$

ist, so ist die Summe auch gleich:

$$\sum_1^n{}^i \sum{}^\mu (\alpha_{\mu i} \beta_{ik} \gamma_{j\mu} - \alpha_{i\mu} \beta_{\mu k} \gamma_{ji}).$$

Wenn man nun im zweiten Gliede die Indices i und μ, über die summiert wird, mit einander vertauscht, was erlaubt ist, so wird es gleich dem ersten Gliede, die Summe ist also in der That gleich Null.

Wir formulieren daher einen Hülfssatz, den wir nachher gebrauchen werden, in dieser Weise:

Satz 1*): *Ist eine infinitesimale lineare homogene Transformation Xf in den Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$ mit zwei anderen infinitesimalen linearen homogenen Transformationen Yf und Zf in denselben Veränderlichen vertauschbar, so ist sie auch mit der infinitesimalen linearen homogenen Transformation vertauschbar, bei der x_i das Increment $Y(Zx_i)\delta t$ erfährt, die also das Symbol besitzt:*

$$Uf \equiv \sum_1^n{}^i Y(Zx_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

---

*) Bei Study kommt dieser Satz nicht vor. Er ist von Scheffers ausgesprochen worden.

Inf. lin. Transf., die mit denen einer lin. Gruppe vertauschbar sind.

Es möge nunmehr eine r-gliedrige lineare homogene Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ in den n Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ vorliegen. Alsdann wird es im allgemeinen eine Schar von infinitesimalen linearen homogenen Transformationen in $x_1 \dots x_n$ geben, die mit allen $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar sind. Sind zwei infinitesimale Transformationen mit $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar, so ist es auch jede aus den beiden linear ableitbare. Alle mit $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbaren infinitesimalen linearen homogenen Transformationen bilden demnach eine lineare Schar, d. h. sie sind der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen, die aus gewissen von einander unabhängigen $Y_1 f \dots Y_s f$ linear ableitbar sind. Wir nehmen also an, jede infinitesimale lineare homogene Transformation in $x_1 \dots x_n$, die mit allen $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar ist, habe die Form Σ Const. Yf.

Insbesondere sei:

$$Y_k f \equiv \sum_1^n {}^i \sum {}^l \beta_{kil} x_l p_i \quad (k = 1, 2 \dots s). \tag{15}$$

Es ist auch jeder Klammerausdruck $(Y_i Y_k)$ mit $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar, denn in der Identität

$$((Y_i Y_k) X_l) + ((Y_k X_l) Y_i) + ((X_l Y_i) Y_k) \equiv 0$$

verschwinden die beiden letzten Glieder, da nach Voraussetzung $(Y_k X_l) \equiv 0$, $(X_l Y_i) \equiv 0$ ist. Jede infinitesimale Transformation $(Y_i Y_k)$ ist folglich, weil sie überdies linear homogen ist, aus $Y_1 f \dots Y_s f$ linear ableitbar. Nach dem Hauptsatze erzeugen somit $Y_1 f \dots Y_s f$ eine s-gliedrige *Gruppe*.

Die endlichen Transformationen dieser Gruppe lassen sich in Form von Reihenentwickelungen bekanntlich (vgl. § 5 des 15. Kap.) so darstellen:

$$x_i' = x_i + \sum_1^s {}^k e_k Y_k x_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_1^s {}^k \sum {}^l e_k e_l Y_k (Y_l x_i) + \cdots \tag{16}$$
$$(i = 1, 2 \dots n).$$

Nach unserem Satze 1 aber ist die infinitesimale lineare homogene Transformation Uf, bei der

$$\delta x_i = Y_k (Y_l x_i) \delta t \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

ist, ebenfalls mit $X_1 f \dots X_r f$ vertauschbar, d. h. von der Form ΣConst.Yf. Wir haben daher:

$$Y_k (Y_l x_i) \equiv \sum_1^s {}^\nu \text{Const.}\, Y_\nu x_i \tag{17}$$
$$(i = 1, 2 \dots n, \quad k, l = 1, 2 \dots s).$$

Es muss $Y_j f$ ausgeführt auf die eine und die andere Seite dieser Identität dasselbe ergeben, d. h. es ist auch

$$Y_j(Y_k(Y_l x_i)) \equiv \sum_1^s {}^\nu \text{Const.}\, Y_j(Y_\nu x_i).$$

Nach (17) hat hierin die rechte Seite die Form $\Sigma \text{Const.}\, Y_\nu x_i$. Wir können diesen Schluss wiederholen, indem wir beiderseits $Y_\lambda f$ ausüben, u. s. w. So ergeben sich Formeln von dieser Art:

$$Y_k(Y_l x_i) \equiv \sum_1^s {}^\nu \text{Const.}\, Y_\nu x_i,$$

$$Y_j(Y_k(Y_l x_i)) \equiv \sum_1^s {}^\nu \text{Const.}\, Y_\nu x_i,$$

. . . .

In den Reihenentwickelungen (16) treten nun rechts gerade lauter Glieder von dieser Art auf. Mithin hat in diesen Reihenentwickelungen jeder Term die Form $\Sigma \text{Const.}\, Y x_i$. Daher lassen sich diese Entwickelungen so zusammenziehen:

$$x_i' = x_i + \sum_1^s {}^k \varrho_k Y_k x_i \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

$\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_s$ bedeuten dabei gewisse Constanten, abhängig von den in (16) auftretenden Parametern $e_1 \,.\,.\, e_s$. Wegen der angenommenen Form (15) der Yf sehen wir also: Die endlichen Gleichungen der von $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ erzeugten Gruppe haben die Form:

$$x_i' = x_i + \sum_1^s {}^k \sum_1^n {}^l \varrho_k \beta_{kil} x_l \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n), \tag{18}$$

in denen $\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_s$ Functionen der s Parameter der Gruppe sind. Natürlich sind diese s Functionen notwendig von einander unabhängig, da die Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ gerade s-gliedrig ist. Wir können deshalb direct $\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_s$ als die Parameter der Gruppe auffassen.

Wir wollen aber die endlichen Gleichungen dieser Gruppe in den Parametern homogen schreiben. Dazu bemerken wir, dass die Gruppe $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ sicher die infinitesimale Transformation

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

enthält, denn diese ist ja mit jeder infinitesimalen linearen homogenen Transformation, daher insbesondere mit $X_1 f \,.\,.\, X_r f$, vertauschbar. Wir dürfen demnach auch z. B.

$$Y_1 f \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

annehmen, sodass nach (15) jedes β_{1il} gleich 1 oder 0 ist, je nachdem $i = l$ oder $i \neq l$ ist. In (18) tritt dann ϱ_1 nur mit x_i multipliciert auf, sodass wir das rechts alleinstehende x_i mit diesem zusammenfassen können, indem wir $\varrho_1 + 1$ nunmehr mit ϱ_1 bezeichnen.

Wir können also in den Gleichungen (18) jedenfalls ohne Beeinträchtigung der Richtigkeit das rechts alleinstehende x_i streichen, sodass die endlichen Gleichungen der von $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ erzeugten Gruppe so lauten:

$$(19) \qquad x_i' = \sum_1^s {}_k \sum_1^n {}_l \, \varrho_k \beta_{kil} x_l \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

oder auch

$$(19') \qquad x_i' = \sum_1^s {}_k \, \varrho_k Y_k x_i \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Dabei sind, wie gesagt, $\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_s$ sämtlich wesentliche Parameter der Gruppe. Also:

Gruppe der lin. Trf., die mit denen einer Gruppe vertauschbar sind.

Satz 2*): *Der Inbegriff aller infinitesimalen linearen homogenen Transformationen $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ in n Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$, die mit den infinitesimalen Transformationen $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ einer vorgelegten linearen homogenen Gruppe in $x_1 \,.\,.\, x_n$ vertauschbar sind, erzeugt eine Gruppe mit endlichen Gleichungen von der Form:*

$$x_i' = \sum_1^s {}_k \sum_1^n {}_l \, \varrho_k \beta_{kil} x_l \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

in der die s Parameter der Gruppe $\varrho_1 \,.\,.\, \varrho_s$ linear und homogen auftreten.

Reciproke einf. transit. lin. hom. Gruppen.

Wir beginnen nun eine neue Betrachtung, indem wir uns eine solche *einfach transitive lineare homogene Gruppe G_1* in $x_1 \,.\,.\, x_n$ vorgelegt denken, *deren reciproke Gruppe G_2 ebenfalls linear homogen ist.* Dabei erinnern wir an die in § 3 des 17. Kap. gegebene Definition der Reciprocität.

Lassen wir G_1 an die Stelle der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ des letzten Satzes treten, so ist G_2 die daselbst mit $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ bezeichnete Gruppe, also $r = s = n$. In der That, es enthält ja die zu G_1 reciproke Gruppe alle infinitesimalen Transformationen, die mit denen von G_1 vertauschbar sind. Da wir voraussetzen, dass die reciproke Gruppe G_2 auch linear homogen ist, so enthält sie also alle infinitesimalen linearen homogenen Transformationen in $x_1 \,.\,.\, x_n$, die mit denen von

*) Study, a. a. O. S. 201.

G_1 vertauschbar sind, und wird von ihnen erzeugt. Der letzte Satz sagt daher aus:

In den endlichen Gleichungen der Gruppe G_2 treten die n Parameter der Gruppe auf den rechten Seiten linear und homogen auf, oder exacter ausgesprochen: Man kann die endlichen Gleichungen der G_2 so schreiben, dass die Parameter in dieser Weise auftreten.

Aber umgekehrt wird ganz entsprechend auch die Gruppe G_1 von allen infinitesimalen linearen homogenen Transformationen in $x_1 \ldots x_n$ erzeugt, die mit denen von G_2 vertauschbar sind. Wir können also denselben Schluss für die endlichen Gleichungen der Gruppe G_1 machen.

Die endlichen Gleichungen beider Gruppen lassen sich also, wenn jedesmal $y_1 \ldots y_n$ die n Parameter bedeuten, in den Formen schreiben:

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} G_1: \quad x_i' &= \sum_1^n{}^k \sum{}^l a_{ikl}\, x_k\, y_l, \\ G_2: \quad x_i' &= \sum_1^n{}^k \sum{}^l b_{ikl}\, x_k\, y_l \end{aligned} \right\} (i = 1, 2 \ldots n).$$

Wir wollen dies Ergebnis als Satz formulieren:

Satz 3*): *Die endlichen Gleichungen zweier zu einander reciproker einfach transitiver Gruppen von linearen homogenen Transformationen in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ lassen sich stets in einer solchen Form schreiben, dass die transformierten Veränderlichen bilineare homogene Functionen der n ursprünglichen Veränderlichen und der n Gruppenparameter werden.*

Neue Veränderliche vermöge lin. hom. Trf.

Wir werden nunmehr die beiden zu einander reciproken Gruppen G_1 und G_2 dadurch auf noch einfachere Formen bringen, dass wir in beide durch ein und dieselbe passend gewählte lineare homogene Transformation neue Veränderliche einführen. Allerdings verfahren wir dabei so, dass wir zunächst nur in die Gruppe G_1 die neuen Veränderlichen einführen, wodurch sie eine gewisse neue Form $\mathfrak{G}_1$ annimmt. Dieselbe Transformation wird gleichzeitig G_2 in eine neue Gruppe $\mathfrak{G}_2$ überführen, und zwar ist $\mathfrak{G}_2$ die zu $\mathfrak{G}_1$ reciproke Gruppe. Wir werden im Folgenden von G_1 nur die in den ersten Gleichungen (20) ausgedrückten Eigenschaften gebrauchen, nämlich die, *dass G_1 eine einfach transitive Gruppe von linearen homogenen Transformationen ist, in deren endlichen Gleichungen die Parameter ebenfalls linear und homogen auftreten.* Es wird uns gelingen, diese Gruppe G_1 direct in

*) Study a. a. O. S. 201.

eine Gruppe $\mathfrak{G}_1$ überzuführen, die zu einem Zahlensystem gehört. Alsdann aber ist es augenscheinlich, dass zu $\mathfrak{G}_1$ die ebenfalls lineare homogene reciproke Gruppe $\mathfrak{G}_2$ gehört. Die früher gemachte Voraussetzung, dass die zu $\mathfrak{G}_1$ reciproke Gruppe auch linear und homogen sei, wird also nicht benutzt. *Daher geben die Betrachtungen von jetzt ab auch den Beweis der zweiten Hälfte des Theorems 38.*

Zur Abkürzung seien die endlichen Gleichungen der Gruppe G_1 für die nächsten Betrachtungen einfach so geschrieben:

$$x_i' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2 \,..\, n). \tag{21}$$

Dabei bedeuten die f_i, wie wir wissen, bilineare homogene Functionen der Variabeln $x_1 \,..\, x_n$ und der Parameter $y_1 \,..\, y_n$. Wir machen nun eine kleine Einschaltung:

Führen wir zwei Transformationen der Gruppe G_1 nach einander aus, die mit den Parametern $y_1 \,..\, y_n$ und die mit den Parametern $y_1' \,..\, y_n'$, indem wir setzen:

$$x_i' = f_i(x, y), \quad x_i'' = f_i(x', y') \quad (i = 1, 2 \,..\, n). \tag{22}$$

Die Aufeinanderfolge ist einer einzigen Transformation der G_2 mit gewissen Parametern $y_1'' \,..\, y_n''$ äquivalent:

$$x_i'' = f_i(x, y'') \quad (i = 1, 2 \,..\, n). \tag{23}$$

Dabei sind $y_1'' \,..\, y_n''$ gewisse Functionen von $y_1 \,..\, y_n$ und $y_1' \,..\, y_n'$, die wir so bezeichnen:

$$y_i'' = \varphi_i(y, y') \quad (i = 1, 2 \,..\, n). \tag{24}$$

Da in (22) die y und y' linear und homogen auf den rechten Seiten auftreten, so ist es klar, dass die y'' in den durch Elimination von $x_1' \,..\, x_n'$ aus (22) hervorgehenden Gleichungen (23) *bilineare homogene Functionen* $\varphi_1 \,..\, \varphi_n$ von $y_1 \,..\, y_n$ und $y_1' \,..\, y_n'$ sind. Sicher bestehen nun die Functionalgleichungen:

$$f_i(f(x, y), y') = f_i(x, \varphi(y, y')) \quad (i = 1, 2 \,..\, n), \tag{25}$$

die eben jene Elimination von $x_1' \,..\, x_n'$ aus (22) zum Ausdruck bringen.

Es bedeute nun $x_1^0 \,..\, x_n^0$ ein bestimmt, aber allgemein gewähltes Wertsystem der Veränderlichen $x_1 \,..\, x_n$. Alsdann führen wir in G_1 als neue Veränderliche die n Grössen $\mathfrak{x}_1 \,..\, \mathfrak{x}_n$ ein, die durch die n Gleichungen definiert werden:

$$x_i = f_i(x^0, \mathfrak{x}) \quad (i = 1, 2 \,..\, n) \tag{26}$$

oder also nach (20) durch die n Gleichungen:

(26') $$x_i = \sum_1^n {}^k \sum {}^l a_{ikl}\, x_k^0\, \mathfrak{x}_l \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

In der That bestimmen diese Gleichungen $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$ als von einander unabhängige Functionen von $x_1 \,.\,.\, x_n$. Denn wir wählen das Wertsystem $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$ so, dass die Determinante

$$\left| \sum_1^n {}^k a_{ikl}\, x_k^0 \right| \neq 0$$

ist. Dies ist möglich, da sie nicht identisch Null ist für alle Wertsysteme $x_1^0 \,.\,.\, x_n^0$, weil die Gleichungen (20) der einfach transitiven Gruppe G_1 nach den n Parametern $y_1 \,.\,.\, y_n$ auflösbar sind. $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$ sind also nach (26') von einander unabhängige lineare homogene Functionen der ursprünglichen Veränderlichen $x_1 \,.\,.\, x_n$.

Bestimmung der neuen Form der einen Gruppe.

Um die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$ in G_1 einzuführen, brauchen wir nun die Gleichungen (26) oder (26') gar nicht erst nach $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$ aufzulösen. Wir haben nämlich, wenn wir die neuen Veränderlichen in alle unsere Gleichungen von (22) an einführen wollen, statt $x_1 \,.\,.\, x_n$, $x_1' \,.\,.\, x_n'$, $x_1'' \,.\,.\, x_n''$ in cogredienter Weise $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$, $\mathfrak{x}_1' \,.\,.\, \mathfrak{x}_n'$, $\mathfrak{x}_1'' \,.\,.\, \mathfrak{x}_n''$ einzuführen vermöge der Gleichungen:

$$x_i = f_i(x^0, \mathfrak{x}), \quad x_i' = f_i(x^0, \mathfrak{x}'), \quad x_i'' = f_i(x^0, \mathfrak{x}'')$$
$$(i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Die Transformation (21) lässt sich daher in den neuen Veränderlichen so schreiben:

$$f_i(x^0, \mathfrak{x}') = f_i(f(x^0, \mathfrak{x}), y) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Hierfür aber können wir infolge der Functionalgleichungen (25) auch schreiben:

$$f_i(x^0, \mathfrak{x}') = f_i(x^0, \varphi(\mathfrak{x}, y)) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Es sind dies n Gleichungen, deren linke Seiten in $\mathfrak{x}_1' \,.\,.\, \mathfrak{x}_n'$, deren rechte Seiten in $\varphi_1(\mathfrak{x}, y) \,.\,.\, \varphi_n(\mathfrak{x}, y)$ linear und homogen sind. Da die Determinante der linken Seite hinsichtlich $\mathfrak{x}_1' \,.\,.\, \mathfrak{x}_n'$ nach dem Obigen nicht Null ist, lassen sich die Gleichungen in nur eindeutiger Weise nach $\mathfrak{x}_1' \,.\,.\, \mathfrak{x}_n'$ auflösen. Man sieht aber aus ihrer Form unmittelbar, dass sie die Auflösung besitzen:

(27) $$\mathfrak{x}_i' = \varphi_i(\mathfrak{x}, y) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n).$$

Die φ_i sind hierbei, wie wir wissen, bilineare homogene Functionen von $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$ und $y_1 \,.\,.\, y_n$. Dies ist also die Form $\mathfrak{G}_1$, die unsere Gruppe G_1 durch Einführung der Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \,.\,.\, \mathfrak{x}_n$ vermöge der durch (26) oder (26') gegebenen linearen homogenen Transformation annimmt.

Nach wie vor ist die Aufeinanderfolge der Transformationen der Gruppe, die zu den Parametern $y_1 \ldots y_n$ und $y_1' \ldots y_n'$ gehören, äquivalent derjenigen Transformation, die zu den Parametern $y_1'' \ldots y_n''$ gehört, wobei $y_1'' \ldots y_n''$ die Functionen $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ von $y_1 \ldots y_n$ und $y_1' \ldots y_n'$ in der früheren Weise sind. Die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen

$$\mathfrak{x}_i' = \varphi_i(\mathfrak{x}, y) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und

$$\mathfrak{x}_i'' = \varphi_i(\mathfrak{x}', y') \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

der Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ist also äquivalent der Transformation

$$\mathfrak{x}_i'' = \varphi_i(\mathfrak{x}, y'') \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

der Gruppe $\mathfrak{G}_1$, wenn

$$y_i'' = \varphi_i(y, y') \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ist.

Die lineare homogene einfach transitive Gruppe $\mathfrak{G}_1$ hat also die Eigentümlichkeit, *dass die Parameter $y_1'' \ldots y_n''$ derjenigen ihrer Transformationen, die der Aufeinanderfolge ihrer beiden Transformationen mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$ bez. $y_1' \ldots y_n'$ äquivalent ist, sich durch $y_1 \ldots y_n$ und $y_1' \ldots y_n'$ genau so ausdrücken, wie bei einer allgemeinen Transformation der Gruppe die transformierten Veränderlichen $\mathfrak{x}_1' \ldots \mathfrak{x}_n'$ durch die ursprünglichen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ und die Parameter $y_1 \ldots y_n$.* Die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ ist also, wie aus den Bemerkungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, *ihre eigene Parametergruppe.*

Die Gruppe als ihre eigene Parametergruppe.

Bei der Einführung der neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ vermöge (26) traten n unter einer gewissen Beschränkung ganz beliebig wählbare Constanten $x_1^0 \ldots x_n^0$ auf. Hieraus folgt, dass die Gruppe G_1 nicht nur auf eine Weise auf die Form $\mathfrak{G}_1$, die ihre eigene Parametergruppe ist, sondern auf unendlich viele Weisen in diese neue Form überführbar ist.

Wir wollen nun die Gruppe G_1 in der zuletzt gefundenen Form $\mathfrak{G}_1$ dargestellt denken und der Bequemlichkeit halber die jetzigen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ mit $x_1 \ldots x_n$ bezeichnen.

Die vorgelegte Gruppe ist also durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer passenden linearen homogenen Transformation auf eine solche Form G_1:

$$(28) \qquad x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$ gebracht worden, dass sie mit ihrer Parametergruppe

$$(29) \qquad y_s'' = \sum_1^n{}^k \sum{}^l \gamma_{kls} y_k y_l' \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

identisch wird.

Aus dieser Eigenschaft folgen gewisse *Beziehungen zwischen den Constanten* γ_{iks}. Setzt man nämlich ausser (28) die Transformation von G_1 mit den Parametern $y_1' \ldots y_n'$ an, die $x_1' \ldots x_n'$ weiterhin in $x_1'' \ldots x_n''$ überführt:

Beziehungen zwischen den Constanten.

$$x_t'' = \sum_1^n{}^s \sum{}^l \gamma_{slt} x_s' y_l' \quad (t = 1, 2 \ldots n)$$

und eliminiert aus diesen Gleichungen und (28) die $x_1' \ldots x_n'$, so ergiebt sich:

$$(30) \qquad x_t'' = \sum_{s,i,k,l}^{1 \ldots n} \gamma_{iks} \gamma_{slt} x_i y_k y_l' \quad (t = 1, 2 \ldots n).$$

Diese Transformation ist aber, wissen wir, mit derjenigen Transformation der Gruppe (28) identisch, in der die Parameter die Werte $y_1'' \ldots y_n''$ besitzen und die sich so schreiben lässt:

$$x_t'' = \sum_1^n{}^i \sum{}^s \gamma_{ist} x_i y_s'' \quad (t = 1, 2 \ldots n)$$

oder wegen (29) so:

$$x_t'' = \sum_{s,i,k,l}^{1 \ldots n} \gamma_{kls} \gamma_{ist} x_i y_k y_l' \quad (t = 1, 2 \ldots n).$$

Der Vergleich mit (28) giebt demnach für die γ_{iks} die Relationen:

$$(31) \qquad \sum_1^n{}^s (\gamma_{iks} \gamma_{slt} - \gamma_{kls} \gamma_{ist}) = 0$$
$$(i, k, l, t = 1, 2 \cdots n).$$

(Es sind dies wieder die Relationen (5) des § 1.)

Da die Gruppe (28) einfach transitiv ist, so sind ihre rechten Seiten sowohl hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$ als auch hinsichtlich $y_1 \ldots y_n$ von einander unabhängig, d. h. es ist keine der Determinanten:

$$\Delta_x \equiv \left| \sum_1^n{}^i \gamma_{iks} x_i \right|, \quad \Delta_y' \equiv \left| \sum_1^n{}^k \gamma_{iks} y_k \right|$$

identisch Null.

Die neue Form der anderen Gruppe.

Es ist nun leicht, die zur Gruppe G_1 reciproke Gruppe direct hinzuschreiben. Sie geht nämlich aus (28) einfach dadurch hervor, dass jedes γ_{iks} durch γ_{kis} ersetzt wird:

$$(32) \qquad x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{kis} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n).$$

In der That, diese Gleichungen (32) stellen zunächst ∞^n verschiedene lineare homogene Transformationen von $x_1 \ldots x_n$ in $x_1' \ldots x_n'$ dar, da $\Delta_y \not\equiv 0$ und $\Delta_x' \not\equiv 0$ ist. Ferner bilden sie eine Gruppe, denn führt man nach der Transformation (32) die mit den Parametern $y_1' \ldots y_n'$ aus, so geht als der Aufeinanderfolge äquivalent augenscheinlich diejenige Transformation hervor, die aus (30) entsteht, wenn man darin γ_{iks} durch γ_{kis} und γ_{slt} durch γ_{lst} ersetzt. Wenn wir aber in (31) die Indices i und l vertauschen, so folgt, dass

$$\sum_1^n {}^s \gamma_{kis} \gamma_{lst} = \sum_1^n {}^s \gamma_{lks} \gamma_{sit}$$

ist, sodass die äquivalente Transformation so geschrieben werden kann:

$$x_t'' = \sum_{s,i,k,l}^{1 \ldots n} \gamma_{lks} \gamma_{sit} x_i y_k y_l' \quad (t = 1, 2 \ldots n).$$

Dies ist aber nichts anderes als eine Transformation

$$x_t'' = \sum_1^n {}^s \sum {}^i \gamma_{sit} x_i z_s'' \quad (t = 1, 2 \ldots n)$$

aus der Schar aller Transformationen (32) und zwar ist dabei:

$$z_s'' = \sum_1^n {}^k \sum {}^l \gamma_{lks} y_k y_l' \quad (s = 1, 2 \ldots n).$$

Also bilden alle Transformationen (32) eine einfach transitive lineare homogene Gruppe. Dabei ist die Aufeinanderfolge der Transformationen der Gruppe mit den Parametern $y_1 \ldots y_n$ bez. $y_1' \ldots y_n'$ äquivalent einer Transformation der Gruppe mit solchen Parametern $z_1'' \ldots z_n''$, dass sich die $z_1'' \ldots z_n''$ durch $y_1 \ldots y_n$ und $y_1' \ldots y_n'$ genau so ausdrücken wie bei einer allgemeinen Transformation der Gruppe (32) die neuen Veränderlichen $x_1' \ldots x_n'$ durch die alten $x_1 \ldots x_n$ und die Parameter $y_1 \ldots y_n$. Also hat auch diese Gruppe (32) jene besondere Eigentümlichkeit, die der Gruppe G_1 in der Form (28) zukam. D. h. auch die Gruppe (32) ist *ihre eigene Parametergruppe.*

Vertauschbarkeit beider Gruppen.

Noch bleibt übrig zu zeigen, dass jede Transformation der Gruppe (32) mit jeder Transformation der Gruppe (28) *vertauschbar*

ist. Zu dem Zweck üben wir zuerst nacheinander die Transformation der Gruppe (28) mit den Parametern $y_1 \dots y_n$ und die der Gruppe (32) mit den Parametern $z_1 \dots z_n$ aus, indem wir also setzen:

$$x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \dots n),$$

$$x_t'' = \sum_1^n {}^s \sum {}^l \gamma_{lst} x_s' z_l \quad (t = 1, 2 \dots n).$$

Elimination der Zwischenwerte $x_1' \dots x_n'$ liefert als äquivalente Transformation:

$$x_t'' = \sum_{s,i,k,l}^{1 \dots n} \gamma_{iks} \gamma_{lst} x_i y_k z_l \quad (t = 1, 2 \dots n), \tag{33}$$

die im allgemeinen weder der Gruppe (28) noch der Gruppe (32) angehört. Wenn wir die Reihenfolge vertauschen, also nacheinander setzen:

$$x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{kis} x_i z_k \quad (s = 1, 2 \dots n),$$

$$x_t'' = \sum_1^n {}^s \sum {}^l \gamma_{slt} x_s' y_l \quad (t = 1, 2 \dots n),$$

so kommt als äquivalente Transformation

$$x_t'' = \sum_{s,i,k,l}^{1 \dots n} \gamma_{kis} \gamma_{slt} x_i z_k y_l \quad (t = 1, 2 \dots n). \tag{34}$$

Sie ist mit (33) identisch, denn in (33) hat $x_i y_k z_l$ den Coefficienten

$$\sum_1^n {}^s \gamma_{iks} \gamma_{lst};$$

in (34) diesen

$$\sum_1^n {}^s \gamma_{lis} \gamma_{skt}.$$

Beide Werte sind aber infolge der Relationen (31) einander gleich.

Damit ist denn vollständig bewiesen, dass (32) die zur Gruppe G_1 reciproke Gruppe G_2 darstellt. Hiernach sind wir zu dem folgenden Satz gelangt:

Zurückführung recipr. lin. Gruppen auf besond. Formen.

Satz 4: *Ein Paar zu einander reciproker einfach transitiver Gruppen von linearen homogenen Transformationen in n Veränderlichen kann dadurch, dass man in beide Gruppen vermöge derselben linearen homogenen*

Transformation neue Veränderliche $x_1 \ldots x_n$ einführt, auf eine solche Form gebracht werden, dass die Gleichungen

$$x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

die eine, die Gleichungen

$$x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{kis} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

die andere Gruppe darstellen, wenn jedesmal $y_1 \ldots y_n$ die Parameter bedeuten. Jede der beiden Gruppen ist alsdann ihre eigene Parametergruppe.

Unendlich viele Arten der Reduction.

Wir heben noch ausdrücklich hervor, dass wir augenscheinlich ein vorgelegtes Paar zu einander reciproker einfach transitiver linearer homogener Gruppen in n Veränderlichen auf unendlich viele Weisen auf ein Gruppenpaar, wie es in dem Satze angegeben ist, durch Einführung neuer Veränderlicher vermöge einer linearen homogenen Transformation zurückführen können. Wir erkennen aber: Ist die einfach transitive Gruppe G_1 oder:

$$x_s' = \sum_1^n {}^i \sum {}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

ihre eigene Parametergruppe, und führen wir neue Veränderliche $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ vermöge einer linearen homogenen Transformation

$$\bar{x}_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ein, so ist sie nicht mehr ihre eigene Parametergruppe, sobald sie dabei überhaupt ihre Gestalt ändert, denn die Parameter setzen sich ja wie vorher zu neuen Parametern zusammen. Soll also auch die neue Gruppe $\bar{G}_1$ ihre eigene Parametergruppe sein, so muss man *gleichzeitig neue Parameter* $\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n$ in cogredienter Weise, d. h. durch dieselbe lineare homogene Transformation

$$\bar{y}_i = a_{i1} y_1 + \cdots + a_{in} y_n \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

einführen.

Das zu den Gruppen gehörige Zahlensystem.

Es ist nunmehr leicht zu beweisen, *dass zu jedem Paar reciproker einfach transitiver linearer homogener Gruppen G_1 und G_2 in n Veränderlichen ein Zahlensystem in bestimmter Weise zugeordnet ist.*

Wir haben ja gesehen, dass wir in die beiden Gruppen durch dieselbe lineare homogene Transformation solche neue Veränderliche $x_1 \ldots x_n$ einführen können, dass sie die Formen

$$(35) \qquad \left\{\begin{array}{ll} G_1: & x_s' = \sum_1^n{}^i \sum{}^k \gamma_{iks} x_i y_k \\ G_2: & x_s' = \sum_1^n{}^i \sum{}^k \gamma_{kis} x_i y_k \end{array}\right\} (s = 1, 2 \, .. \, n)$$

annehmen und dabei ihre eigenen Parametergruppen sind.

Schreiben wir die allgemeine Transformation der Gruppe G_1 einmal abgekürzt so:

$$x' = (xy),$$

indem diese symbolische Gleichung die n ersten Gleichungen (35) repräsentieren soll, so drückt sich die Eigenschaft der Gruppe, ihre eigene Parametergruppe zu sein, so aus: Die Aufeinanderfolge der beiden Transformationen

$$x' = (xy), \quad x'' = (x'y')$$

ist der Transformation

$$x'' = (xy'')$$

äquivalent, wenn

$$y'' = (yy')$$

ist, oder also es ist in unserer symbolischen Schreibweise

$$((xy)y') \equiv (x(yy')).$$

Diese Verknüpfungen (xy) zweier Grössenreihen $x_1 \, .. \, x_n$, $y_1 \, .. \, y_n$ befolgen also *das associative Gesetz.*

Wir setzen daher zwischen n irreducibelen Einheiten $e_1 \, .. \, e_n$ die Multiplicationsregeln fest:

$$e_i e_k = \sum_1^n{}^s \gamma_{iks} e_s \quad (i, k = 1, 2 \, .. \, n).$$

Alsdann stellt sich die Multiplication der Zahlen

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n,$$

also, wenn wir die in § 1 eingeführten Begriffsbestimmungen benutzen, die Operation

$$x' = x_1' e_1 + \cdots + x_n' e_n = xy$$

rechnerisch so dar:

$$x_s' = \sum_1^n{}^i \sum{}^k \gamma_{iks} x_i y_k,$$

also genau in der Form der ersten n Gleichungen (35). Wir können demnach dem obigen Verknüpfungssymbol (xy) direct die Bedeutung

der Multiplication xy in dem System $(e_1 \,.\,.\, e_n)$ unterlegen und haben für diese Multiplication die Regel:

$$(xy)y' = x(yy'),$$

d. h. *das associative Gesetz.*

Ferner ist die Multiplication umkehrbar, da die ersten n Gleichungen (35) nach $x_1 \,.\,.\, x_n$ wie nach $y_1 \,.\,.\, y_n$ auflösbar sind. Die Gruppe G_1 stellt folglich die Multiplication in einem gewissen Zahlensystem von eben der Art dar, wie wir es in § 1 allgemein definiert haben. Zu jedem solchen Zahlensystem gehört nach § 1 eine zweite zu G_1 reciproke einfach transitive Gruppe, die sich symbolisch so darstellt:

$$x' = yx.$$

Dass dies gerade die obige Gruppe G_2 ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Study's Theorem.

Hiermit sind wir zu dem Study'schen *Theorem**) gelangt:

Theorem 40: *Zu jedem Paar reciproker einfach transitiver Gruppen von linearen homogenen Transformationen gehört ein complexes Zahlensystem derart, dass die beiden Gruppen durch Einführung derselben Veränderlichen vermöge einer geeigneten linearen homogenen Transformation in die zu einem Zahlensystem gehörigen beiden Parametergruppen übergehen.*

Hiermit ist dann auch nach dem früher Gesagten das Theorem 38 vollständig bewiesen.

Ein vorgelegtes Zahlensystem $(e_1 \,.\,.\, e_n)$ kann seine äussere Gestalt dadurch erheblich ändern, dass man statt $e_1 \,.\,.\, e_n$ irgend welche n andere Zahlen des Systems als Einheiten benutzt, zwischen denen keine lineare homogene Relation besteht, indem man also etwa

$$\bar{e}_j = \sum_1^n {}_i\, \alpha_{ji} e_i \quad (j = 1,\, 2 \,.\,.\, n)$$

setzt, sobald man nur die Constanten α_{ij} so wählt, dass ihre Determinante nicht verschwindet. Wählt man diese n von einander linear unabhängigen Zahlen $\bar{e}_1 \,.\,.\, \bar{e}_n$ des Systems als Einheiten, so ändern sich natürlich die Multiplicationsregeln der Einheiten. Aber wir werden das System $(\bar{e}_1 \,.\,.\, \bar{e}_n)$ trotzdem nicht als wesentlich verschieden vom System $(e_1 \,.\,.\, e_n)$ betrachten. Vielmehr rechnen wir zwei Zahlensysteme, die aus einander durch andere Auswahl der Einheiten hervorgehen, zu

*) Study a. a. O. S. 202.

demselben *Typus*. Kennt man ein System des Typus, so kennt man ja sofort alle Systeme desselben.

Typus eines Systems.

Für die mit dem Systeme verbundenen Gruppen G_1 und G_2 kommt die Einführung neuer Einheiten darauf hinaus, dass statt der Veränderlichen und Parameter der Gruppe durch eine gewisse lineare homogene Transformation gleichzeitig neue Veränderliche und Parameter eingeführt werden, wodurch, wie wir wissen, wieder zu einander reciproke Gruppen hervorgehen, die ihre eigenen Parametergruppen sind. Da nun zwei lineare homogene Gruppen mit einander (innerhalb der allgemeinen linearen homogenen Gruppe) *gleichberechtigt* sind, wenn sie durch lineare homogene Transformation in einander übergehen, so rechnen wir sie zu demselben *Typus*. Daher gehören zu Zahlensystemen desselben Typus offenbar auch Gruppen desselben Typus.

Wenn wir ferner das Zahlensystem dadurch abändern, dass wir in der Multiplicationsregel

$$e_i e_k = \sum_1^n {}_s \gamma_{iks} e_s \quad (i,\ k = 1,\ 2 \, . \, . \, n)$$

e_i und e_k links vertauschen, so kommt das darauf hinaus, dass wir allgemein als Product zweier Zahlen x, y des Systems nicht das frühere Product xy, sondern das Product yx betrachten. Nach wie vor gilt dann das associative Gesetz. Denn multiplicieren wir in dem neuen Sinne yx ferner mit z, so kommt $z(yx)$, und dies ist gleich $(zy)x$. Die Abänderung kann auch so ausgesprochen werden: Wir ersetzen jedes γ_{iks} durch das entsprechende γ_{kis}, d. h. wir vertauschen die Gruppen G_1 und G_2 mit einander. Das so hervorgehende Zahlensystem heisse das zum ursprünglichen *reciproke* System. Da es keine wesentlichen Verschiedenheiten von jenem darbietet, so rechnen wir es zu demselben Typus wie das ursprüngliche System. Es folgt also noch

Satz 5: *Zu je zwei Zahlensystemen desselben Typus gehören zwei Paare reciproker einfach transitiver Gruppen, die durch eine lineare homogene Transformation in einander übergehen, zu je zwei Systemen verschiedener Typen aber zwei Gruppenpaare, die nicht durch eine lineare homogene Transformation in einander überführbar sind.*

Bez. zw. Typen von Systemen und Gruppenpaaren.

§ 4. Beispiele von Zahlensystemen.

Lie hatte schon lange allgemeine Methoden zur Aufstellung aller Untergruppen einer gegebenen Gruppe entwickelt. Diese Bestimmung

Gruppentheoretische Berechnung der Systeme.

hatte er u. A. vollständig durchgeführt für die allgemeine lineare homogene Gruppe in zwei und drei Veränderlichen, ferner hatte er ausführliche Andeutungen für den Fall von vier Veränderlichen gegeben. Es war also von vornherein klar, dass die Bestimmung der Zahlensysteme in zwei und drei Einheiten keinerlei und der in vier Einheiten nur geringe Schwierigkeiten bieten konnte. Es handelte sich ja nur darum, unter den eben erwähnten Untergruppen der linearen homogenen Gruppen diejenigen einfach transitiven herauszugreifen, in deren Gleichungen auch die Parameter linear auftreten. Diese auf Zahlensysteme zurückzuführen, machte dann keine Mühe. Die Rechnung wurde durch die aus der Form der Gruppen des Zahlensystems unmittelbar entspringende Bemerkung von Lie erleichtert, dass es sich um die einfach transitiven linearen homogenen Gruppen

$$X_k f \equiv \xi_{k1} p_1 + \cdot\cdot + \xi_{kn} p_n \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

handelt, deren endliche Transformationen die Form besitzen:

$$x_i' = y_1 \xi_{1i} + \cdot\cdot + y_n \xi_{ni} \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

unter $y_1 \,.\,.\, y_n$ die Parameter verstanden. Fragt es sich, ob eine einfach transitive Gruppe

$$U_k f \equiv \sum_1^n{}^i \sum{}^j \alpha_{kij} x_j p_i \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

zu einem Zahlensystem gehört, so hat man also nur zu untersuchen, ob die endlichen Gleichungen der Gruppe diese sind:

$$x_i' = \sum_1^n{}^k y_k \left(\sum_1^n{}^j \alpha_{kij} x_j \right) \quad (i = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

unter $y_1 \,.\,.\, y_n$ die Parameter verstanden. Ist dies der Fall, so gehört nämlich infolge des Theorems 38 zu der betreffenden Gruppe ein Zahlensystem. Durch Einführung passender linearer homogener Functionen der $x_1 \,.\,.\, x_n$ als neuer $x_1 \,.\,.\, x_n$ bringt man sie dann auf die nötige Form der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_n f$ eines Systems.

Es ist also klar, dass implicite durch Lie's Arbeiten das Problem der Bestimmung aller Zahlensysteme in 2 und 3 Einheiten erledigt und für die Systeme in 4 Einheiten wenigstens in hohem Masse vorbereitet worden war.

Andere Berechnungsmethoden.

Man kann aber auch darauf ausgehen, *direct die Systeme zu bestimmen*, ohne die Beziehungen zur Gruppentheorie zu verwerten, indem man den eigentümlichen Algorithmus der Systeme benutzt. In der That sind von verschiedenen Autoren verschiedene Wege bei der Bestimmung der Systeme eingeschlagen worden.

Die *Systeme in zwei Einheiten* scheinen zuerst und zwar vor 1880 von Weierstrass in seinen Vorlesungen über Functionentheorie aufgestellt worden zu sein. Unabhängig davon berechnete Cayley *) 1883 ebenfalls diese. *Die Systeme in drei und vier Einheiten* wurden zum ersten Male von Study **) 1889 aufgestellt. Er bediente sich dabei einer directen Methode durch Benutzung der charakteristischen Gleichung eines Systems, von der wir unten sprechen werden. Unabhängig davon berechnete Scheffers ***) noch einmal die Systeme in *drei* Einheiten, indem er von der Lie'schen Aufstellung aller linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen ausging. Alsdann bestimmte Scheffers †) auf einem zwar auf gruppentheoretische Sätze sich stützenden, aber von der Lie'schen Aufstellung der linearen homogenen Gruppen unabhängigen Wege 1889 nochmals die Systeme in vier Einheiten und stellte zugleich alle *Zahlensysteme in fünf Einheiten* auf. Weiter ist man bis heute nicht gegangen.

Geschichtliches über die Berechnung der Systeme.

Es giebt aber gewisse *Classen von Zahlensystemen*, deren allgemeine Form man in beliebig vielen Veränderlichen untersucht hat. Um diese Classen zu charakterisieren, müssen hier noch einige Begriffe erklärt werden:

Wählt man in einem Systeme $(e_1 \ldots e_n)$ eine allgemeine Zahl

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

und bildet die Producte xx, $xxx\ldots$ oder kürzer geschrieben x^2, $x^3\ldots$, so wird, da das System nur n Einheiten besitzt, also zwischen höchstens $n+1$ Zahlen des Systems stets eine lineare Gleichung mit gewöhnlichen Coefficienten besteht, mindestens die n^{te} Potenz x^n sich linear durch den Modul ε, sowie durch x, $x^2 \cdots x^{n-1}$ in der Form ausdrücken lassen:

$$x^n = \psi_1 x^{n-1} + \psi_2 x^{n-2} + \cdots + \psi_n \varepsilon,$$

in der ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_n$ gewöhnliche Coefficienten sind, nämlich offenbar gewisse ganze Functionen von $x_1 \ldots x_n$. Aber es kann schon eine frühere Potenz, sagen wir die k^{te}, x^k, von den vorhergehenden und dem Modul ε abhängig sein:

$$x^k = \varphi_1 x^{k-1} + \varphi_2 x^{k-2} + \cdots + \varphi_k \varepsilon. \tag{36}$$

Hierin sind dann φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_k$ wieder gewisse ganze Functionen der

*) *On double algebra.* Proceed. of the Lond. Math. Soc. XV, S. 185—197.

**) *Über Systeme von complexen Zahlen.* Gött. Nachr. 1889, S. 237—268.

***) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten ableitbaren höheren complexen Zahlen.* Leipz. Ber. 1889, S. 290—307.

†) *Über die Berechnung von Zahlensystemen.* Leipz. Ber. 1889, S. 400—457.

gewöhnlichen Zahlen $x_1 \ldots x_n$. Ist dies die niedrigste Potenz, so ist $\varphi_k \not\equiv 0$, da sonst durch Division mit x eine niedere Gleichung hervorginge. Die Zahl k heisst nun der *Grad des Systems.* Er ist an die Grenzen gebunden

Grad des Systems.

$$2 \leq k \leq n.$$

Charakter. Gleichung des Systems.

Die Gleichung (36) heisst die (reducierte) *charakteristische Gleichung des Systems.*

In ihr treten als nicht gewöhnliche, sondern höhere Zahlen nur die Potenzen x^k, $x^{k-1} \ldots x$ auf, denen sich als „nullte" Potenz der Modul $x^0 = \varepsilon$ zuordnen lässt. Fassen wir also für den Augenblick einmal x auch als eine gewöhnliche Zahl u auf, so liegt eine Gleichung k^{ten} Grades

$$u^k = \varphi_1 u^{k-1} + \varphi_2 u^{k-2} + \cdots + \varphi_k$$

vor, die k Wurzeln $u_1 \ldots u_k$ im gewöhnlichen Zahlengebiet besitzt. Es ist alsdann

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \varphi_1,$$
$$u_1 u_2 + u_1 u_3 + \cdots + u_{k-1} u_k = -\varphi_2$$

u. s. w. Deshalb kann die charakteristische Gleichung (36) auch so geschrieben werden:

$$(x - u_1 \varepsilon)(x - u_2 \varepsilon) \cdots (x - u_k \varepsilon) = 0. \tag{37}$$

Man darf aber hieraus nicht schliessen, dass $x = u_1 \varepsilon$ oder $u_2 \varepsilon$ u. s. w. ist. x ist ja eine allgemeine Zahl des Systems, während $u_1, u_2 \ldots u_k$ gewöhnliche Functionen der gewöhnlichen Zahlen $x_1 \ldots x_n$ sind. Man sieht also, dass in jedem Zahlensystem ein Product Null sein kann, ohne dass einer der Factoren Null ist. Diese Bemerkung sieht Hankel*) als die Antwort auf die Gauss'sche oben erwähnte Frage an.

Der Grad k des Systems hat übrigens, wie Study**) hervorhob, noch eine besondere Bedeutung: Es ist k die Stufenzahl, also $k - 1$ die Dimensionenzahl des kleinsten ebenen Raumes, in dem die Bahncurve eines Punktes $(x_1 \ldots x_n)$ bei einer allgemeinen eingliedrigen Untergruppe einer der Gruppen des Zahlensystems enthalten ist, vorausgesetzt, dass man $x_1 \ldots x_n$ als cartesische Punktcoordinaten deutet.

Wir können nunmehr die Problemstellung in mehreren neueren Arbeiten genauer angeben:

Weierstrass' Systeme.

In seinem citierten Briefe (1884) beschränkt sich Weierstrass

*) Hankel, a. a. O. S. 108.

**) Leipz. Ber. a. a. O. S. 194.

auf die Systeme, die *erstens* commutativ sind, *zweitens* den Grad $k = n$ besitzen und bei denen *drittens* die $k = n$ Wurzeln $u_1 \dots u_n$ sämtlich von einander verschieden sind. Er hätte übrigens die erste Annahme nicht zu machen brauchen, da sie eine Folge der beiden andern ist. Die Systeme Weierstrass' lassen sich sämtlich durch Einführung passender Einheiten $e_1 \dots e_n$ auf die allgemeine Form bringen, dass jedes $e_i^2 = e_i$, aber $e_i e_k = 0$ für $i \neq k$ ist.

Systeme $k = n$.

Study*) hat 1889 *alle Zahlensysteme* bestimmt, *deren Grad k gleich der Anzahl n der Einheiten* ist, unter denen also als Specialfälle die Weierstrass'schen Systeme vorhanden sind. Ferner bestimmte Scheffers**) 1891 *alle Zahlensysteme, deren Grad k um Eins kleiner als die Anzahl n der Einheiten ist*, und führte das entsprechende Problem für $k = n - 2$ soweit durch, dass nur noch unwesentliche kleinere Rechnungen übrig blieben. Ebenso bestimmte er***) die allgemeine Form der *Systeme, deren Grad* $k = 2$ ist.

Systeme $k = n - 1$.

Systeme $k = n - 2$.

Systeme $k = 2$.

Man kann endlich gewisse allgemeine Sätze über die Structur der Zahlensysteme aufstellen. In dieser Richtung sind die Arbeiten von Scheffers (1889) und Molien (1892)†) zu nennen. Auf diese Untersuchungen kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

Wir haben in diesem Werke alle linearen homogenen Gruppen in 2 und 3 Veränderlichen bestimmt und wollen sie nunmehr benutzen, um alle Zahlensysteme in 2 und 3 Einheiten daraus abzuleiten. Diese Berechnung kommt, wie wir wissen, im Wesentlichen darauf zurück, vermöge einer passenden linearen homogenen Transformation neue Veränderliche in die betreffenden Gruppen einzuführen.

Systeme in zwei Einheiten.

Zunächst bestimmen wir die *Systeme in zwei Einheiten.*

Wir haben aus der Schar aller Typen von linearen homogenen Gruppen in zwei Veränderlichen x_1, x_2 die einfach transitiven herauszugreifen. In Theorem 16, § 4 des 5. Kap., sind alle jene Typen aufgestellt. Da wir wissen, dass die in Frage kommenden Gruppen in x_1, x_2 (wegen der Existenz des Moduls ε im Systeme) die infinitesimale Transformation $x_1 p_1 + x_2 p_2$ enthalten müssen, so kommen von jenen Typen nur die dort mit 4) und 5) bezeichneten in betracht:

$$\text{I)}\quad x_1 p_2 \qquad x_1 p_1 + x_2 p_2,$$
$$\text{II)}\quad x_1 p_1 \qquad x_2 p_2.$$

*) Gött. Nachr. a. a. O. S. 262.

**) *Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen.* Math. Ann. 39, S. 335 ff.

***) Ebenda S. 342 ff.

†) *Über Systeme höherer complexer Zahlen.* Math. Ann. 41, S. 83—156.

Es treten in den endlichen Gleichungen beider Gruppen die Parameter linear auf. Um dies zu sehen, haben wir nur nach der an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Bemerkung von Lie die endlichen Gleichungen zu bilden. Sie würden, wenn y_1 und y_2 die Parameter bedeuten, bei der Gruppe I) diese sein müssen:

$$x_1' = x_1 y_2, \quad x_2' = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Man verificiert sofort, dass dies die endlichen Gleichungen von I) sind. Entsprechend sind

$$x_1' = x_1 y_1, \quad x_2' = x_2 y_2$$

die von II). Zu I) und II) gehören daher wirklich Zahlensysteme und zwar, da beide Gruppen aus vertauschbaren Transformationen bestehen, also die reciproken Gruppen mit ihnen selbst zusammenfallen, Systeme, in denen die Multiplication insbesondere *commutativ* ist.

Um die Systeme selbst zu erhalten, führen wir vermöge einer linearen homogenen Transformation neue Veränderliche $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ ein in der Art, wie es in § 3 in Formel (26) oder (26′) geschah. Wir verstehen also unter x_1^0, x_2^0 zwei Constanten und setzen bei der *ersten* Gruppe

Erster Fall.

$$x_1 = x_1^0 \mathfrak{x}_2, \quad x_2 = x_1^0 \mathfrak{x}_1 + x_2^0 \mathfrak{x}_2.$$

Insbesondere können wir, ohne die Auflösbarkeit dieser Gleichungen zu zerstören, $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0$ wählen. Dann aber kommt einfach

$$x_1 = \mathfrak{x}_2, \quad x_2 = \mathfrak{x}_1.$$

Die Gruppe lautet in den neuen Veränderlichen, wenn wir diese wieder statt mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ mit x_1, x_2 bezeichnen:

$$x_1' = x_2 y_1 + x_1 y_2, \quad x_2' = x_2 y_2.$$

Aus unserer allgemeinen Theorie folgt, dass diese Gruppe mit den Parametern y_1, y_2 ihre eigene Parametergruppe ist. Wir überlassen dem Leser, dies durch successive Ausführung zweier Transformationen der Gruppe zu verificieren. Die Multiplicationsregeln des zugehörigen Zahlensystems ergeben sich nun, wie zum Schluss des § 3 auseinandergesetzt wurde: Der Wert von $e_i e_k$ geht danach hervor, wenn wir den Coefficienten von $x_i y_k$ in der ersten Gleichung mit e_1, in der zweiten mit e_2 multiplicieren und sie dann addieren. So erhalten wir unmittelbar:

$$e_1 e_1 = 0, \quad e_1 e_2 = e_1, \quad e_2 e_1 = e_1, \quad e_2 e_2 = e_2.$$

Man kann verificieren, dass dies System dem associativen Gesetz $(e_i e_k) e_j = e_i (e_k e_j)$ genüge leistet. Z. B. ist:

$$(e_1 e_2)e_2 = e_1 e_2 = e_1,$$
$$e_1(e_2 e_2) = e_1 e_2 = e_1,$$

also $(e_1 e_2)e_2 = e_1(e_2 e_2)$.

Die allgemeine Multiplicationsregel ist hier diese:

$$(x_1 e_1 + x_2 e_2)(y_1 e_1 + y_2 e_2) = (x_2 y_1 + x_1 y_2)e_1 + x_2 y_2 e_2.$$

Die Coefficienten von e_1 und e_2 sind, wie es sein muss, die rechten Seiten der Gleichungen der Gruppe in ihrer letzten Form.

Um das System in übersichtlicher Form zu schreiben, wenden wir eine Tafel an, in die wir das Product $e_i e_k$ im Schnitt der i^{ten} Reihe mit der k^{ten} Zeile eintragen:

(I)

	1	2
1	0	e_1
2	e_1	e_2

Wir kommen zur zweiten Gruppe:

Zweiter Fall.

$$x_1' = x_1 y_1, \quad x_2' = x_2 y_2.$$

Diese ist schon von vornherein ihre eigene Parametergruppe, denn setzen wir noch

$$x_1'' = x_1' y_1', \quad x_2'' = x_2' y_2',$$

so giebt die Elimination von x_1', x_2' sofort:

$$x_1'' = x_1(y_1 y_1'), \quad x_2'' = x_2(y_2 y_2')$$

oder

$$x_1'' = x_1 y_1'', \quad x_2'' = x_2 y_2'',$$

wo

$$y_1'' = y_1 y_1', \quad y_2'' = y_2 y_2'$$

ist. Daher ist die Gruppe schon die eines Zahlensystems e_1, e_2. Das Product $e_i e_k$ ergiebt sich nach der oben ausgesprochenen Regel. Wir finden:

$$e_1 e_1 = e_1, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_2 e_1 = 0, \quad e_2 e_2 = e_2$$

oder in Tafelform:

(II)

	1	2
1	e_1	0
2	0	e_2

Hiermit sind alle Zahlensysteme in zwei Einheiten bestimmt.

Das System (II) geht durch Einführung von $e_1 + e_2$ und $i(e_1 - e_2)$ als Einheiten e_1 und e_2 über in das System:

	1	2
1	e_1	e_2
2	e_2	$-e_1$

Dieses System hat dieselben Multiplicationsregeln wie das System der gewöhnlich complexen Zahlen $\alpha + \beta i$, wenn man in ihnen 1 und i als Einheiten auffasst. (Vgl. das Beispiel in § 1.)

Systeme in drei Einheiten.

Wir kommen zur Bestimmung aller *Zahlensysteme in drei Einheiten.*

In § 3 des 19. Kap. sind alle linearen homogenen Gruppen in drei Veränderlichen aufgestellt worden. Von diesen kommen nur die einfach transitiven in betracht. Da wir ferner wissen, dass das Zahlensystem einen Modul ε besitzt, so muss das System insbesondere $U \equiv x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$ enthalten, denn dies ist das Symbol der infinitesimalen Transformation $x' = x(\varepsilon + \delta t)$. Demnach haben wir aus jener Zusammenstellung in § 3 des 19. Kap. nur die transitiven Typen unter VII auszuwählen, die U enthalten. Dies sind die folgenden:

$$
\begin{array}{llll}
1) & x_3 p_2 & x_3 p_1 + x_1 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
2) & x_3 p_2 & x_3 p_1 + x_2 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
3) & x_1 p_2 & x_1 p_1 + x_3 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
4) & x_3 p_2 & a x_1 p_1 + b x_2 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
5) & x_3 p_1 & x_3 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
6) & x_1 p_1 & x_2 p_2 & x_3 p_3, \\
7) & x_3 p_1 + x_1 p_2 & x_2 p_2 - x_3 p_3 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 .
\end{array}
$$

Aber es kommen von diesen nur die Typen in betracht, deren endliche Gleichungen die Parameter linear und homogen enthalten. Danach ist z. B. 2) nicht brauchbar. Denn wenn die Gruppe 2) in ihren endlichen Gleichungen die Parameter linear enthielte, so müssten sich diese endlichen Gleichungen nach der oben vorausgeschickten Bemerkung so schreiben lassen:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_3 y_2 + x_1 y_3, \\
x_2' &= x_3 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_3, \\
x_3' &= x_3 y_3,
\end{aligned}
$$

wobei unter y_1, y_2, y_3 die Parameter verstanden sein sollen. Aber diese Gleichungen stellen, wie man sofort verificieren kann, gar keine Gruppe dar. Derselbe Misserfolg ergiebt sich bei 3) und 7). Die Gruppe 4) ist, wie man analog sieht, nur dann zulässig, wenn $b = 0$ oder aber $b = a$ ist. Alle anderen Gruppen liefern Systeme. Es kommen also, wenn wir die Gruppen etwas anders ordnen, nur diese 5 Typen in betracht:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{I)} & x_3 p_1 & x_3 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
\text{II)} & x_3 p_2 & x_3 p_1 + x_1 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
\text{III)} & x_3 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
\text{IV)} & x_3 p_2 & x_1 p_1 & x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3, \\
\text{V)} & x_1 p_1 & x_2 p_2 & x_3 p_3.
\end{array}
$$

Von diesen 5 Gruppen bestehen alle mit Ausnahme von III) aus vertauschbaren Transformationen. Es giebt also in drei Einheiten vier commutative und ein nicht-commutatives Zahlensystem.

Zu ihrer Bestimmung verfahren wir genau so wie oben bei zwei Einheiten. Wir lesen zunächst sofort die endlichen Gleichungen der Gruppen ab und führen dann passende neue Veränderliche ein.

Erster Fall.

So liefert I) die endlichen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_3 y_1 + x_1 y_3, \\
x_2' &= x_3 y_2 + x_2 y_3, \\
x_3' &= x_3 y_3.
\end{aligned}
$$

Diese Gruppe hat schon die Form der Gruppe eines Zahlensystems. Man kann dies einmal direct einsehen, indem man zwei Transformationen nach einander ausführt und die Parameter der äquivalenten Transformation berechnet. Es ergiebt sich aber auch, wenn man die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ einführt, indem man die Hülfsgrössen $x_1^0 = x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 1$ wählt, denn dann kommt $x_1 = \mathfrak{x}_1$, $x_2 = \mathfrak{x}_2$, $x_3 = \mathfrak{x}_3$. Das Product $e_i e_k$ ist nun sofort abzulesen, wie früher. Man multipliciert die rechten Seiten der Gleichungen mit e_1, e_2, e_3, addiert sie dann und wählt den Factor von $x_i y_k$ aus. So kommt:

$$
\begin{gathered}
e_1 e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 e_2 = 0, \\
e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_1, \quad e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_2, \\
e_3 e_3 = e_3
\end{gathered}
$$

oder die Tafel:

(I)

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	0	0	e_2
3	e_1	e_2	e_3

Zweiter Fall.

Beim Typus II) kommt das System

(II)

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	0	e_1	e_2
3	e_1	e_2	e_3

Dritter Fall.

Typus III) liefert ein nicht-commutatives System. Man erhält zunächst als die endlichen Gleichungen der Gruppe:

$$x_1' = x_1y_2 + x_1y_3,$$
$$x_2' = x_3y_1 + x_2y_2 + x_2y_3,$$
$$x_3' = x_3y_3.$$

Wir wählen die Hülfsgrössen $x_1^0 = x_3^0 = 1$, $x_2^0 = 0$, führen also $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ ein vermöge:

$$x_1 = \mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3,$$
$$x_2 = \mathfrak{x}_1,$$
$$x_3 = \mathfrak{x}_3$$

und erhalten, wenn wir die neuen Veränderlichen wieder mit x statt $\mathfrak{x}$ bezeichnen:

$$x_1' = x_3y_1 + x_1y_2 + x_1y_3,$$
$$x_2' = (x_2 + x_3)y_2 + x_2y_3,$$
$$x_3' = x_3y_3,$$

also:

$$e_1e_1 = e_2e_1 = 0,$$
$$e_1e_2 = e_1e_3 = e_3e_1 = e_1,$$
$$e_2e_2 = e_2e_3 = e_3e_2 = e_2,$$
$$e_3e_3 = e_3,$$

daher die Tafel:

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	e_1	e_2	e_2
3	e_1	e_2	e_3

Wir wollen die Tafel etwas umformen. Als dritte Einheit sei nämlich $e_3 - e_2$ benutzt. Dann kommt, da

$$(e_3 - e_2)e_1 = e_1, \quad (e_3 - e_2)e_2 = 0,$$
$$e_1(e_3 - e_2) = 0, \quad e_2(e_3 - e_2) = 0,$$
$$(e_3 - e_2)(e_3 - e_2) = e_3 - e_2$$

ist, die Tafel:

(III)

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	e_1	e_2	0
3	0	0	e_3

Aus gewissen Gründen, die wir hier nicht angeben wollen, ist dies die vorzuziehende Form des Systems. Will man eine symmetrischere

Form haben, so kann man in dem neuen System $e_3 - e_2$ als e_2 und $e_3 + e_2$ als e_3 benutzen, wodurch sich ergiebt:

(III′)

	1	2	3
1	0	e_1	e_1
2	$-e_1$	e_3	e_2
3	e_1	e_2	e_3

Vierter Fall.

Der Typus IV) giebt zunächst die Tafel:

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	0	e_2	e_2
3	e_1	e_2	e_3

Wenn man aber e_1 mit e_2 vertauscht und $e_3 - e_2$ als e_3 benutzt, so kommt die vorteilhaftere Form:

(IV)

	1	2	3
1	e_1	0	0
2	0	0	e_2
3	0	e_2	e_3

Fünfter Fall.

Endlich liefert Typus V) sofort:

(V)

	1	2	3
1	e_1	0	0
2	0	e_2	0
3	0	0	e_3

Damit sind alle Zahlensysteme in drei Einheiten gefunden. Nur der dritte Typus ist nicht commutativ. Zu ihm gehören also zwei verschiedene Gruppen aus nicht sämtlich vertauschbaren Transformationen. Da aber oben nur eine solche Gruppe, die Gruppe III), auftrat, so folgern wir: Die beiden zu einander reciproken Gruppen, die zum System (III) gehören, gehen durch eine gewisse lineare homogene Transformation in einander über. Anders ausgedrückt: Das dritte System

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	e_1	e_2	0
3	0	0	e_3

kann dadurch in das dazu reciproke

	1	2	3
1	0	e_1	0
2	0	e_2	0
3	e_1	0	e_3

verwandelt werden, dass man geeignete neue Einheiten einführt. In der That, wenn man e_2 mit e_3 vertauscht, so geht aus dem System das reciproke hervor.

Von den *Systemen in vier Einheiten* wollen wir nur eines erwähnen, nämlich das unter mehreren Gesichtspunkten überhaupt interessanteste Zahlensystem, das *System der Hamilton'schen Quaternionen.*

Hamilton's Quaternionen.

Wir wissen, dass eine viergliedrige Gruppe entweder integrabel ist oder aber auf die besondere Zusammensetzung gebracht werden kann:

$$(X_1 X_2) \equiv X_3 f, \quad (X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_1) \equiv X_2 f,$$
$$(X_1 X_4) \equiv (X_2 X_4) \equiv (X_3 X_4) \equiv 0.$$

(Vgl. Satz 11, § 3 des 20. Kap.) Man kann zeigen, worauf wir aber nicht eingehen, dass in vier Veränderlichen alle einfach transitiven linearen homogenen Gruppen von dieser Zusammensetzung, deren reciproke Gruppen auch linear homogen sind, mit einander vermöge einer ebenfalls linearen homogenen Transformation ähnlich sind, also dasselbe Zahlensystem liefern. Dies ist das Hamilton'sche System. Um es aufzustellen, wird es also genügen, ein Paar zu einander reciproker linearer homogener Gruppen in x_1, x_2, x_3, x_4 aufzusuchen, das die obige Zusammensetzung besitzt. Ein solches Paar liefert uns nun folgende Betrachtung:

Projective Gruppe einer Fläche 2. Grades.

Wir suchen *alle infinitesimalen projectiven Transformationen des Raumes, die eine Fläche zweiten Grades in Ruhe lassen,* und lösen damit ein an sich interessantes Problem der Gruppentheorie. Bekanntlich kann man stets solche homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 einführen, dass die Fläche zweiten Grades (die kein Kegel sein oder zerfallen soll) die Gleichung erhält:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Eine infinitesimale projective Transformation des Raumes hat die allgemeine Form

$$Xf \equiv \sum_1^4{}_i \sum{}_k \alpha_{ik} x_k p_i$$

(vgl. § 4 des 19. Kap.). Sie lässt die Fläche zweiten Grades invariant, wenn

$$X(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

oder

$$\sum_1^4{}_i\, x_i X x_i$$

oder endlich

$$\sum_1^4{}_i \sum{}_k \alpha_{ik} x_k x_i$$

vermöge der Gleichung der Fläche verschwindet. Da dieser Ausdruck homogen vom zweiten Grade ist, so kann dies nur so zugehen, dass identisch

$$\sum_1^4{}_i \sum{}_k \alpha_{ik} x_k x_i = \varrho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

wird. Dies liefert:

$$\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k, \quad \alpha_{ii} = \varrho$$
$$(i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Jede infinitesimale projective Transformation, welche die Fläche in Ruhe lässt, ist also linear aus den folgenden ableitbar:

$$x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, 2, 3, 4; i \neq k),$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4.$$

Diese erzeugen natürlich eine Gruppe. Sie ist in den homogenen Veränderlichen siebengliedrig. Nicht homogen geschrieben, wäre sie sechsgliedrig.

Nun bemerken wir: Die vier infinitesimalen Transformationen

$$(x_2 p_3 - x_3 p_2) - (x_1 p_4 - x_4 p_1)$$
$$(x_3 p_1 - x_1 p_3) - (x_2 p_4 - x_4 p_2)$$
$$(x_1 p_2 - x_2 p_1) - (x_3 p_4 - x_4 p_3)$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4,$$

die jener Gruppe der Fläche zweiten Grades angehören, bilden für sich eine Gruppe, wie man sofort verificiert. Ebenso die vier:

$$(x_2 p_3 - x_3 p_2) + (x_1 p_4 - x_4 p_1)$$
$$(x_3 p_1 - x_1 p_3) + (x_2 p_4 - x_4 p_2)$$
$$(x_1 p_2 - x_2 p_1) + (x_3 p_4 - x_4 p_3)$$
$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4.$$

Beide Gruppen sind in x_1, x_2, x_3, x_4 einfach transitiv und zu einander reciprok, denn jede infinitesimale Transformation der einen ist mit jeder der andern vertauschbar. Auch lässt sich die Zusammensetzung der Gruppen leicht auf die oben angegebene Form bringen. Wenn wir also von diesem Gruppenpaar ausgehen, so werden wir zum System der Quaternionen gelangen.

Die endlichen Gleichungen der ersten unserer beiden viergliedrigen Gruppen lauten nach unserer allgemeinen Regel, wenn y_1, y_2, y_3, y_4 die Parameter der Gruppe bezeichnen, so:

$$\begin{aligned} x_1' &= + x_4 y_1 + x_3 y_2 - x_2 y_3 + x_1 y_4, \\ x_2' &= - x_3 y_1 + x_4 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_4, \\ x_3' &= + x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_4 y_3 + x_3 y_4, \\ x_4' &= - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4. \end{aligned}$$

Wählen wir die Hülfsgrössen $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$, $x_4^0 = 1$, so sehen wir, dass die neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ so angenommen werden können, dass

$$x_1 = \mathfrak{x}_1, \quad x_2 = \mathfrak{x}_2, \quad x_3 = \mathfrak{x}_3, \quad x_4 = \mathfrak{x}_4$$

wird. Also liegt die Gruppe schon in solcher Form vor, dass die Parameter der Transformation, die der Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Gruppe äquivalent ist, sich durch die beiden einzelnen Parametersysteme gerade so ausdrücken, wie die neuen Veränderlichen durch die alten Veränderlichen und die Parameter. Wir können demnach auch das zugehörige Zahlensystem sofort ablesen. Es ist, wie immer, $e_i e_k$ der Coefficient von $x_i x_k$ in dem Ausdruck $\Sigma x_s' e_s$. Wir finden somit das System:

Tafel der Quaternionen.

	1	2	3	4
1	$-e_4$	e_3	$-e_2$	e_1
2	$-e_3$	$-e_4$	e_1	e_2
3	e_2	$-e_1$	$-e_4$	e_3
4	e_1	e_2	e_3	e_4

Dies ist das System der *Hamilton'schen Quaternionen.* Wenn man darin $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$ als neue Einheiten einführt, so geht das reciproke System hervor.

Wie man sieht, hängt das System der Quaternionen auf das engste mit der projectiven Gruppe einer Fläche zweiten Grades zusammen.

§ 5. Referate über einige neuere Arbeiten über complexe Zahlen.

In diesem Paragraphen gedenken wir über mehrere Ergebnisse auf dem Gebiete der complexen Zahlen in der Hauptsache nur referierend zu berichten, insbesondere über die Arbeiten von Scheffers*).

Integrabele und nicht-integrabele Gruppen.

Lie hat die n-gliedrigen Gruppen, wie wir in § 5 des 19. Kap. bemerkten, in *integrabele* und *nicht-integrabele* Gruppen eingeteilt. Eine integrabele ist dadurch charakterisiert, dass sie eine $(n-1)$-gliedrige invariante Untergruppe, diese eine $(n-2)$-gliedrige invariante Untergruppe u. s. w. enthält. Ist nun die eine der beiden zu einem Zahlensystem $(e_1 \ldots e_n)$ gehörigen Gruppen integrabel, so ist es auch die andere, da beide dieselbe Zusammensetzung haben. Ausserdem sind sie lineare homogene Gruppen. Nach Satz 19, § 4 des 19. Kap., lassen sie daher im Raume $(x_1 \ldots x_n)$ einen Punkt, eine durch ihn gehende Gerade, eine durch letztere gehende zweifach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit u. s. w. invariant, und zwar sind diese Gebilde bei beiden zu einander reciproken Gruppen dieselben, da die beiden Gruppen nach Theorem 30, § 2 des 17. Kap., mit einander vermöge einer leicht angebbaren Transformation ähnlich sind.

Wir können es nun so einrichten, dass der einzeln invariante Punkt die Coordinaten $1, 0 \ldots 0$ hat, ferner dass auf der durch ihn gehenden invarianten Geraden der Punkt mit den Coordinaten $0, 1 \ldots 0$ liegt u. s. w. Dies lässt sich immer durch lineare homogene Transformation erreichen. Der invariante Punkt soll die Einheit e_1, die invariante Gerade die aus den Einheiten e_1 und e_2 linear ableitbaren Zahlen u. s. w. repräsentieren. Hiernach ist jetzt

$$e_1 e_k = \text{Const.}\, e_1, \quad e_k e_1 = \text{Const.}\, e_1;$$

$$e_2 e_k = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2, \quad e_k e_2 = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2$$

u. s. w.

Schreiben wir also die Producte $e_i e_k$ so, wie es im vorigen Paragraphen geschah, in einer Tafel zusammen, so folgt:

Die zu *integrabelen* Gruppen gehörigen Zahlensysteme können auf die Form gebracht werden:

---

*) *Zurückführung complexer Zahlensysteme auf typische Formen.* Math. Ann. 39 (1891), S. 293—390. Daselbst findet man zum Schlusse eine Übersicht über die neuere Litteratur.

	1	2	3	$\cdot\cdot$	n
1	(1)	(1)	(1)	$\cdot\cdot$	(1)
2	(1)	(12)	(12)	$\cdot\cdot$	(12)
3	(1)	(12)	(123)	$\cdot\cdot$	(123)
.	.	.	.		
.	.	.	.		
n	(1)	(12)	(123)	$\cdot\cdot$	$(12\cdot\cdot n)$.

Hierbei soll $(12\,..\,m)$ allgemein einen Ausdruck von der Form

$$\text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2 + \cdots + \text{Const.}\, e_m$$

bedeuten.

Ist dagegen die eine Gruppe des Zahlensystems nicht-integrabel, so ist es auch die andere nicht. Engel*) hat nun den Satz aufgestellt, dass eine nicht-integrabele Gruppe stets eine dreigliedrige Untergruppe $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ von der besonderen Zusammensetzung

$$(X_2 X_3) \equiv X_1 f, \quad (X_3 X_1) \equiv X_2 f, \quad (X_1 X_2) \equiv X_3 f$$

besitzt. Überträgt man dies auf unsere Zahlensysteme, so kann man einsehen: Die zu *nicht-integrabelen* Gruppen gehörigen Zahlensysteme enthalten unter anderen drei vom Modul unabhängige Einheiten e_1, e_2, e_3, für die

$$e_2 e_3 - e_3 e_2 = 2 e_1, \quad e_3 e_1 - e_1 e_3 = 2 e_2, \quad e_1 e_2 - e_2 e_1 = 2 e_3$$

ist. Umgekehrt gehört jedes solche System zu nicht-integrabelen Gruppen. Ein solches System enthält mindestens 4 Einheiten.

Quaternion-systeme.

Diese Einteilung der Zahlensysteme wurde von Scheffers seinen Untersuchungen zu Grunde gelegt. Er nennt die letzteren, zu nicht-integrabelen Gruppen gehörigen Systeme *Quaternionsysteme*, die ersteren *Nichtquaternionsysteme* und zwar deshalb, weil zu den Quaternionsystemen als einfachstes System das der Hamilton'schen Quaternionen gehört.

Nicht-quaternion-systeme

Zunächst ist es nun für die Berechnung der Nichtquaternionsysteme von wesentlicher Bedeutung, dass man jedes derartige System in n Einheiten auf eines in nur $n-1$ Einheiten zurückführen kann, indem man nämlich einfach e_1 streicht und in allen Producten $e_i e_k$ das Glied mit e_1 fortlässt. Das neue System ist wieder ein Nichtquaternionsystem. Umgekehrt kann man von jedem Nichtquaternionsystem in n Einheiten zu solchen in $n+1$ Einheiten gelangen, allerdings

---

*) *Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie*, Leipz. Ber. 1887, S. 96. Einen exacten Beweis dafür hat er in den Leipz. Ber. 1893, S. 360—369 gegeben.

nicht immer nur zu einem. Dies *Princip der Zurückführung der Systeme in n Einheiten auf solche in n — 1 Einheiten* dient den Untersuchungen, über die wir hier referieren, als eine wesentliche Grundlage.

Für die Structur eines Nichtquaternionsystems wird folgender für die Praxis äusserst nützliche Satz abgeleitet:

Man kann die Einheiten eines Nichtquaternionsystems stets so wählen, dass sie in zwei Reihen $e_1 \ldots e_r$, $\eta_1 \ldots \eta_s$ $(r + s = n)$ *zerfallen von den besonderen Eigenschaften: Es ist*

$$\eta_i^2 = \eta_i, \quad \eta_i \eta_k = 0 \text{ für } i \neq k,$$

ferner drückt sich $e_i e_k$ *linear nur durch die vor* e_i *bez.* e_k *kommenden Einheiten aus, sodass*

$$e_1 e_k = e_k e_1 = 0,$$
$$e_2 e_k = \text{Const.}\, e_1, \quad e_k e_2 = \text{Const.}\, e_1,$$
$$e_3 e_k = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2, \quad e_k e_3 = \text{Const.}\, e_1 + \text{Const.}\, e_2$$

u. s. w. ist. Ferner ist für jedes e_i *unter allen Producten* $\eta_k e_i$ *und* $e_i \eta_k$ *nur je eines, etwa* $\eta_\alpha e_i$ *und* $e_i \eta_\beta$, *vorhanden, das nicht Null ist, sondern den Wert* e_i *hat. Endlich ist in jedem System mindestens ein* η *enthalten.*

Sagen wir, die Einheit e_i sei vom Charakter $(\alpha\beta)$, weil $\eta_\alpha e_i$ und $e_i \eta_\beta$ nicht Null, sondern e_i sind, so folgt ohne Mühe aus dem associativen Gesetze, dass das Product $e_i e_k$ zweier Einheiten e_i und e_k vom Charakter $(\alpha\beta)$ bez. $(\gamma\delta)$ Null ist, sobald $\beta \neq \gamma$ ist, dass es sich aber, sobald $\beta = \gamma$ ist, durch die vor e_i und e_k kommenden Einheiten ausdrückt, die vom Charakter $(\alpha\delta)$ sind. Noch ist zu bemerken, dass die Einheiten $\eta_1 \ldots \eta_s$ in ihrer Art einzig im Systeme, dass sie also für das System von typischer Bedeutung sind.

Hiernach lassen sich z. B. die Zahlensysteme in zwei und drei Einheiten sofort aus dem Kopfe hinschreiben.

Ferner ergeben sich hieraus gewisse *Klassen von Systemen* ohne weiteres. Man bemerkt nämlich zunächst, dass die (reducierte) *charakteristische Gleichung eines derartigen Nichtquaternionsystems* die Form hat:

Char. Gl. eines Nichtquaternionsystems.

$$(x - \xi_1 \varepsilon)^{\mu_1} (x - \xi_2 \varepsilon)^{\mu_2} \ldots (x - \xi_s \varepsilon)^{\mu_s} = 0.$$

Hierin bedeutet x eine allgemeine Zahl des Systems:

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_r e_r + \xi_1 \eta_1 + \cdots + \xi_s \eta_s$$

und $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_s$ sind die gewöhnlich complexen Coefficienten der Einheiten $\eta_1 \ldots \eta_s$ in dieser Zahl. ε bedeutet den Modul des Systems, der übrigens die Form hat:

$$\varepsilon = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_s,$$

und $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_s$ sind nicht verschwindende positive ganze Zahlen, deren Summe $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s$ den Grad k des Zahlensystems vorstellt.

Wir zeigen, wie man nun ohne weiteres gewisse Klassen von Systemen bestimmen kann, an einem Beispiel: Weierstrass suchte die commutativen Systeme, in denen der Grad $k = n$, der Anzahl der Einheiten ist, und bei denen die charakteristische Gleichung *n verschiedene* Wurzeln hat. Ein commutatives System ist aber stets Nichtquaternionsystem. Wir haben also hier, um die Weierstrass'schen Systeme aufzustellen, $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 1$ und $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s = k = n = r + s$ anzunehmen. Es ist daher $r = 0$, $s = n$, d. h. ein derartiges System enthält nur Einheiten $\eta_1 \ldots \eta_n$ und hat daher die Form:

$$\eta_i^2 = \eta_i, \quad \eta_i \eta_k = 0 \text{ für } i \neq k,$$

oder als Tafel geschrieben:

	1	2	3	·	n
1	η_1	0	0	·	0
2	0	η_2	0	·	0
3	0	0	η_3	·	0
·	·	·	·	·	0
n	0	0	0	·	η_n.

Wie man sieht, ergeben sich die Weierstrass'schen Systeme als die einfachsten überhaupt existierenden.

Um unser Referat fortzusetzen, führen wir nun den wichtigen Begriff der *Reducibilität* ein:

Reducibil. eines Systems.

Ein System heisst reducibel, wenn seine Einheiten sich so wählen und in zwei Scharen $e_1, e_2 \ldots$ und $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots$ einreihen lassen, dass jedes $e_i \mathfrak{e}_k$ und $\mathfrak{e}_k e_i$ Null ist und $e_1, e_2 \ldots$ für sich, ebenso $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots$ für sich ein System bilden, also $e_i e_k$ sich durch $e_1, e_2 \ldots$ allein und $\mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_k$ sich durch $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2 \ldots$ allein linear ausdrücken lässt. So z. B. ist das oben, in § 4, gefundene System (e_1, e_2, e_3) in drei Einheiten:

$$\begin{matrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 \\ 0 & e_2 & e_3 \end{matrix}$$

reducibel auf die beiden Systeme (e_1) und (e_2, e_3). Scheffers hat für die Reducibilität eines Systems folgendes Kriterium angegeben und bewiesen:

Kriterium der Reducib.

Ein System ist dann und nur dann reducibel, wenn es ausser dem

Modul ε eine Zahl ε_1 im System giebt, die mit allen Zahlen x des Systems vertauschbar ($x\varepsilon_1 = \varepsilon_1 x$) *und deren Quadrat $\varepsilon_1{}^2 = \varepsilon_1$ ist.*

Z. B. ist ein commutatives System auf so viele einzelne Systeme reducibel, als es in ihm von einander unabhängige Zahlen giebt, deren Quadrate ihnen selbst gleich sind.

Man kann umgekehrt aus zwei Systemen $(e_1 \dots e_p)$, $(e_{p+1} \dots e_q)$ ein System $(e_1 \dots e_q)$ zusammensetzen, indem man ihre Tafeln so aneinanderreiht, dass ihre Hauptdiagonalen eine Gerade bilden, und dann die leer gebliebenen Rechtecke an allen Stellen mit Nullen ausfüllt. Man kann dieses neue System schicklich die *Summe der beiden ursprünglichen Systeme* nennen, weil dieser Summationsprocess alle Gesetze der elementaren Addition erfüllt. Study und Scheffers haben bewiesen, dass die charakteristische Gleichung eines Systems gleich dem Product der charakteristischen Gleichungen der einzelnen Systeme ist, auf die es reduciert werden kann.

Addition zweier Systeme.

Man kann auch Zahlensysteme mit einander multiplicieren. Betrachtet man nämlich zwei Systeme, etwa $(e_1 \dots e_p)$ und $(\mathfrak{e}_1 \dots \mathfrak{e}_q)$, so kann man die Voraussetzung treffen, dass $e_i \mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_k e_i$ sei, und alsdann $e_i \mathfrak{e}_k$ als Einheit η_{ik} eines Systems von $p \,.\, q$ Einheiten $\eta_{11}, \eta_{12} \dots \eta_{pq}$ einführen. Die Productregeln sind dann in diesem neuen System völlig bestimmt, denn es ist nach Voraussetzung

$$\eta_{ik}\eta_{lm} = (e_i \mathfrak{e}_k)(e_l \mathfrak{e}_m) = (e_i e_l)(\mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_m).$$

$e_i e_l$ ist linear aus $e_1 \dots e_p$ und $\mathfrak{e}_k \mathfrak{e}_m$ linear aus $\mathfrak{e}_1 \dots \mathfrak{e}_q$ zusammensetzbar. Ausmultiplication giebt $\eta_{ik}\eta_{lm}$ linear durch alle $\eta_{\alpha\beta}$ ausgedrückt. Dies Verfahren kann das der *Multiplication der ursprünglichen Systeme*, das neue System das Product der beiden gegebenen Systeme genannt werden. Der Process erfüllt nämlich alle Gesetze der elementaren Multiplication, auch bezüglich des oben definierten Additionsprocesses.

Multiplicat. zweier Systeme.

Zum Product zweier Systeme kann man auch so gelangen: Gesetzt, man betrachtet in der allgemeinen Zahl

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$$

des Systems $(e_1 \dots e_p)$ die Coefficienten $x_1 \dots x_p$ nicht mehr als gewöhnliche Zahlen, sondern als Zahlen eines zweiten Systems $(\mathfrak{e}_1 \dots \mathfrak{e}_q)$:

$$x_i = \mathfrak{x}_{i1}\mathfrak{e}_1 + \dots + \mathfrak{x}_{iq}\mathfrak{e}_q \quad (i = 1, 2 \dots p),$$

so ist x eine Zahl des Systems mit den $p \,.\, q$ Einheiten $\eta_{ik} = e_i \mathfrak{e}_k$.

Man kann nun ohne Mühe zu dem folgenden zuerst von Study aufgestellten Ergebnis gelangen: *Jedes Zahlensystem, dessen Grad gleich der Anzahl der Einheiten ist,* setzt sich aus irreducibelen Systemen

Study's Systeme $k = n$.

derselben Art zusammen. Jedes *irreducibele* derartige System $(e_1..e_n)$ kann so geschrieben werden, dass

$$e_i e_k = e_{i+k-n} \quad \text{oder} \quad 0$$

ist, je nachdem $i + k > n$ oder $\leq n$ ist.

So hat man in 2, 3, 4 Einheiten folgende irreducibele Systeme:

	1	2
1	0	e_1
2	e_1	e_2

	1	2	3
1	0	0	e_1
2	0	e_1	e_2
3	e_1	e_2	e_3

	1	2	3	4
1	0	0	0	e_1
2	0	0	e_1	e_2
3	0	e_1	e_2	e_3
4	e_1	e_2	e_3	e_4

In drei Einheiten kommen als einzige *reducibele* derartige Systeme nur die beiden in betracht:

	1	2	3
1	e_1	0	0
2	0	0	e_2
3	0	e_2	e_3

	1	2	3
1	e_1	0	0
2	0	e_2	0
3	0	0	e_3

Systeme $k = n - 1$.

Scheffers hat, wie schon erwähnt, *alle Systeme bestimmt, deren Grad um Eins kleiner als die Zahl der Einheiten ist:* $k = n - 1$. Da aber die Formen dieser Systeme noch mannigfaltiger als die der vorstehenden Systeme sind, so sehen wir von einer Wiedergabe des betreffenden Satzes ab. Ebenso bezüglich der *Systeme, deren Grad* $k = n - 2$ *ist.* Übrigens giebt es kein Quaternionsystem, dessen Grad $k = n - 1$ wäre. Jedes Quaternionsystem, dessen Grad $k = n - 2$ ist, ist die Summe aus dem System der Hamilton'schen Quaternionen und einem der soeben erwähnten Study'schen Systeme.

Systeme $k = n - 2$.

Systeme $k = 2$.

Auch die Form aller *Systeme, deren Grad* $k = 2$ *ist,* lässt sich angeben. Das einzige Quaternionsystem, das hierher gehört, sind die Quaternionen Hamilton's.

Systeme in fünf Einheiten.

Da bei einem *Systeme in fünf Einheiten* der Grad $k = 2, 3, 4, 5$, also wegen $n = 5$ der Grad $k = 2, n - 2, n - 1, n$ ist, so ist es klar, dass mit obigen allgemeinen Resultaten auch alle Zahlensysteme in fünf Einheiten gefunden sind.

Quaternionsysteme.

Für die *Quaternionsysteme* wird bewiesen, *dass ein solches System, sobald es nicht mehr als acht Einheiten besitzt, das System der Hamilton'schen Quaternionen in sich enthält.* Alsdann liefern gewisse allgemeine Tafeln für die Systeme, welche die Quaternionen enthalten, Tafeln, die hier wiederzugeben zu weit führen würde, *alle Quaternionsysteme in 4, 5, 6, 7, 8 Einheiten.* Ferner ergiebt sich ein merkwürdiger

Satz: *Jedes Zahlensystem nämlich, das in sich die Quaternionen Hamilton's enthält, und bei dem der Modul dieser Quaternionen zugleich Modul des ganzen Systems ist, ist das Product aus einem beliebigen System und dem System der Hamilton'schen Quaternionen.*

Kurz sei noch der Abhandlung Molien's gedacht.

System mit einfacher $(n-1)$-gl. inv. Untergr.

Da die n-gliedrige Gruppe eines Zahlensystems $(e_1 \ldots e_n)$

$$x_s' = \sum_1^n{}^i \sum{}^k \gamma_{iks} x_i y_k \quad (s = 1, 2 \ldots n)$$

eine $(n-1)$-gliedrige *invariante* Untergruppe enthält, nämlich die aller ihrer Transformationen mit der Determinante Eins, also eine Untergruppe, die der speciellen linearen homogenen Gruppe angehört, so liegt es nahe, nach allen Zahlensystemen zu fragen, bei denen diese $(n-1)$-gliedrige invariante Untergruppe selbst *einfach* ist. Auf dieses Problem lenkte Lie seinerzeit ausdrücklich die Aufmerksamkeit*). Molien**) behandelte dieses Problem und kam zu dem interessanten, wenn auch negativen Resultat, dass es keine anderen derartigen Zahlensysteme giebt, als die schon von englischen Mathematikern behandelten, deren Gruppe die Parametergruppe der allgemeinen linearen homogenen Gruppe ist, also die Gruppe:

$$x_{ij}' = \sum_1^n{}^k x_{kj} y_{ik} \quad (i, j = 1, 2 \ldots n).$$

Das zu dieser Gruppe gehörige System hat n^2 Einheiten e_{ik} mit den Productregeln:

$$e_{kj} e_{ik} = e_{ij}, \quad e_{kj} e_{il} = 0 \text{ für } k \neq l.$$

$n = 2$ giebt das System der Quaternionen, allerdings in einer anderen Gestalt, als wir es oben fanden, nämlich, wenn wir die Einheiten $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$ mit e_1, e_2, e_3, e_4 bezeichnen, in der Form:

	1	2	3	4
1	e_1	e_2	0	0
2	0	0	e_1	e_2
3	e_3	e_4	0	0
4	0	0	e_3	e_4.

$n = 3$ liefert ein früher von Sylvester***) behandeltes und von ihm *Nonionen* genanntes System mit ganz analoger Tafel in 9 Einheiten.

Nonionen.

*) Leipziger Berichte 1889, S. 326.

**) *Über Systeme höherer complexer Zahlen.* Math. Ann. 41, S. 83—156.

***) Z. B. *A word on Nonions.* Johns Hopkins Circular 1882 II, S. 241.

Wir gedenken nicht weiter auf die Untersuchungen Molien's einzugehen und wollen nur beiläufig bemerken, dass Herr Molien die Beziehungen seiner Arbeiten zu denjenigen seiner Vorgänger teilweise unrichtig aufzufassen scheint.

Anwendungen der compl. Zahlen.

Schliesslich sei noch ganz kurz auf die *Anwendungen der complexen Zahlen* hingewiesen. In solchen Fällen, in denen zwei zu einander reciproke einfach transitive projective Gruppen zu untersuchen sind, liefert der Algorithmus des zugehörigen Systems eine äusserst bequeme Darstellungsweise dieser Gruppen und anderer mit ihnen zusammenhängender Gruppen. Da zu jeder Gruppe ein paar zu einander reciproker Parametergruppen gehören, so kann man sich der Kenntnis der Zahlensysteme bedienen, um solche Parameterdarstellungen gewisser Gruppen zu finden, die möglichst bequem für die successive Ausführung von Transformationen der Gruppen sind*).

Ferner wird man die Frage nach einer *Verallgemeinerung unserer Functionentheorie* unter Benutzung der Zahlensysteme behandeln. Denn die Functionentheorie stützt sich auf ein specielles System in zwei Einheiten. Man kann in der That für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen — an Stelle der complexen Zahlenebene — Functionentheorien entwickeln, bei denen die Grundgesetze der gewöhnlichen Functionentheorie erfüllt sind. Doch verzichten wir darauf, dies weiter auszuführen**).

---

*) Man sehe hierzu Study, Leipziger Berichte 1889, S. 213 u. f.

**) Siehe Scheffers, *Sur la généralisation des fonctions analytiques,* sowie *Théorèmes rélatifs aux fonctions analytiques à n dimensions.* Comptes Rendus 1893, 15. u. 29. Mai.

Abteilung VI.

Einige Anwendungen der Gruppentheorie.

Es macht sich in neuerer Zeit mehr und mehr die Auffassung geltend, dass viele Gebiete der Mathematik nichts anderes als Invariantentheorien gewisser Gruppen sind.

Von vornherein ist es übrigens keineswegs sicher, dass jede Gruppe ihre Invariantentheorie besitzt. Es ist aber eine wichtige Entdeckung Lie's, dass jede (continuierliche) Gruppe, die durch Differentialgleichungen definiert ist, nicht allein Differentialinvarianten, sondern überhaupt eine vollständige Invariantentheorie besitzt. Es lassen sich nämlich, um dies deutlicher auszudrücken, Kriterien in *endlicher* Anzahl für die Äquivalenz zweier Gebilde gegenüber den betreffenden Gruppen angeben, d. h. dafür, dass es möglich werde, das eine Gebilde vermöge einer Transformation einer solchen Gruppe in das andere überzuführen.

Zur Erläuterung dieser hier etwas vag ausgedrückten Behauptung geben wir in dieser letzten Abteilung einige Beispiele, indem wir das Äquivalenzproblem bei der Gruppe der Bewegungen in der Ebene und im Raume behandeln. Es ist merkwürdig, doch aber sicher, dass man bisher versäumt hat, dieses einfache Problem rationell anzugreifen. Indem wir im Folgenden eine vollständige Lösung dieses Problems geben, glauben wir eine bedeutende Lücke in der analytischen Geometrie, insbesondere in der Lehre vom Imaginären in der Geometrie auszufüllen. Andererseits können und sollen diese Theorien hier als Beispiel dafür dienen, wie man überhaupt Invariantentheorien gegebener Gruppen entwickeln sollte.

Ein zweites Beispiel liefert uns in dieser Hinsicht die Invariantentheorie der binären Formen, die wir alsdann in ihren Hauptzügen darstellen.

Daran schliessen wir eine Reihe allgemeiner Bemerkungen über die Invariantentheorien von Gruppen überhaupt und über das volle Formensystem bei gegebener Gruppe.

Endlich werden wir die Gruppentheorie auf die Theorie der Differentialgleichungen anwenden, indem wir einige interessante Probleme daraus herausgreifen, die sich auf Systeme von Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen und insbesondere auf die Riccati'sche Differentialgleichung beziehen.

In allen diesen Anwendungen ist es unser Hauptzweck, zu zeigen, wie die Verwertung gruppentheoretischer Betrachtungen neue wertvolle Bahnen der Untersuchung eröffnet.

Kapitel 22.

Differentialinvarianten der Bewegungsgruppe, Vervollständigung der bisherigen Krümmungstheorie.

In diesem Kapitel entwickeln wir eine Invariantentheorie für die Gruppe der Bewegungen in der Ebene wie im Raume. Wir zeigen nämlich, wie man in theoretisch einfachster Weise entscheidet, ob zwei Curven oder Flächen durch Bewegung in einander überführbar, d. h. ob sie congruent sind oder, noch anders ausgedrückt, ob sie mit einander vermöge der Gruppe der Bewegungen äquivalent sind.

Dies Problem lässt sich nicht ohne weiteres damit erledigen, dass man sagt, zwei Gebilde seien congruent, wenn sie bei geeigneter Wahl der Cartesischen Coordinaten dieselben Gleichungen besitzen. Mit dieser Bemerkung nämlich ist das Problem nur erst gestellt, nicht gelöst. Es handelt sich darum, von allen willkürlichen Elementen freie und sowohl notwendige als auch hinreichende Congruenzkriterien zu entwickeln. Die Gruppe der Bewegungen in der Ebene wie im Raume kann bekanntlich definiert werden als die continuierliche Gruppe aller Punkttransformationen, die alle Figuren in congruente überführen. Deshalb ist die Theorie der Congruenz bei ebenen wie bei Raumcurven und bei Flächen nichts anderes als die Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen. Wir werden sehen, dass man, um vollständige Convergenzkriterien aufzustellen, in der Ebene mit dem Begriffe des Krümmungsradius r und des Differentialquotienten $\frac{dr}{ds}$ nach der Bogenlänge s auskommt, bei den Curven im Raume tritt im allgemeinen nur noch die Torsion τ hinzu. Im allgemeinen wird sich als Äquivalenzkriterium ergeben, dass zwei Curven congruent sind, sobald sich $\frac{dr}{ds}$ und τ bei beiden in derselben Weise als Functionen

von r ausdrücken. Aber für gewisse Curven ergeben sich besondere Theorien. Wir werden sehen, wie man methodisch zu *allen* diesen Ausnahmen geführt wird und wie man sie erledigen kann. Die analoge Theorie für die Flächen entwickeln wir in ihren Hauptzügen.

In der Anschaulichkeit des Begriffes der Congruenz bei *reellen* Gebilden mag es liegen, dass man — obwohl mit Unrecht — das in Frage stehende Problem bisher, wie es scheint, nicht explicite zu formulieren für nötig befunden hat. Um so mehr aber muss betont werden, dass die anschaulichen Hülfsmittel nicht ausnahmslos anwendbar sind, nämlich nicht bei den *imaginären* Gebilden, bei denen bis jetzt sogar die notwendigen Grundbegriffe für die Erledigung des Congruenzproblems fehlen. Hat man doch bisher noch nie die Frage aufgeworfen, wann zwei imaginäre Curven oder zwei imaginäre Flächen einander congruent sind. Aber auch für *reelle* Gebilde ist die Theorie bisher noch nirgends in völlig befriedigender Weise in Angriff genommen und durchgeführt worden. Ebenso sicher, wie es ist, dass man bisher das Material zu einer solchen Theorie schon zum grossen Teil gewonnen hat, ebenso sicher ist es, dass die genaue Problemstellung sowie umsomehr die Theorie selbst noch fehlt.

Die Untersuchungen über *imaginäre* Gebilde lassen sich übrigens — obgleich sie an sich wichtig genug sind — auch für *reelle* Gebilde nutzbringend verwerten, so namentlich für die Minimalflächen und die Richtungscurven und Richtungs- oder Doppelflächen.

Practisch lehrreich ist dies Kapitel in Hinsicht auf die Gruppentheorie deshalb, weil die hier zu benutzenden Betrachtungen auch sonst überall da zum Ziele führen, wo es sich darum handelt, für eine beliebige durch Differentialgleichungen definierte Gruppe die Äquivalenzkriterien zweier Gebilde aufzustellen. Wir kommen auf diese allgemeinen Gesichtspunkte im nächsten Kapitel zurück.

§ 1. Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen in der Ebene.

Differentialinvariante.

Wir haben den Begriff „Differentialinvariante" schon im ersten Abschnitte dieses Werkes eingeführt und namentlich bei Gruppen in zwei Veränderlichen genauer studiert — siehe 9. und 12. Kap. Damals dachten wir uns eine r-gliedrige Gruppe in x, y vorgelegt, erweiterten sie durch Hinzunahme der Transformationen, welche die Differentialquotienten y', y''... von y nach x bei der Gruppe erfahren, und fassten die Functionen von x, y, y', y''... ins Auge, die bei der erweiterten Gruppe invariant bleiben. Wir erkannten, dass unter diesen

Differentialinvarianten nur eine, J_{r-1}, vorhanden ist, die von niederer als r^{ter} Ordnung ist, d. h. die nur x, y, $y' \,..\, y^{(r-1)}$ enthält, und dass eine Differentialinvariante J_r von r^{ter}, eine J_{r+1} von $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden ist, u. s. w., sodass die allgemeinste Differentialinvariante $(r+s)^{\text{ter}}$ Ordnung eine beliebige Function von J_{r-1}, J_r, $J_{r+1} \,..\, J_{r+s}$ ist. Auch sahen wir, dass man setzen darf:

$$(1) \qquad J_{r+s} \equiv \frac{\dfrac{d^s J_r}{dx^s}}{\dfrac{d^s J_{r-1}}{dx^s}} \equiv \frac{d^s J_r}{d^s J_{r-1}}.$$

An diese Ergebnisse erinnern wir, weil wir uns von jetzt ab mit der Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen in der Ebene genauer beschäftigen wollen.

Differential-inv. der Gruppe der Beweggn.

Die Gruppe der Bewegungen in der Ebene lautet bekanntlich

$$p \quad q \quad yp - xq.$$

Ihre Differentialinvarianten haben wir schon in einer Note zu § 3 des 4. Kap. kurz besprochen. Wir kommen jetzt ausführlicher darauf zurück.

Zu ihrer Auffindung haben wir die infinitesimalen Transformationen der Gruppe um die Incremente der Differentialquotienten y', y'' .. von y nach x zu erweitern und die Lösungen der vollständigen Systeme zu bestimmen, die durch Nullsetzen der erweiterten infinitesimalen Transformationen hervorgehen. Nach den Vorbemerkungen muss nun eine Differentialinvariante von höchstens zweiter und eine von dritter Ordnung vorhanden sein. Kennen wir diese beiden, so ergeben sich alle anderen nach (1) durch Differentiation. Wir erweitern daher bis zu den Incrementen von y'''. Es lassen p und q die Differentialquotienten y', y'', y''' ungeändert. Die gesuchten Differentialinvarianten sind daher frei von x und y. Ferner giebt $yp - xq$ erweitert

$$yp - xq - (1 + y'^2)q' - 3y'y''q'' - (3y''^2 + 4y'y''')q'''.$$

Hierin bezeichnet q' den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial y'}$ u. s. w. Ist f eine Differentialinvariante von höchstens dritter Ordnung, so muss sie diesen Ausdruck zu Null machen. Also ist sie ein von x, y freies Integral des simultanen Systems

$$\frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''} = \frac{dy'''}{3y''^2 + 4y'y'''}.$$

Als ein Integral ergiebt sich sofort

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn wir dann $y'' = \text{Const.}\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ einsetzen, so ergiebt sich eine *lineare* Differentialgleichung für y''' und aus ihr als ein zweites Integral:

$$\frac{3y'y''^2 - y'''(1+y'^2)}{(1+y'^2)^3}.$$

Diese Differentialinvarianten sind gebildet worden unter der Voraussetzung, dass y eine Function von x ist, geometrisch ausgedrückt, dass wir eine Curve ins Auge fassen. Nun sehen wir, dass die erste Invariante bei einer vorgelegten Curve die *Krümmung* $\frac{1}{r}$, den reciproken Wert des *Krümmungsradius* r, vorstellt. Statt ihrer können wir natürlich auch r selbst als Invariante benutzen. Bedeutet ferner s die Bogenlänge der Curve, gemessen von irgend einer Stelle aus, so ist

$$\frac{ds}{dx} = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

während wegen

$$r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

andererseits:

$$y''^2\frac{dr}{dx} = 3y'y''^2(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - y'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

ist. Deshalb ist die Differentialinvariante dritter Ordnung *der Differentialquotient des Krümmungsradius nach der Bogenlänge:* $\frac{dr}{ds}$, multipliciert mit r^2. Also ist $\frac{dr}{ds}$ selbst Differentialinvariante dritter Ordnung.

Nach der vorausgeschickten Bemerkung ergeben sich nun aus r und $\frac{dr}{ds}$ alle übrigen Differentialinvarianten durch Differentiation. So eine von vierter Ordnung:

$$\frac{d\frac{dr}{ds}}{dr}$$

oder

$$\frac{\frac{d^2r}{ds^2}}{\frac{dr}{ds}}.$$

Da $\frac{dr}{ds}$ selbst Invariante ist, so können wir $\frac{d^2r}{ds^2}$ als Differentialinvariante vierter Ordnung benutzen. Entsprechend ist $\frac{d^3r}{ds^3}$ Differentialinvariante fünfter Ordnung u. s. w.

Allgemein also hat eine Differentialinvariante die Form*)

$$\Omega\left(r, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2 r}{ds^2}, \frac{d^3 r}{ds^3} \cdots\right).$$

Eine ganz besondere Stellung nehmen gewisse Ausdrücke ein, die uns gestatten, aus bekannten Differentialinvarianten der Gruppe neue Differentialinvarianten abzuleiten. Angenommen nämlich, es existiere eine Function $\Omega(x, y, y' \ldots, \varphi, \varphi', \varphi'' \ldots)$ von x, y, den Differentialquotienten von y nach x, sowie einer Function φ und ihren Differentialquotienten φ', $\varphi'' \ldots$ derartig, dass, wenn φ irgend eine Differentialinvariante der Gruppe ist, stets auch Ω eine solche ist. Dabei sollen φ', $\varphi'' \ldots$ die vollständigen Differentialquotienten von φ nach x bedeuten. Wenn wir alsdann diese Function Ω kennten sowie eine Differentialinvariante, so lieferte uns Ω eine zweite Differentialinvariante. Diese würde in Ω für φ eingesetzt eine dritte ergeben u. s. w. So könnte man unter Umständen aus einer Differentialinvariante eine ganze Reihe solcher ableiten. Dass wirklich bei unserer Gruppe derartige Ausdrücke Ω vorhanden sind, werden wir sehen, indem wir sie aufstellen. Wir nennen sie *Differentialparameter*.

Differential-parameter.

Für ihre Auffindung ist eine allgemeine Formel von grosser Bedeutung, die wir factisch schon früher abgeleitet haben, wenn auch nicht gerade in der zu benutzenden Form. Es sei nämlich φ irgend eine Function von x, y, y', $y'' \ldots$, die wir als eine Function von x allein auffassen können, da wir uns ja y als Function von x vorstellen. Bezeichnen wir nun mit dem Zeichen δ die Incremente bei einer infinitesimalen Transformation der Gruppe, so ist wegen

$$d\varphi \equiv \varphi' dx$$

auch

$$\delta d\varphi \equiv \delta\varphi' \cdot dx + \varphi' \cdot \delta dx$$

oder, da d und δ vertauschbare Zeichen sind:

$$d\delta\varphi \equiv \delta\varphi' \cdot dx + \varphi' \cdot d\delta x,$$

also

$$\delta\varphi' \equiv \frac{d\delta\varphi}{dx} - \varphi' \frac{d\delta x}{dx}. \tag{2}$$

Dies ist die Formel, die wir ableiten wollten. Sie zeigt, wie man das Increment des Differentialquotienten einer Function φ aus dem Increment von φ und dem von x ableiten kann. Dabei sind die Differentiationen nach x stets totale. Indem wir z. B. in § 3 des 2. Kap.,

*) Auch die Bogenlänge s ist invariant, aber sie ist keine Differentialinvariante. Man könnte sie eine *Integralinvariante* nennen. In unserer Äquivalenztheorie brauchen wir nur Differentialinvarianten.

S. 36, das Increment von y' berechneten, haben wir in Wahrheit auch schon die Relation (2) abgeleitet.

Wir suchen nun *zunächst* einen Differentialparameter, der keine höheren als den ersten Differentialquotienten von φ enthält, also die Form hat: $\Omega(x, y, y' .., \varphi, \varphi')$. Da φ hierin irgend eine Invariante bedeuten soll, so ist in (2) das Increment $\delta\varphi = 0$ zu setzen, sodass kommt:

$$\delta\varphi' = -\varphi' \frac{d\delta x}{dx}.$$

Bei p ist $\delta x = \delta t$, also $\delta\varphi' = 0$. Ebenso ist $\delta\varphi' = 0$ bei q. Bei $yp - xq$ ist $\delta x = y\delta t$, also

$$\delta\varphi' = -\varphi' y' \delta t.$$

Nun ist allgemein

$$\delta\Omega \equiv \frac{\partial\Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Omega}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi'}\delta\varphi'.$$

Es soll $\delta\Omega$ bei unserer Gruppe Null sein, sobald $\delta\varphi = 0$ ist, und zwar für jede infinitesimale Transformation der Gruppe. Dies liefert die drei Relationen:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0,$$

$$y\frac{\partial\Omega}{\partial x} - x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - (1 + y'^2)\frac{\partial\Omega}{\partial y'} - 3y'y''\frac{\partial\Omega}{\partial y''} - \cdots - \varphi' y' \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi'} = 0.$$

Ω ist also frei von x und y und Integral des simultanen Systems:

$$\frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''} = \cdots = \frac{d\varphi}{0} = \frac{d\varphi'}{y'\varphi'}. \tag{3}$$

Als Integrale sind uns schon $\frac{1}{r}$, $\frac{dr}{ds}$, .. bekannt. Ferner ist ein Integral φ selbst. Ein letztes Integral geht aus

$$\frac{dy'}{1 + y'^2} = \frac{d\varphi'}{y'\varphi'}$$

hervor in der Form

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\varphi'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Der gesuchte Differentialparameter hat also die Form

$$\Omega\left(r, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \ldots, \varphi, \Delta\varphi\right).$$

Es ist aber von vornherein klar: Wenn φ ein Differentialparameter ist, so ist auch jede Function von r, $\frac{dr}{ds}$, $\frac{d^2r}{ds^2}$, ... und φ ein Differentialparameter. Mithin werden wir uns ohne Beeinträchtigung der

Allgemeinheit auf den Differentialparameter $\Delta\varphi$ selbst beschränken können. Ausführlich geschrieben hat er die Form:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y'}y'' + \frac{\partial\varphi}{\partial y''}y''' + \cdots}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wir können nun nach den Differentialparametern fragen, die auch φ'', φ''' u. s. w. enthalten. Zu dem Zweck haben wir auch die Incremente von φ'', φ'''... zu berücksichtigen. Sie ergeben sich aus (2) sofort, wenn wir darin φ durch φ', φ''... ersetzen. Aber wir brauchen die Rechnung nicht durchzuführen. Denn offenbar finden wir wie oben, dass die gesuchte Function Ω frei von x, y und Integral eines simultanen Systems analog (3) ist. Dieses System besitzt die Integrale $\frac{1}{r}$, $\frac{dr}{ds}$, $\frac{d^2r}{ds^2}\cdots$, ferner φ, $\Delta\varphi$. Endlich besitzt es noch ein Integral, das φ'', eines, das φ''' u. s. w. enthält. Diese aber können wir sofort angeben. Denn alle diese Integrale sind ja auch für sich Differentialparameter. Es genügt also, dass wir einen speciellen Differentialparameter kennen, der φ, φ', φ'', einen speciellen, der φ, φ', φ'', φ''' enthält, u. s. w. Solche kennen wir in der That. Ist φ eine Invariante, so ist auch, wie wir gefunden hatten,

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\varphi'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

eine Invariante. Setzen wir diese für φ, so ergiebt sich analog, dass auch

$$\Delta^2\varphi \equiv \Delta(\Delta\varphi) \equiv \frac{\frac{d\Delta\varphi}{dx}}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

eine Invariante ist. Daher ist $\Delta^2\varphi$ ein Differentialparameter, der auch φ'' enthält. Entsprechend ist $\Delta^3\varphi \equiv \Delta(\Delta(\Delta\varphi))$ ein Differentialparameter, der auch φ''' enthält u. s. w.

Allgemeinster Differentialparameter.

Mithin hat *der allgemeinste Differentialparameter* die Form

$$\Omega\left(r,\ \frac{dr}{ds},\ \frac{d^2r}{ds^2},\ \ldots,\ \varphi,\ \Delta\varphi,\ \Delta^2\varphi,\ \Delta^3\varphi,\ \ldots\right),$$

d. h. *der einzige wesentliche Differentialparameter ist $\Delta\varphi$ selbst.* Jeder Differentialparameter ergiebt sich dadurch, dass wir eine beliebige Function aus ihm, aus seinen Wiederholungen und aus Differentialinvarianten bilden.

Wir bemerken noch, dass sich $\Delta\varphi$ auch so schreiben lässt:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{d\varphi}{ds},$$

also der allgemeinste Differentialparameter so:

$$\Omega\left(r, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2 r}{ds^2}, \ldots, \varphi, \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d^2\varphi}{ds^2}, \ldots\right).$$

Nehmen wir an, wir kennten nur die niederste Differentialinvariante r und den niedersten Differentialparameter $\Delta\varphi$. Alsdann sind damit alle Differentialinvarianten gegeben. Denn wenn wir $\Delta\varphi$ auf $\varphi = r$ anwenden, so geht die Differentialinvariante $\frac{dr}{ds}$ hervor. Wenden wir $\Delta\varphi$ auf $\varphi = \frac{dr}{ds}$ an, so geht entsprechend $\frac{d^2 r}{ds^2}$ hervor u. s. w. Es sind r und $\Delta\varphi$ Lösungen des vollständigen Systems

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} - (1 + y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} - \varphi' y' \frac{\partial f}{\partial \varphi'} = 0.$$

Zur Auffindung aller Differentialinvarianten hätte es also genügt, *nur eine einmalige Erweiterung vorzunehmen und das Increment von* φ' *für* $\delta\varphi = 0$ *hinzuzufügen.* Eine ähnliche Bemerkung gilt überhaupt für Gruppen. Die grosse Bedeutung des Differentialparameters tritt hier klar hervor.

Congruenz ebener Curven.

Die Differentialinvarianten und Differentialparameter der betrachteten Gruppe spielen eine wesentliche Rolle in der Theorie der ebenen Curven. Denn die Frage, *wann zwei Curven mit einander congruent sind*, kommt darauf zurück, wann sie durch eine Bewegung in einander überführbar sind. Da die obigen Differentialinvarianten eben bei den Bewegungen invariant sind, so ist klar, dass zwei Curven nur dann congruent sind, wenn in entsprechenden Punkten beider die Differentialinvarianten dieselben Werte haben. Da aber von vornherein die einander entsprechenden Punkte nicht bekannt sind, so gehen wir so vor: Längs der einen Curve ändert sich r sowie $\frac{dr}{ds}$. Es ist also $\frac{dr}{ds}$ eine Function von r:

$$\frac{dr}{ds} = \omega(r). \tag{4}$$

Ebenso längs der zweiten Curve. Sollen sie congruent sein, so muss also dieselbe Relation (4) für die zweite Curve bestehen. Dies ist aber auch hinreichend für die Congruenz, sobald wir voraussetzen, dass

die Curven nicht Bahncurven einer eingliedrigen Untergruppe der Gruppe der Bewegungen, also weder Kreise noch Geraden, sind. Denn sobald dies nicht der Fall ist, geht die eine Curve bei unserer Gruppe in genau ∞^3 verschiedene Curven über (vgl. Satz 7, § 1 des 12. Kap.). Für alle diese Curven muss die Relation (4) bestehen. Andererseits ist (4) eine Differentialgleichung *dritter* Ordnung in x, y und definiert daher gerade ∞^3 verschiedene Curven. Die Relation (4) besteht daher sicher und nur für die Curven, die mit der gegebenen ersten congruent sind.

Wenn dagegen die beiden betrachteten Curven Bahncurven sind, so gehen sie bei der Gruppe in nur ∞^2 Lagen über und die obigen Schlüsse sind hinfällig. Aber hier erledigt sich die Sache sofort: Die betreffenden Curven sind Kreise oder Geraden, deren Congruenzkriterien trivial sind. Nur die Geraden, die nach den imaginären Kreispunkten gehen, die *Minimalgeraden:*

Minimalgeraden.

$$y \pm ix = \text{Const.}$$

sind hierbei besonders zu besprechen. Die Geraden jeder dieser beiden Scharen sind nur unter sich congruent, da die Gruppe der Bewegungen die Kreispunkte in Ruhe lässt, sodass also jede Minimalgerade zwei infinitesimale Bewegungen gestattet. Es ist also nicht exact, wenn man zuweilen sagt, dass zwei Geraden stets mit einander congruent sind. Der Ausnahmefall der Minimalgeraden tritt in unserer Invariantentheorie insofern in Evidenz, als für ihn die Differentialinvarianten $\frac{1}{r}, \frac{dr}{ds} \cdots$ ihre Bedeutung verlieren, indem $1 + y'^2 = 0$ wird. Doch verzichten wir hier darauf, zu zeigen, wie diese Ausnahmefälle naturgemäss aus unserer Theorie heraus entwickelt werden können und sich zugleich als die einzigen ergeben. Wir thun dies vielmehr in dem nächsten Problem, bei der Betrachtung der Curven im Raume, weil dort die Sachlage nicht von vornherein so einfach ist wie hier.

§ 2. Differentialinvarianten der Raumcurven bei der Gruppe der Bewegungen.

Gruppe der Beweggn. im Raume.

Wir wenden uns also jetzt zur Gruppe aller Bewegungen im Raume (x, y, z). Wir haben zwar diese Gruppe bisher nicht eingehender besprochen, doch ist sie leicht analog der Gruppe der Bewegungen in der Ebene (§ 3 des 4. Kap.) abzuleiten. Man findet, dass sie aus allen Translationen und Rotationen besteht, also die Form hat:

$$p \quad q \quad r \quad yp - xq \quad zq - yr \quad xr - zp.$$

Zwei Gebilde sind congruent, wenn sie vermöge einer Transformation dieser Gruppe in einander übergehen.

Wir suchen zunächst wieder Differentialinvarianten dieser Gruppe. Da wir Anwendungen auf die *Curven*theorie im Raume machen wollen, so haben wir uns vorzustellen, dass zwischen den Coordinaten x, y, z zwei Relationen bestehen. Es ist am übersichtlichsten, x, y, z als Functionen einer Hülfsgrösse λ aufzufassen, von der vorausgesetzt wird, dass sie sich bei der Gruppe nicht ändert, und dementsprechend die Incremente von $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$, $\frac{d^2x}{d\lambda^2}$ u. s. w. zu berechnen. Es kommt dies im Grunde genommen einfach darauf hinaus, dass wir die Incremente der Differentiale dx, dy, dz, $d^2x\dots$ in den Bereich der Betrachtung ziehen. Durch Benutzung der Hülfsveränderlichen λ wird nur das Rechnen mit Differentialen vermieden.

Erweiterung der Gruppe.

Bei der Berechnung der Incremente machen wir davon Gebrauch, dass

$$\delta\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{d\delta\varphi}{d\lambda}$$

ist. Demnach lauten die erweiterten infinitesimalen Transformationen, wenn die Differentiation nach λ durch den Accent angedeutet wird und p' für $\frac{\partial f}{\partial x'}$, p'' für $\frac{\partial f}{\partial x''}$ u. s. w. steht*):

$$\begin{array}{c} p \quad q \quad r \\ yp-xq+y'p'-x'q'+y''p''-x''q''+\cdots \\ zq-yr+z'q'-y'r'+z''q''-y''r''+\cdots \\ xr-zp+x'r'-z'p'+x''r''-z''p''+\cdots. \end{array}$$

Wir suchen nun *Differentialinvarianten*, d. h. Functionen $f(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''\dots)$, die zunächst bei diesen erweiterten infinitesimalen Transformationen invariant bleiben. Offenbar sind sie frei von x, y, z. Es handelt sich dann noch um die Integration des vollständigen Systems:

Differentialinvarianten.

$$(5)\qquad \begin{cases} y'p'-x'q'+y''p''-x''q''+\cdots=0, \\ z'q'-y'r'+z''q''-y''r''+\cdots=0, \\ x'r'-z'p'+x''r''-z''p''+\cdots=0. \end{cases}$$

Berücksichtigt man nur die ersten Differentialquotienten, so hat man ein zweigliedriges vollständiges System vor sich mit der einen Lösung

$$x'^2+y'^2+z'^2.$$

*) Wir wollen nicht unterlassen, darauf aufmerksam zu machen, dass die folgenden Betrachtungen sich ohne Mühe auf die Gruppe der Bewegungen in Räumen von höherer Dimensionenzahl verallgemeinern lassen.

Nimmt man auch die zweiten Differentialquotienten hinzu, so erhält man ein dreigliedriges vollständiges System in sechs Veränderlichen. Es besitzt also drei Lösungen, darunter die obige. Zwei von jener unabhängige sind offenbar:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'', \quad x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Überhaupt sieht man: Der Ausdruck

$$\omega_{ik} \equiv x^{(i)}x^{(k)} + y^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}z^{(k)} \tag{6}$$

ist eine Lösung des vollständigen Systems (5). Nehmen wir alle Differentialquotienten bis zu den n^{ten} mit, so liegt ein dreigliedriges vollständiges System in $3n$ Veränderlichen vor. Es hat also $3n - 3$ von einander unabhängige Lösungen. Solche aber sind folgende Ausdrücke ω_{ik}:

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega_{11}, & & \\ \omega_{12}, & \omega_{22}, & \\ \omega_{13}, & \omega_{23}, & \omega_{33}, \\ \omega_{14}, & \omega_{24}, & \omega_{34}, \\ \omega_{15}, & \omega_{25}, & \omega_{35}, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \omega_{1n}, & \omega_{2n}, & \omega_{3n}. \end{array}\right. \tag{7}$$

Dass sie von einander unabhängig sind, sieht man sofort.

Aber diese Differentialinvarianten können wir nicht sämtlich verwerten. Denn wenn wir die Bedingungen für die Überführbarkeit von Curven in einander aufstellen wollen, so haben wir zu bedenken, dass eine Curve sich nicht ändert, wenn man die Hülfsveränderliche λ durch eine beliebige Function von λ ersetzt. Wir dürfen daher nur solche Differentialinvarianten benutzen, die sich nicht ändern, wenn λ irgend eine Transformation, also auch insbesondere irgend eine infinitesimale Transformation

Von der Hülfsveränderl. unabhängige Differentialinvarianten.

$$\delta\lambda = \alpha(\lambda)\delta t$$

erfährt. Es wäre demnach unsere Aufgabe, aus den $2n - 3$ Functionen (7) alle die Functionen zu bilden, die ungeändert bleiben bei der infinitesimalen Transformation

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0, \quad \delta\lambda = \alpha(\lambda)\delta t, \tag{8}$$

welchen Wert auch die Function $\alpha(\lambda)$ haben mag. Wir werden aber später gar nicht alle Functionen jener ω_{ik} gebrauchen, die bei (8) invariant sind, sondern kommen — wie sich zeigen wird — mit den sechs ersten ω_{ik} allein aus, also mit

(9) $$\omega_{11},\quad \omega_{12},\quad \omega_{13},\quad \omega_{22},\quad \omega_{23},\quad \omega_{33}.$$

Für diese gestaltet sich die Rechnung so*):

Ganz analog der Formel (2) haben wir zur Berechnung der Incremente der Differentialquotienten hier, wo λ die unabhängige Veränderliche ist, die Formel

(10) $$\delta\varphi' \equiv \frac{d\delta\varphi}{d\lambda} - \varphi'\frac{d\delta\lambda}{d\lambda}.$$

Setzen wir hierin nach einander φ gleich x, x', x'', so kommt, da $\delta x = 0$, $\delta\lambda = \alpha(\lambda)\delta t$ ist:

$$\begin{aligned}\delta x' &= \qquad - x'\alpha'\delta t,\\ \delta x'' &= \frac{d\delta x'}{d\lambda} - x''\alpha'\delta t,\\ \delta x''' &= \frac{d\delta x''}{d\lambda} - x'''\alpha'\delta t.\end{aligned}$$

Dabei bedeutet α' den Differentialquotienten von α nach λ. Diese recurrierenden Formeln liefern nach einander:

$$\begin{aligned}\delta x' &= - x'\alpha'\delta t,\\ \delta x'' &= -(x'\alpha'' + 2x''\alpha')\delta t,\\ \delta x''' &= -(x'\alpha''' + 3x''\alpha'' + 3x'''\alpha')\delta t.\end{aligned}$$

Analoge Formeln bestehen in y und z, und der Wert (6) von ω_{ik} zeigt daher, dass die Functionen (9) durch (8) die Incremente erfahren:

(11) $$\begin{cases}\delta\omega_{11} = -2\alpha'\omega_{11}\delta t,\\ \delta\omega_{12} = -(\alpha''\omega_{11} + 3\alpha'\omega_{12})\delta t,\\ \delta\omega_{22} = -2(\alpha''\omega_{12} + 2\alpha'\omega_{22})\delta t,\\ \delta\omega_{13} = -(\alpha'''\omega_{11} + 3\alpha''\omega_{12} + 4\alpha'\omega_{13})\delta t,\\ \delta\omega_{23} = -(\alpha'''\omega_{12} + 3\alpha''\omega_{22} + \alpha''\omega_{13} + 5\alpha'\omega_{23})\delta t,\\ \delta\omega_{33} = -2(\alpha'''\omega_{13} + 3\alpha''\omega_{23} + 3\alpha'\omega_{33})\delta t.\end{cases}$$

Die Function f jener sechs Grössen ω soll nun die Relation

$$\delta f \equiv \sum_{i,\,k}^{1,2,3} \frac{\partial f}{\partial\omega_{ik}}\delta\omega_{ik} = 0$$

für alle Werte der Function α erfüllen. Sie zerfällt daher in die drei einzelnen Forderungen:

---

*) Factisch suchen wir die Differentialinvarianten einer sogenannten *unendlichen Gruppe*, da $\alpha(\lambda)$ alle möglichen Werte haben kann. Dennoch aber ist die obige Rechnung elementar.

$$Af \equiv 2\omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{11}} + 3\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 4\omega_{22}\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 4\omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} + 5\omega_{23}\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + $$
$$+ 6\omega_{33}\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} = 0,$$

$$Bf \equiv \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 3\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} + (3\omega_{22} + \omega_{13})\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + $$
$$+ 6\omega_{23}\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} = 0,$$

$$Cf \equiv \omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{13}} + \omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{23}} + 2\omega_{13}\frac{\partial f}{\partial \omega_{33}} = 0.$$

Diese drei Gleichungen bilden ein vollständiges System, denn es ist

$$(AB) \equiv - Bf, \quad (AC) \equiv - 2Cf, \quad (BC) \equiv 0.$$

Dass sie linear sind, hätte man übrigens aus gewissen allgemeinen Überlegungen heraus vorhersagen können. Weil sie linear sind, sind sie auch integrabel. Zur Integration beginnen wir mit der dritten Gleichung $Cf = 0$. Sie besitzt die Lösungen:

$$\omega_{11}, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{22},$$
$$u \equiv \omega_{12}\omega_{13} - \omega_{11}\omega_{23}, \quad v \equiv \omega_{13}^2 - \omega_{11}\omega_{33}.$$

Wenn wir unter f eine Function von diesen fünf Grössen allein verstehen, so nimmt die zweite Gleichung $Bf = 0$ die Gestalt an:

$$\omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{12}} + 2\omega_{12}\frac{\partial f}{\partial \omega_{22}} + 3(\omega_{12}^2 - \omega_{11}\omega_{22})\frac{\partial f}{\partial u} + 6u\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Sie besitzt die Lösungen:

$$\omega_{11}, \quad w \equiv \omega_{12}^2 - \omega_{11}\omega_{22},$$
$$\varphi \equiv u^2 - vw, \quad \psi \equiv 3w\omega_{12} - u\omega_{11}.$$

Sobald f eine Function von diesen vier Grössen allein ist, nimmt die Gleichung $Af = 0$ die Form an:

$$2\omega_{11}\frac{\partial f}{\partial \omega_{11}} + 6w\frac{\partial f}{\partial w} + 14\varphi\frac{\partial f}{\partial \varphi} + 9\psi\frac{\partial f}{\partial \psi} = 0.$$

Ihre Lösungen sind die gesuchten Functionen. Als solche können wir folgende wählen: Zunächst

$$\frac{w}{\omega_{11}^3}.$$

Diese Grösse ist nichts anderes als der reciproke Wert des Quadrates des *Krümmungsradius* r der betrachteten Raumcurve, d. h. die *Krümmung:*

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{w}{\omega_{11}^3}}.$$

Ferner ist eine Lösung:

$$\frac{\psi^2}{w^3}.$$

Sie stellt nichts anderes dar als das Quadrat des *Differentialquotienten aus dem Krümmungsradius r und der Bogenlänge s:*

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{\frac{\psi^2}{w^3}}.$$

Endlich ist auch:

$$\frac{\varphi}{\omega_{11} w^2}$$

eine Lösung. Es ist dies das Quadrat der *Torsion* τ der Raumcurve:

$$\tau = \sqrt{\frac{\varphi}{\omega_{11} w^2}}.$$

Dass diese Grössen in der That die angegebene geometrische Bedeutung haben, erkennt man, wenn man sie ausrechnet, indem man etwa für den Augenblick λ mit der Bogenlänge identificiert. Wir sind hier naturgemäss gerade auf diese für die Curventheorie so wichtigen Ausdrücke geführt worden, und zwar haben wir ihre Werte ausgedrückt durch die Differentialquotienten der Coordinaten nach einer *beliebigen* Hülfsvariabeln λ, während man sonst wenigstens die Torsion nur mit Benutzung der Bogenlänge als unabhängiger Veränderlicher zu berechnen pflegt.

Aus dem Bisherigen ergiebt sich, dass jede Differentialinvariante von höchstens dritter Ordnung einer Raumcurve gegenüber der Gruppe der Bewegungen der Ebene eine Function von r, $\frac{dr}{ds}$ und τ ist. Da z. B. auch der Radius der Schmiegungskugel eine Differentialinvariante ist, denn er ändert sich nicht bei einer Bewegung, und zwar eine Differentialinvariante dritter Ordnung, weil die Schmiegungskugel durch vier consecutive Punkte der Curve bestimmt ist, so folgt hieraus, dass der Radius der Schmiegungskugel eine Function von r, $\frac{dr}{ds}$ und τ allein ist. In der That kennt man eine solche Beziehung. Wir können nun aber sehen, dass wir im wesentlichen auch alle höheren Differentialinvarianten der Curve gefunden haben. Dies erkennen wir so:

Anzahl der Differentialinvarianten.

Zunächst können wir abzählen, wie viele Differentialinvarianten es überhaupt giebt. Wir hätten nämlich die Differentialinvarianten in allerdings weniger symmetrischer Weise auch dadurch bilden können, dass wir y und z als Functionen von x betrachteten und die Incremente der Differentialquotienten von y und z nach x mit hinzunahmen, denn unsere Differentialinvarianten sind die, welche von der

Wahl der unabhängigen Veränderlichen λ unabhängig sind, d. h. welche nur die Differentialquotienten der Coordinaten untereinander enthalten. Gehen wir dabei bis zu den n^{ten} Differentialquotienten, so erhalten wir aus den 6 infinitesimalen Transformationen der Gruppe ein 6-gliedriges vollständiges System in $3+2n$ Veränderlichen. Es besitzt $3+2n-6$, also $2n-3$ von einander unabhängige Lösungen.

Wir erkennen somit, wenn wir nun zu unserer Fassung der Aufgabe zurückkehren: Es giebt gerade $2n-3$ von einander unabhängige Differentialinvarianten in x, y, z; x', y', z'; .... $x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$, die von der Wahl des Parameters unabhängig sind. Für $n=3$ haben wir drei, nämlich die oben gefundenen $r, \frac{dr}{ds}, \tau$. Bei Hinzunahme der höheren Differentialquotienten treten mit jedem Schritt *zwei* Invarianten hinzu. Wir können nun leicht ein Mittel zu ihrer Berechnung finden.

Differentialparameter.

Wir suchen zu dem Zweck *Differentialparameter*. Wir fragen also nach einer Function Ω der Veränderlichen, des Differentialquotienten und von $\varphi, \varphi', \varphi''$.... derart, dass, wenn φ irgend eine Differentialinvariante bezeichnet, auch Ω eine solche ist. Es ist, wie wir oben sahen,

$$(10) \qquad \delta\varphi' \equiv \frac{d\delta\varphi}{d\lambda} - \varphi'\frac{d\delta\lambda}{d\lambda}.$$

Bei einer infinitesimalen Transformation der Gruppe der Bewegungen ist $\delta\lambda = 0$. Ferner soll φ eine Invariante, also $\delta\varphi = 0$ sein. Daher kommt auch $\delta\varphi' = 0$. Ferner ist stets:

$$(12) \qquad \delta\varphi'' \equiv \frac{d\delta\varphi'}{d\lambda} - \varphi''\frac{d\delta\lambda}{d\lambda},$$

und hieraus folgt, dass auch $\delta\varphi'' = 0$ ist, u. s. w. Mithin ergiebt sich zunächst, da die Function Ω bei den infinitesimalen Transformationen der Gruppe, wenn diese durch Hinzunahme der Transformationen der Differentialquotienten und von $\varphi, \varphi', \varphi''$... erweitert werden, invariant bleiben muss, dass Ω eine beliebige Function der ω_{ik} und von $\varphi, \varphi', \varphi''$... ist. Aber Ω soll ferner von der Wahl des Parameters λ unabhängig sein. Um die hieraus folgenden Bedingungen abzuleiten, setzen wir wie oben unter (8):

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0, \quad \delta\lambda = \alpha(\lambda)\delta t,$$

sodass wieder die Relationen (11) für die $\delta\omega_{ik}$ bestehen. Ferner folgt dann aus (10), da $\delta\varphi = 0$ sein soll, dass

$$\begin{aligned}\delta\varphi' &= -\alpha'\varphi'\delta t,\\ \delta\varphi'' &= -(\alpha''\varphi' + 2\alpha'\varphi'')\delta t,\\ \delta\varphi''' &= -(\alpha'''\varphi' + 3\alpha''\varphi'' + 3\alpha'\varphi''')\delta t\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

ist. Nullsetzen des Incrementes von Ω giebt also:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{i,k}^{1,2\ldots}\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{ik}}\frac{\delta\omega_{ik}}{\delta t} - \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi'}\alpha'\varphi' - \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi''}(\alpha''\varphi' + 2\alpha'\varphi'') -\\ &-\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi'''}(\alpha'''\varphi' + 3\alpha''\varphi'' + 3\alpha'\varphi''') - \cdots = 0.\end{aligned}\right.$$

Wir haben hieraus Ω zu bestimmen. Zunächst wollen wir annehmen, der gesuchte Differentialparameter enthalte von x, y, z und φ keine höheren als die ersten Differentialquotienten. Dann haben wir nach (11) folgende Gleichung zu betrachten:

$$2\alpha'\omega_{11}\frac{\partial\Omega}{\partial\omega_{11}} + \alpha'\varphi'\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi'} = 0.$$

α' lässt sich streichen, und wir finden, dass Ω eine Function von

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\varphi'}{\sqrt{\omega_{11}}}$$

allein ist. Bei unserer Raumcurve ist nun, wenn s die Bogenlänge bedeutet:

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\omega_{11}},$$

sodass wir

$$\Delta\varphi \equiv \frac{d\varphi}{ds}$$

schreiben können. Dieser Differentialparameter lehrt also: *Sobald φ eine Invariante ist, ist auch $\frac{d\varphi}{ds}$ eine Invariante.*

Wir sehen: Ist φ eine Invariante n^{ter} Ordnung, so ist offenbar $\frac{d\varphi}{ds}$ eine von $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung. Nun kennen wir die Invariante zweiter Ordnung r sowie die beiden Invarianten dritter Ordnung $\frac{dr}{ds}$ und τ. Es sind also

$$\frac{d^2r}{ds^2},\quad \frac{d\tau}{ds}$$

Invarianten vierter Ordnung, ebenso

$$\frac{d^3r}{ds^3},\quad \frac{d^2\tau}{ds^2}$$

Invarianten fünfter Ordnung u. s. w. Offenbar sind sie auch sämtlich von einander unabhängig. Nach unserer obigen Abzählung kennen

Allgemeinste Differentialinvariante.

wir also auch alle Differentialinvarianten. *Die allgemeinste von der Wahl des Parameters unabhängige Differentialinvariante* ist mithin eine beliebige Function von

$$r, \quad \frac{dr}{ds}, \quad \frac{d^2r}{ds^2}, \quad \frac{d^3r}{ds^3} \cdots,$$

$$\tau, \quad \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{d^2\tau}{ds^2} \cdots.$$

Wir hätten sie auch durch Integration der Gleichungen finden können, die aus den obigen $Af = 0$, $Bf = 0$, $Cf = 0$ hervorgehen, wenn die Incremente der höheren ω_{ik} mit berücksichtigt werden. Die Gleichungen werden aber alsdann sehr compliciert. Man sieht also, wie ausserordentlich sich die Benutzung des Differentialparameters $\Delta\varphi$ bewährt.

Allgemeinster Differentialparameter.

Wir können nun auch den *allgemeinsten Differentialparameter* aufstellen. Offenbar nämlich ist auch

$$\Delta^2\varphi \equiv \Delta\Delta\varphi \equiv \frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

ein Differentialparameter, denn, wenn φ eine Invariante ist, so ist $\Delta\varphi$ auch eine, daher auch $\Delta^2\varphi$. Entsprechend ist $\Delta^3\varphi \equiv \Delta\Delta\Delta\varphi$ eine Invariante u. s. w. Nun können wir die obige Gleichung (13) allgemein integrieren. Sie wird erfüllt durch die gefundenen Differentialinvarianten sowie durch die Differentialparameter

$$\Delta\varphi, \quad \Delta^2\varphi, \quad \Delta^3\varphi \cdots.$$

Die Gleichung (13) zerfällt, da sie für alle Functionen $\alpha(\lambda)$ bestehen soll, in eine ganze Reihe von Gleichungen, die offenbar sämtlich von einander unabhängig sind. Gehen wir bis zu der zu $\alpha^{(n)}$ gehörigen und suchen wir solche Ω, die keine höheren als die n^{ten} Differentialquotienten von x, y, z, φ enthalten, so liegen gerade n von einander unabhängige Gleichungen vor, die ein n-gliedriges vollständiges System bilden *) in den Veränderlichen

$$\begin{array}{ccc} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{22}, \\ \omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{1n} & \omega_{2n} & \omega_{3n}, \\ \varphi & \varphi' \ldots & \varphi^{(n)}, \end{array}$$

---

*) Würden sie kein solches bilden, so würden sie noch weniger gemeinsame Lösungen besitzen. Da aber gerade die für ein vollständiges System hinreichende Anzahl von Lösungen vorhanden ist, wie sich zeigt, so kann man daraus schliessen, dass wir es in der That mit einem vollständigen System zu thun haben. Eine analoge Bemerkung gilt an anderen Stellen des Textes.

d. h. in $3n - 3 + n + 1 = 4n - 2$ Veränderlichen. Es besitzt also $4n - 2 - n = 3n - 2$ von einander unabhängige Lösungen. Solche sind aber die $2n - 3$ Invarianten sowie φ und die n Differentialparameter $\Delta\varphi, \Delta^2\varphi \ldots \Delta^{(n)}\varphi$. Dies sind gerade $3n - 2$. Wählen wir n beliebig hoch, so ergiebt sich folglich: Der allgemeinste Differentialparameter ist eine beliebige Function von

$$r, \quad \frac{dr}{ds}, \quad \frac{d^2r}{ds^2}, \quad \frac{d^3r}{ds^3} \cdots,$$

$$\tau, \quad \frac{d\tau}{ds}, \quad \frac{d^2\tau}{ds^2} \cdots,$$

$$\varphi, \quad \Delta\varphi, \quad \Delta^2\varphi, \quad \Delta^3\varphi \cdots.$$

Man sieht hieraus, dass unsere Gruppe *nur einen wesentlichen Differentialparameter* $\Delta\varphi$ besitzt. Denn wenn $\Delta\varphi$ ein Differentialparameter ist, so ist von vornherein klar, dass jede Function von den Differentialinvarianten, von $\varphi, \Delta\varphi, \Delta^2\varphi \ldots$, auch ein Differentialparameter ist.

Wesentlicher Differentialparameter.

Die Ergebnisse haben eine grosse Bedeutung für die Theorie der Raumcurven. Wir werden sehen, dass für das Problem der Überführbarkeit von Raumcurven in einander vermöge einer Bewegung, d. h. für das Problem der Congruenz von Raumcurven nur die drei Differentialinvarianten r, $\frac{dr}{ds}$ und τ in betracht kommen (sobald sie nicht ihren Sinn verlieren), da alle anderen Differentialinvarianten Functionen von diesen und ihren Differentialquotienten nach s sind.

Wir wollen nun die Aquivalenztheorie für Raumcurven zunächst weniger methodisch angreifen, indem wir uns auf solche Curven beschränken, bei denen die von uns betrachteten Differentialinvarianten einen Sinn haben. Dass es Curven giebt, bei denen dies nicht der Fall ist, und wie man alle diese Curven finden sowie ihre Äquivalenztheorie entwickeln kann, zeigen wir erst im nächsten Paragraphen. Unsere jetzigen Betrachtungen sollen nur vorläufig orientieren.

Wir schicken dabei einen Satz voraus, von dem wir einen Specialfall schon als Satz 7 in § 1 des 12. Kap. gegeben haben:

Satz 1: *Gestattet ein Gebilde q von einander unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe, so nimmt es bei Ausführung aller Transformationen der Gruppe genau ∞^{r-q} verschiedene Lagen an, und umgekehrt.*

Ausführung der Trf. einer Gruppe auf ein Gebilde.

Ein Gebilde F nehme nämlich bei der r-gliedrigen Gruppe gerade ∞^{r-q} verschiedene Lagen F' an. Alle F' bilden alsdann eine invariante Mannigfaltigkeit. Jedes F' wird bei den ∞^r Transformationen

der Gruppe in nur ∞^{r-q} Lagen übergeführt, daher bei je ∞^q Transformationen T_a, T_b, T_c der Gruppe in dieselbe Lage F''. Alle ∞^q Transformationen $T_b T_a^{-1}$, $T_c T_a^{-1}$... führen F' in sich über. Offenbar thun dies keine anderen, da sonst F' weniger als ∞^{r-q} Lagen insgesamt erhielte. Jene ∞^q Transformationen der Gruppe, die F' in Ruhe lassen, bilden natürlich eine Untergruppe mit paarweis inversen Transformationen, die von q infinitesimalen Transformationen erzeugt wird. Mithin gestattet jedes F', insbesondere auch F, genau q von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe.

Wir werden den Satz, den wir in speciellerer Form schon öfters verwertet haben, für die Raumcurven benutzen. —

Sollen zwei Raumcurven einander congruent sein, so werden jedenfalls die Differentialinvarianten in entsprechenden Punkten beider Curven gleiche Werte haben müssen. Dazu ist notwendig, dass insbesondere r, $\frac{dr}{ds}$, τ in einem Punkte der einen Curve dieselben Werte wie in dem entsprechenden Punkte der anderen haben. Nun ist von vornherein nicht bekannt, wie sich die Punkte beider Curven entsprechen. Wir können daher nur soviel sagen: Längs der einen Curve werden $\frac{dr}{ds}$ und τ mit r variieren, ebenso längs der anderen, wenn wir zunächst von dem Fall, dass r constant ist, ausdrücklich absehen. Längs der einen Curve werden also $\frac{dr}{ds}$ und τ gewisse Functionen von r sein:

Relationen zw. den Differentialinvarianten.

$$\frac{dr}{ds} = f(r), \quad \tau = \psi(r).$$

Soll die zweite Curve mit der ersten congruent sein, so müssen natürlich bei ihr genau dieselben Relationen bestehen.

Nun aber können wir zeigen, dass umgekehrt eine Curve, längs deren r nicht constant ist, dann und nur dann mit der ersten Curve congruent ist, wenn bei ihr $\frac{dr}{ds}$ dieselbe Function $f(r)$ von r und τ dieselbe Function $\psi(r)$ von r ist wie bei der gegebenen*). Denn einerseits werden die beiden obigen Gleichungen sicher von allen Curven erfüllt, die mit der gegebenen congruent sind. Andererseits

---

*) Hoppe hat schöne Untersuchungen über die Curven angestellt, die durch zwei Gleichungen von der Form

$$\frac{dr}{ds} = f(r), \quad \tau = \psi(r)$$

definiert werden. Vgl. Crelle's Journal Bd. 60.

aber auch nicht von anderen Curven ausser diesen; und das sieht man durch eine Abzählung ein: Jene beiden Gleichungen stellen nämlich zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung zur Bestimmung von y und z als Functionen von x dar und drücken also $\frac{d^3y}{dx^3}$ und $\frac{d^3z}{dx^3}$ und ebenso die höheren Differentialquotienten durch die niederen Differentialquotienten aus. Wenn man also die 6 Werte von y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ für einen bestimmten Wert x_0 von x giebt, so sind auch die höheren Differentialquotienten für $x = x_0$ gegeben und y und z werden somit bestimmte Potenzreihen nach $x - x_0$. Es sind also die Functionen y und z von x nur und gerade von 6 Constanten abhängig, d. h. es giebt ∞^6 verschiedene Curven, die unseren beiden Forderungen genügen. Es geht aber die erste betrachtete Curve nach Satz 1 bei allen Transformationen der 6-gliedrigen Gruppe der Bewegungen in gerade ∞^6 verschiedene Lagen über, denn sonst müsste sie mindestens eine infinitesimale Transformation der Gruppe gestatten, also längs ihr jede Differentialinvariante einen constanten Wert haben und demnach insbesondere gegen die Voraussetzung r constant sein. Die ∞^6 Integralcurven jener beiden Differentialgleichungen sind demnach gerade die ∞^6 mit der gegebenen Curve congruenten Curven.

Specialfall $r = \text{Const.}$

Betrachten wir jetzt *zweitens* eine Curve, längs deren r constant ist. Sie kann nur mit solchen Curven congruent sein, längs deren r ebenfalls constant und zwar von derselben Grösse ist. Es ist dann längs der Curven die Differentialinvariante $\frac{dr}{ds} = 0$, ebenso $\frac{d^2r}{ds^2}$ u. s. w., sodass nur noch die Differentialinvarianten τ, $\frac{d\tau}{ds}$, $\frac{d^2\tau}{ds^2}$ u. s. w. als veränderlich längs der Curven übrig bleiben. Ist, wie wir zunächst ausdrücklich voraussetzen wollen, τ nicht längs der Curven constant, so verfahren wir so: Sind zwei Curven einander congruent, bei denen r constant ist, so ändern sich τ und $\frac{d\tau}{ds}$ längs der Curven, es wird also $\frac{d\tau}{ds}$ bei beiden eine Function von τ sein, und zwar bei beiden dieselbe Function von τ:

$$\frac{d\tau}{ds} = f(\tau).$$

Wenn umgekehrt bei zwei Curven r denselben constanten Wert a hat und bei beiden zwischen $\frac{d\tau}{ds}$ und der nicht constanten Torsion τ dieselbe vorstehende Relation gilt, so sind beide Curven congruent. Um dies

einzusehen, bemerken wir: Unsere Relation ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung, die Gleichung $r = a$ eine von dritter Ordnung. Sie besitzen gerade ∞^6 gemeinsame Integralcurven, denn $r = a$ bestimmt $\frac{d^2z}{dx^2}$ durch $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ und die Gleichung für $\frac{d\tau}{ds}$ giebt $\frac{d^4y}{dx^4}$ als Function von $\frac{d^4z}{dx^4}$ und den niederen Differentialquotienten von y und z nach x. Wenn man also für $x = x_0$ den 6 Grössen $y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ bestimmte Werte beilegt, so haben für $x = x_0$ auch alle übrigen Differentialquotienten bestimmte Werte, sodass y und z bestimmte Potenzreihen nach $x - x_0$ werden, die von 6 willkürlichen Constanten abhängen. Es giebt also genau ∞^6 verschiedene Raumcurven, bei denen $r = a$ und $\frac{d\tau}{ds}$ die gegebene Function $f(\tau)$ ist. Andererseits, da keine der Curven eine infinitesimale Bewegung gestattet, weil sonst auch τ constant wäre, so wird eine solche Curve nach Satz 1 bei der Gruppe der Bewegungen in gerade ∞^6 Curven übergeführt, die sämtlich die Relationen erfüllen, weil sie einander congruent sind. Mithin geben unsere beiden Bedingungen in der That gerade und nur ∞^6 einander congruente Curven.

Specialfall $r = \text{Const.}$, $\tau = \text{Const.}$

Drittens ist der Fall zu betrachten, dass r und τ constant sind, sodass alle übrigen Differentialinvarianten $\frac{dr}{ds}\cdots, \frac{d\tau}{ds}\cdots$ Null werden. Sollen zwei Curven, bei denen r und τ constant sind, einander congruent sein, so muss r ebenso wie τ bei beiden übereinstimmende Werte haben. Dies reicht aber auch zur Congruenz aus. In diesem Falle nämlich sind beide Curven *Schraubenlinien* auf congruenten Rotationscylindern mit gleicher Steigung.

Wir heben schliesslich noch einmal ausdrücklich hervor, dass diese vorläufigen Betrachtungen nicht erschöpfend sind, denn es kann z. B. bei einer Curve sehr wohl vorkommen, dass die Differentialinvarianten ihren Sinn verlieren. Sie sind ja in Bruchform dargestellt, sodass der Fall des Verschwindens der Nenner besonders zu untersuchen wäre.

Wie wir nun vorzugehen haben, um sicher zu sein, auch *alle* Möglichkeiten zu umfassen, wollen wir im nächsten Paragraphen zeigen.

§ 3. Congruenzkriterien der Raumcurven.

Wir beginnen die Betrachtung der Raumcurven von Neuem und von einem anderen Punkte aus:

Curve, die keine inf. Bewegung gestattet.

Zunächst fassen wir irgend eine *Curve* ins Auge, *die keine infinitesimale Bewegung gestattet.* Sie nimmt dann nach Satz 1 des vorigen Paragraphen bei allen Transformationen der Gruppe gerade ∞^6 verschiedene Lagen an. Es existieren also in diesem Falle gerade ∞^6 Curven, die der betrachteten congruent sind.

Sie werden durch Differentialgleichungen definiert, welche die höheren Differentialquotienten von y und z nach x durch die niederen ausdrücken. Wir fragen nun, durch wie viele Differentialgleichungen sie definiert werden und von welcher Ordnung diese Differentialgleichungen sind. Offenbar reicht eine Differentialgleichung nicht aus, da es sich um die Bestimmung zweier Functionen y und z von x handelt. Es sind also mindestens zwei Differentialgleichungen erforderlich, von denen eine nicht eine Folge der anderen sein darf. Nehmen wir an, die niedrigsten von einander unabhängigen unter diesen Differentialgleichungen, welche ∞^6 Curven definieren, seien von m^{ter} und n^{ter} Ordnung, und es sei $m \leqq n$. Die aus diesen beiden Differentialgleichungen durch Differentiation nach x hervorgehenden werden von der n^{ten} Ordnung an alle Differentialquotienten von y und z nach x durch die niederen bestimmen, während die erste mit den aus ihr durch Differentiation gebildeten etwa noch den m^{ten}, $(m+1)^{\text{ten}} \cdots (n-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z nach x liefert, sodass also zunächst die $(n+m)$ Grössen

$$y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \quad z, \frac{dz}{dx} \cdots \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}$$

durch keinerlei Relation gebunden sind. Käme nun aber noch eine dritte Differentialgleichung von n^{ter} oder höherer Ordnung hinzu, so würde sie Relationen zwischen den n^{ten} und höheren Differentialquotienten herstellen. Führten diese nicht zu Relationen zwischen niederen, so wäre die dritte Differentialgleichung überflüssig; führte sie aber zu Relationen zwischen den oben angegebenen $(n+m)$ Grössen, so existierte gegen die Voraussetzung eine Differentialgleichung ausser der von m^{ter} Ordnung, die von niederer als n^{ter} Ordnung wäre.

Also wird unsere Curvenschar durch jene zwei Differentialgleichungen allein definiert und es können die Werte jener obigen $(n+m)$ Grössen für $x = x_0$ beliebig gewählt werden. Dadurch sind aber alle übrigen Differentialquotienten mitgegeben, sodass y und z als Potenzreihen nach $x - x_0$ mit $n + m$ willkürlichen Constanten erscheinen. Weil es sich nun um gerade ∞^6 Curven handelt, so muss demnach

$$n + m = 6$$

sein. Da $m \leq n$ ist, so sind folglich vier Möglichkeiten vorhanden:

Vier Fälle.

a) Die ∞^6 Curven sind durch eine Differentialgleichung nullter Ordnung, d. h. eine Gleichung zwischen x, y, z allein, die eine Fläche darstellt, und durch eine Differentialgleichung 6ter Ordnung definiert.

b) Sie sind durch eine Differentialgleichung 1ter und eine 5ter Ordnung,

c) durch eine 2ter und eine 4ter Ordnung,

d) durch zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung definiert.

Diesen vier Fällen entsprechen wesentlich verschiedene Arten von Curven, die wir nun nach einander zu untersuchen haben. Es ist dabei zu bemerken, dass die Differentialgleichungenpaare, da sie jedesmal eine invariante Schar von ∞^6 Curven darstellen sollen, bei den Transformationen invariant sein müssen, die aus denen der Gruppe durch Erweiterung um die Transformationen der Differentialquotienten hervorgehen. Um also diese Systeme von Differentialgleichungen aufzustellen, haben wir die bei den erweiterten infinitesimalen Transformationen der Gruppe invarianten Gleichungenpaare aufzusuchen.

Invariante Paare von Differentialgleichungen.

Deuten wir x, y, z sowie die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \cdots$, soweit wir sie brauchen, als Coordinaten der Punkte eines Raumes von geeigneter Dimensionenzahl, so stellen die gesuchten Systeme von Differentialgleichungen jedesmal eine invariante Mannigfaltigkeit in diesem Raume gegenüber der erweiterten Gruppe dar. Wir haben aber in Kap. 16 eine allgemeine Theorie zur Bestimmung aller dieser invarianten Mannigfaltigkeiten entwickelt. Danach ergeben sie sich durch Aufstellen von Relationen zwischen den Invarianten und durch Nullsetzen aller Determinanten gleicher Reihenzahl der Matrix der erweiterten Gruppe. Diese Gleichungen wollen wir, soweit wir sie nachher gebrauchen, nunmehr entwickeln.

Wir wollen allgemein setzen

$$\frac{d^n y}{dx^n} \equiv y_n, \quad \frac{d^n z}{dx^n} \equiv z_n.$$

Dann ist

$$dy_{n-1} - y_n dx \equiv 0,$$

also

$$\delta y_n \equiv \frac{d\delta y_{n-1}}{dx} - y_n \frac{d\delta x}{dx}$$

und analog

$$\delta z_n \equiv \frac{d\delta z_{n-1}}{dx} - z_n \frac{d\delta x}{dx}.$$

Hiernach berechnen sich die Incremente der Differentialquotienten bei den infinitesimalen Transformationen der Gruppe der Bewegungen ohne Mühe. Die einmal erweiterte Gruppe lautet:

$$\begin{array}{l} p \quad q \quad r \\ yp - xq - (1 + y_1^2)q_1 - y_1 z_1 r_1 \\ zq - yr + \quad z_1 q_1 - y_1 r_1 \\ xr - zp + \quad y_1 z_1 q_1 + (1 + z_1^2) r_1, \end{array}$$

wenn q_1 für $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ und r_1 für $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ gesetzt wird. Diese einmal erweiterte Gruppe besitzt, wie wir ja auch schon wissen, keine Invariante, weil die fünfreihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y & -x & 0 & -(1 + y_1^2) & -y_1 z_1 \\ 0 & z & -y & z_1 & -y_1 \\ -z & 0 & x & y_1 z_1 & 1 + z_1^2 \end{array}\right|$$

nicht identisch Null sind. Daher finden wir invariante Gleichungen zwischen x, y, z, y_1, z_1 nur durch Nullsetzen aller Determinanten gleicher Reihenzahl. Setzen wir alle fünfreihigen gleich Null. Eine liefert gleich Null gesetzt*):

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0,$$

und man sieht, dass dann alle fünf anderen auch verschwinden, weil sie den Ausdruck $1 + y_1^2 + z_1^2$ zum Factor haben. Die vierreihigen Determinanten sind alsdann nicht sämtlich auch Null. Man erkennt, dass überhaupt nicht alle vierreihigen Determinanten gleichzeitig Null sein können.

Erweitern wir die Gruppe zweimal, indem wir auch die Incremente von y_2 und z_2 hinzunehmen, so erhalten wir eine Gruppe mit der Matrix:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & -x & 0 & -1 - y_1^2 & -y_1 z_1 & -3y_1 y_2 & -2y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ 0 & z & -y & z_1 & -y_1 & z_2 & -y_2 \\ -z & 0 & x & y_1 z_1 & 1 + z_1^2 & 2z_1 y_2 + y_1 z_2 & 3z_1 z_2 \end{array}\right|$$

*) Genau genommen würde noch zu untersuchen sein, ob nicht die Schar $x =$ Const., die durch die Wahl von x als unabhängiger Veränderlicher hier verloren geht, invariant ist. Man sieht sofort, dass sie es nicht ist.

Diese 6-gliedrige Gruppe in 7 Veränderlichen besitzt, da nicht alle 6-reihigen Determinanten der Matrix identisch verschwinden, gerade $7 - 6 = 1$ Invariante, nämlich, wie wir schon wissen, den Krümmungsradius r. $r =$ Const. stellt also eine invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung dar. Alle 6-reihigen Determinanten der Matrix verschwinden, wie man leicht berechnet, nur dann, wenn entweder

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

oder aber wenn

$$y_2 = z_2 = 0$$

oder endlich wenn gleichzeitig

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0, \quad y_2 = z_2 = 0$$

ist.

Ferner ist noch zu bemerken: Erweitern wir bis y_3, z_3, so erhalten wir eine 6-gliedrige Gruppe in 9 Veränderlichen mit $9 - 6 = 3$ Invarianten, nämlich r, $\frac{dr}{ds}$ und τ. Nullsetzen aller 6-reihigen Determinanten der Matrix liefert, wie der Leser selbst berechnen möge, ausser anderen Relationen stets $y_2 = z_2 = 0$.

Erweitern wir allgemein bis zu y_n, z_n, so erhalten wir eine 6-gliedrige Gruppe in $2n + 3$ Veränderlichen mit $2n - 3$ Invarianten

$$r, \quad \frac{dr}{ds}, \quad \frac{d^2 r}{ds^2} \quad \cdots \quad \frac{d^{n-2} r}{ds^{n-2}},$$

$$\tau, \quad \frac{d\tau}{ds} \quad \cdots \quad \frac{d^{n-3}\tau}{ds^{n-3}}.$$

Die 6-reihigen Determinanten der sich hier ergebenden Matrix verschwinden nur dann sämtlich, wenn — unter anderen — die Relationen $y_2 = z_2 = 0$ bestehen, da dies schon im Fall $n = 3$ gilt.

Vorstehende Ergebnisse genügen zur Durchführung unserer Theorien. Wir bemerken nur noch, dass wir eine Curve, für die

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0,$$

d. h. das Bogenelement

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0$$

ist, oder, was dasselbe ist, deren Tangenten den imaginären Kugelkreis schneiden, eine *Minimalcurve* nennen. Überall da, wo sie im Folgenden auftritt, halten wir uns nicht weiter mit ihr auf, da wir die Minimalcurven nachher für sich eingehend zu betrachten gedenken.

Minimalcurve.

Erledigung der vier Fälle.

Wir suchen zunächst ein invariantes Paar von Differentialgleichungen für den obigen Fall a). Daselbst ist die eine Gleichung

die einer bei der Gruppe invarianten Fläche. Da eine solche nicht existiert ausser der unendlich fernen Ebene, die wir, wie alle unendlich fernen Curven, hier ausser betracht lassen, so ist Fall a) unmöglich.

Im Fall b) handelt es sich um eine Differentialgleichung *erster* und eine *fünfter* Ordnung. Als solche erster Ordnung ergiebt sich nach Obigem nur diese:

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0.$$

Die fraglichen Curven sind demnach *Minimalcurven.*

Im Fall c) fragt es sich, welches invariante System von Differentialgleichungen, deren eine von *zweiter*, deren andere von *vierter* Ordnung ist, existiert. Erstere Gleichung geht entweder durch Constans-Setzen der einzigen Invariante zweiter Ordnung

$$r = \text{Const.}$$

hervor oder ist durch Nullsetzen der Determinanten zu bilden. Dies liefert aber, wie bemerkt wurde, auf einmal *zwei* Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y_2 = z_2 = 0$, was nicht sein soll, oder aber eine erster und eine zweiter

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0, \quad y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0,$$

was ebenfalls ausgeschlossen ist. Es bleibt also nur die Annahme

$$r = \text{Const.}$$

Die hinzutretende Differentialgleichung vierter Ordnung macht sicher nicht alle 6-reihigen Determinanten der Matrix gleich Null, da Nullsetzen dieser stets $y_2 = z_2 = 0$ ergiebt. Die fragliche Gleichung ist daher eine Relation zwischen den Differentialinvarianten bis zur vierten Ordnung: $r, \frac{dr}{ds}, \frac{d^2r}{ds^2}, \tau, \frac{d\tau}{ds}$. Da aber $r = \text{Const.}$ ist, also $\frac{dr}{ds} = 0$ und $\frac{d^2r}{ds^2} = 0$ ist, so bleiben nur τ und $\frac{d\tau}{ds}$. τ ist nicht constant, denn $\tau = \text{Const.}$ gäbe eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Mithin lautet die gesuchte Gleichung vierter Ordnung

$$\frac{d\tau}{ds} = f(\tau).$$

Im Falle d) endlich handelt es sich um zwei Differentialgleichnngen *dritter* Ordnung. Diese sind als Relationen zwischen den Differentialinvarianten bis zur dritten Ordnung $r, \frac{dr}{ds}, \tau$ zu bilden, denn Nullsetzen der Determinanten würde ja Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y_2 = z_2 = 0$ ergeben. Da ferner r nicht constant ist, denn

$r = \text{Const.}$ ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, so bleibt die Annahme:

$$\frac{dr}{ds} = f(r), \quad \tau = \psi(r).$$

Curve, die eine inf. Bewegung gestattet.

Wir kommen jetzt zu den *Curven, die eine und nur eine infinitesimale Bewegung zulassen,* daher nach Satz 1 des vorigen Paragraphen bei der Gruppe gerade je ∞^5 verschiedene Lagen annehmen. Wir finden, dass sie durch eine Differentialgleichung m^{ter} und eine n^{ter} Ordnung ($n \geqq m$) bestimmt werden, wobei

$$m + n = 5$$

ist. Demnach liegen hier von vornherein drei Möglichkeiten vor:

a) Die ∞^5 Curven werden durch eine endliche Gleichung und eine Differentialgleichung 5ter Ordnung bestimmt,

b) durch eine 1ter und eine 4ter Ordnung,

c) durch eine 2ter und eine 3ter Ordnung.

Jedesmal sind die betreffenden Gleichungensysteme der erweiterten Gruppe der Bewegungen invariant, da die Schar der ∞^5 Curven bei der Gruppe der Bewegungen invariant ist.

Fall a) ist wieder ausgeschlossen, da keine im Endlichen gelegene invariante Fläche existiert.

Im Fall b) ist die Differentialgleichung erster Ordnung nach Obigem die der *Minimalcurven.*

Im Fall c) kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung nur durch Constans-Setzen der Differentialinvariante zweiter Ordnung r gebildet werden, denn Nullsetzen aller 6-reihigen Determinanten würde ja entweder wieder die Differentialgleichung erster Ordnung der Minimalcurven oder aber zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung $y_2 = z_2 = 0$ liefern, was beides nicht erlaubt ist. Wir haben somit anzunehmen:

$$r = \text{Const.}$$

Dass wir die Differentialgleichung dritter Ordnung nicht durch Nullsetzen der Determinanten der Matrix erhalten, wissen wir schon. Deshalb ist diese Gleichung eine Relation zwischen den Differentialinvarianten bis zur dritten Ordnung. Nun ist aber $r = \text{Const.}$ und $\frac{dr}{ds} = 0$, sodass als einzige Invariante nur τ übrig bleibt. Mithin ist auch

$$\tau = \text{Const.}$$

Schraubenlinien.

Diese Curven sind *Schraubenlinien.*

Wir kommen zu den *Curven, die zwei infinitesimale Bewegungen gestatten*, also nach Satz 1 des vorigen Paragraphen vermöge der Gruppe der Bewegungen gerade je ∞^4 Lagen annehmen. Diese werden durch eine Differentialgleichung m^{ter} und eine n^{ter} Ordnung bestimmt, wenn

Curve, die zwei inf. Beweggn gestattet

$$m + n = 4$$

ist. Es ergeben sich hier wieder drei Möglichkeiten:

a) Die ∞^4 Curven sind durch eine endliche Gleichung und eine Differentialgleichung 4ter Ordnung bestimmt,

b) durch eine 1ter und eine 3ter Ordnung,

c) durch zwei Differentialgleichungen 2ter Ordnung.

Fall a) ist wieder ausgeschlossen.

Fall b) giebt wieder *Minimalcurven.*

Im Fall c) können die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht durch Constans-Setzen von Differentialinvarianten hervorgehen, da es ja nur eine Differentialinvariante zweiter Ordnung giebt. Es sind vielmehr alle 6-reihigen Determinanten gleich Null zu setzen. Dies giebt entweder den ausgeschlossenen Fall der Differentialgleichung der Minimalcurven oder aber die beiden Differentialgleichungen

$$y_2 = z_2 = 0$$

mit der Nebenbedingung

$$1 + y_1^2 + z_1^2 \not\equiv 0,$$

d. h. die *Geraden* des Raumes, die keine Minimalgeraden sind. Zwei Geraden, die keine Minimalgeraden sind, sind also congruent, wie wir schon wissen.

Endlich mag eine *Curve drei infinitesimale Bewegungen zulassen.* Sie nimmt dann insgesamt ∞^3 verschiedene Lagen an. Diese werden durch eine Differentialgleichung erster und eine zweiter Ordnung definiert werden, deren erste die der *Minimalcurven* ist.

Curve, die drei inf. Beweggn. gestattet.

Also ergiebt sich, wenn wir alles zusammenfassen, der

Gesamtergebnis.

Satz 2: *Zwei Curven im Raume, die keine Minimalcurven sind und bei denen r den Krümmungsradius, s die Bogenlänge, τ die Torsion bezeichne, sind dann und nur dann mit einander congruent, wenn entweder bei beiden dieselben Relationen:*

$$r = \text{Const.}, \quad \frac{d\tau}{ds} = f(\tau) \quad (\tau \neq \text{Const.}),$$

oder bei beiden dieselben Relationen:

$$\frac{dr}{ds} = f(r), \quad \tau = \psi(r) \quad (r \neq \text{Const.}),$$

oder beiden dieselben Relationen

$$r = \text{Const.}, \quad \tau = \text{Const.}$$

bestehen, oder endlich beide Geraden sind.

§ 4. Congruenzkriterien der Minimalcurven.

Es bleibt nun nur noch die Untersuchung der *Minimalcurven* übrig, die durch die Differentialgleichung

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0$$

oder

$$(14) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

definiert sind. Für sie verlieren die Differentialinvarianten r, τ u. s. w. ihre Bedeutung, wegen der Art, wie $\sqrt{1 + y_1^2 + z_1^2}$ in ihnen auftritt. Aber wir wissen auch, dass die Minimalcurven die einzigen sind, für die wir noch eine Invariantentheorie zu entwickeln haben. Bisher hat man eine solche Theorie noch nicht gegeben. Indem wir sie hier aufstellen, *füllen wir also eine wesentliche Lücke in der bisherigen Krümmungstheorie der Raumcurven aus. Wir geben ja überhaupt, wie nochmals betont werden möge, die Krümmungstheorie in einer solchen Form, dass sie ebenso für die imaginären Curven wie für die reellen Curven gilt.*

Wir könnten unter der Voraussetzung, dass

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0$$

und, wie durch nochmalige Differentiation folgt,

$$y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

u. s. w. gesetzt wird, also Relationen zwischen den Grössen $y_1, y_2 \ldots$, $z_1, z_2 \ldots$ hergestellt werden, die die Elimination der einen Hälfte derselben gestattet, die Invarianten der erweiterten Gruppe berechnen und damit eine Congruenztheorie der Minimalcurven schaffen. Aber diese Methode ist unbequem und nicht elegant.

Wir schlagen einen anderen Weg ein.

Gleichungen einer Minimalcurve.

Es ist, wenn längs einer Minimalcurve

$$x = \alpha(s), \quad y = \beta(s)$$

gesetzt und damit eine Grösse s als Hülfsveränderliche eingeführt wird, wegen

$$dz = i\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

auch

$$z = i\int\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}\,ds.$$

Legendre bemerkte zuerst, dass man diese Formeln für beliebige Minimalcurven durch andere ersetzen kann, die kein Integralzeichen, sondern nur Differentiationszeichen enthalten. Enneper und Weierstrass gaben alsdann diesen Formeln die zweckmässige Gestalt:

$$(15)\qquad \begin{cases} x = (1 - s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s), \\ iy = (1 + s^2)F''(s) - 2sF'(s) + 2F(s), \\ z = 2sF''(s) - 2F'(s), \end{cases}$$

wobei allerdings zu bemerken ist, dass die Genannten nie explicite über Minimalcurven reden und mit diesem Begriffe überhaupt nicht operieren. Diese Formeln geben den allgemeinen Ausdruck für eine beliebige Minimalcurve, wenn F irgend eine Function des Parameters s bedeutet, — aber mit einer Ausnahme: Die Minimal*geraden* sind in dieser Form nicht mit inbegriffen. Es geht dies aus folgenden Bemerkungen hervor:

Die Tangente der Curve (15) wird in Punkte (s) bestimmt durch

$$(16)\qquad \frac{dx}{dz} = \frac{1 - s^2}{2s}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1 + s^2}{2is}.$$

Wenn umgekehrt eine beliebige Minimalcurve vorliegt, *die keine Gerade ist*, so kann angenommen werden, dass bei ihr $\frac{dx}{dz}$ variiert. Es kann dann insbesondere $\frac{dx}{dz} = \frac{1 - s^2}{2s}$ gesetzt werden, unter s eine Hülfsveränderliche verstanden. Aus der Gleichung (14) folgt dann auch der vorstehende Wert von $\frac{dy}{dz}$. z wird längs der Curve eine Function von s sein, also auch dz. Indem man dann $\frac{dz}{ds}$ gleich einer Function $2F''(s)$ setzt, kommt man rückwärts zu den Formeln (15). Bei einer Minimal*geraden* jedoch ist diese Überlegung nicht richtig. Somit sind in der Form (15) alle Minimalcurven mit Ausnahme der Minimalgeraden dargestellt.

Minimalgeraden.

Nun spielen bei unserem Problem die *Minimalgeraden* überhaupt eine Ausnahmerolle. Die Minimalgeraden sind die Geraden nach dem imaginären Kugelkreis. Eine Bewegung führt offenbar jede Minimalgerade wieder in eine solche über. Da die Gruppe der Bewegungen die Punkte des Kugelkreises in allgemeinster Weise dreigliedrig unter einander transformiert (vgl. das Beispiel S. 549 zu § 5 des 19. Kap.),

so lässt sich durch Bewegung jede Minimalgerade so transformieren, dass sie die Richtung irgend einer anderen Minimalgeraden erhält. Weil ferner die Gruppe der Bewegungen alle Translationen enthält, so folgt, dass sie jede Minimalgerade in jede andere überzuführen vermag. *Die* ∞^3 *Minimalgeraden, die durch die Differentialgleichungen*

$$1 + y_1^2 + z_1^2 = 0,$$
$$y_2 = z_2 = 0$$

definiert sind, sind mithin sämtlich mit einander, aber mit keiner anderen Curve congruent.

Deshalb können wir weiterhin von ihnen absehen. Künftig verstehen wir unter einer Minimalcurve stets eine solche, die keine Gerade ist, die wir uns also in der Form (15) vorgelegt denken können.

Die Gleichungen (16) bestimmen die Richtung der Tangente der Minimalcurve (15) im Punkte (s). Diese Tangente ist eine Minimalgerade, sie trifft den Kugelkreis in einem gewissen Punkte. Mithin, da ihre Richtung nur von s, nicht auch von der Function F abhängt, können wir *s als die Coordinate eines Punktes des Kugelkreises* deuten. Ferner sind die Coefficienten von x, y, z in der Gleichung der Schmiegungsebene der Minimalcurve im Punkte (s) der Curve proportional den Determinanten der Matrix

Deutung von s.

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{matrix} \right\|,$$

also proportional

$$1 - s^2, \quad -i(1 + s^2), \quad 2s,$$

sodass die Gleichung der Schmiegungsebene*), wie man weiterhin findet, so lautet:

$$(17) \qquad (1 - s^2)\mathfrak{x} - i(1 + s^2)\mathfrak{y} + 2s\mathfrak{z} = -4F(s),$$

wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ laufende Coordinaten bezeichnen. Diese Ebene enthält zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Minimalcurve, also zwei unendlich nahe Minimalgeraden und berührt deshalb den Kugelkreis in dem soeben mit der Coordinate s belegten Punkt des Kugelkreises. Ihre Gleichung ist bekannt, sobald die Werte von s und $F(s)$ bestimmt gegeben sind. Wir können daher *s und F als die Coordinaten einer Tangentialebene des Kugelkreises* auffassen. Die Schnittgerade der

Deutung von s und F.

*) Diese Darstellung der Schmiegungsebene sowie die folgende Deutung der Grössen s und F rührt von Lie her (vgl. Math. Ann. Bd. 14).

Schmiegungsebene (17) mit der benachbarten, d. h. die Minimalgerade, welche die Minimalcurve (15) im Punkte (s) berührt, erfüllt die Gleichung (17) und die aus ihr durch Differentiation nach s hervorgehende Gleichung

$$s\mathfrak{x} + is\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = 2F'(s),$$

ist also bekannt, wenn die Werte von s, F, F' bestimmt gegeben sind. *Daher sind s, F, F' als die Coordinaten einer Minimalgeraden aufzufassen.* Obgleich wir oben die Minimalgeraden für sich behandelt haben, wollen wir daher später (S. 704) noch einmal darauf zurückkommen, indem wir s, F, F' als ihre Coordinaten auffassen.

Deutung von s, F, F'.

Stellt man zwischen s, F, F' zwei Relationen her, deren eine F als Function von s definiert:

$$F = F(s),$$

während die andere lautet:

$$F' = \frac{dF}{ds},$$

so werden dadurch aus der Schar aller ∞^3 Minimalgeraden (s, F, F') gerade solche ∞^1 herausgegriffen, die eine abwickelbare Fläche bilden, deren Rückkehrkante die Minimalcurve (15) ist; und umgekehrt erhält man so jede Minimalcurve.

Nach diesen streng genommen für unser Problem nicht notwendigen, aber interessanten Deutungen der in die Gleichungen (15) eingehenden Grössen s, F, F' kommen wir zur Entwickelung der Theorie für die Congruenz von Minimalcurven.

Die Gruppe der Bewegungen führt jede Minimalcurve wieder in eine solche über, da sie ihre Differentialgleichung (14) invariant lässt. Die Minimalcurve (15), deren Punktcoordinaten durch s, $F(s)$ und die Ableitungen ausgedrückt sind, wird also durch eine Bewegung wieder in eine Minimalcurve übergeführt, deren Punktcoordinaten analog durch s_1, $F_1(s_1)$ und die Ableitungen ausgedrückt seien. s, F sind die Coordinaten einer Tangentialebene des Kugelkreises. Die Bewegung führt sie wieder in eine Tangentialebene (s_1, F_1) des Kugelkreises über. Mithin sind s_1 und $F_1(s_1)$ gewisse Functionen von s, $F(s)$. Da ferner s allein Coordinate eines Punktes des Kugelkreises ist, so ist s_1 eine Function von s allein. Wir werden übrigens nachher direct verificieren, dass s_1 nur von s, nicht auch von F abhängt.

Transformationen von s und F

Zu jeder Transformation T_a der Gruppe der Bewegungen gehört hiernach eine Transformation T_a von s und F. Diese bilden wieder eine *Gruppe* und mit $T_a T_b = T_c$ ist auch $\mathsf{T}_a \mathsf{T}_b = \mathsf{T}_c$. Beide Gruppen

Gruppe in s, F.

sind eben isomorph, wie aus der begrifflichen Auffassung hervorgeht wie auch aus Satz 36, § 5 des 19. Kap.

Berechnung der Gruppe in s, F.

Wir wollen nun diese Gruppe in s, F aufsuchen. Es genügt, ihre infinitesimalen Transformationen zu bestimmen. Um die Incremente von s und F bequem berechnen zu können, ziehen wir aus (15) zunächst durch Elimination von F' und F''' die Formel

$$F = \frac{s^2-1}{4}x + \frac{s^2+1}{4}iy - \frac{s}{2}z,$$

die auch aus (17) abzuleiten ist. Sie giebt:

$$\delta F = \left(\frac{s}{2}x + \frac{s}{2}iy - \frac{1}{2}z\right)\delta s + \frac{s^2-1}{4}\delta x + \frac{s^2+1}{4}i\delta y - \frac{s}{2}\delta z.$$

Nach (15) hat der in der Klammer stehende Ausdruck den Wert F'. Es kommt also

$$\delta F = F'\delta s + \frac{s^2-1}{4}\delta x + \frac{s^2+1}{4}i\delta y - \frac{s}{2}\delta z. \tag{18}$$

Wenn wir ferner

$$\frac{dx}{dz} \equiv x', \quad \frac{dy}{dz} \equiv y'$$

setzen, so ist bekanntlich

$$\begin{cases} \delta x' \equiv \dfrac{d\delta x}{dz} - x'\dfrac{d\delta z}{dz}, \\ \delta y' \equiv \dfrac{d\delta y}{dz} - y'\dfrac{d\delta z}{dz}. \end{cases} \tag{19}$$

Überdies haben wir schon oben in (16) gefunden:

$$x' = \frac{1-s^2}{2s}, \quad y' = \frac{1+s^2}{2is}. \tag{20}$$

Daher ist

$$x' + iy' = \frac{1}{s} \tag{21}$$

und weiter

$$\delta s = -s^2(\delta x' + i\delta y'). \tag{22}$$

Gehen wir nun von einer infinitesimalen Translation p, q oder r aus. Bei ihr sind nach (19) die Incremente $\delta x'$ und $\delta y'$ gleich Null, sodass nach (22) auch $\delta s = 0$ wird. Dies folgt übrigens auch begrifflich daraus, dass die Translationen jeden Punkt (s) des Kugelkreises in Ruhe lassen. Aus (18) folgt nun:

$$\delta F = \frac{s^2-1}{4}\delta x + \frac{s^2+1}{4}i\delta y - \frac{s}{2}\delta z.$$

Bei p ist $\delta x = \delta t$, $\delta y = \delta z = 0$, also

$$\delta F = \frac{s^2 - 1}{4} \delta t.$$

Bei q kommt

$$\delta F = \frac{s^2 + 1}{4} i \delta t,$$

bei r:

$$\delta F = -\frac{s}{2} \delta t,$$

sodass wir aus p, q, r die drei infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe in s, F abgeleitet haben:

$$\frac{s^2 - 1}{4} \frac{\partial f}{\partial F} \qquad \frac{s^2 + 1}{4} i \frac{\partial f}{\partial F} \qquad -\frac{s}{2} \frac{\partial f}{\partial F}.$$

Gehen wir von der infinitesimalen Rotation $yp - xq$ aus, so giebt (19)

$$\delta x' = y' \delta t, \quad \delta y' = -x' \delta t,$$

also (22):

$$\delta s = i s^2 (x' + i y') \delta t$$

oder nach (21):

$$\delta s = i s \delta t.$$

Die Formel (18) giebt nun:

$$\delta F = \left(i F' s + \frac{s^2 - 1}{4} y - \frac{s^2 + 1}{4} i x \right) \delta t.$$

Setzen wir hierin die Werte (15) von x und y ein, so heben sich die Glieder mit F' und F'', wie es sein muss, identisch fort und es kommt:

$$\delta F = i F \delta t.$$

Analog kommt bei $zq - yr$ zunächst nach (19):

$$\delta x' = x' y' \delta t, \quad \delta y' = (1 + y'^2) \delta t,$$

also nach (22) und (20):

$$\delta s = \frac{1 - s^2}{2} i \delta t,$$

daher nach (18), wenn darin schliesslich für y und z ihre Werte aus (15) eingesetzt werden:

$$\delta F = -i s F \delta t.$$

Endlich giebt $xr - zp$ ganz entsprechend

$$\delta s = \frac{1 + s^2}{2} \delta t, \quad \delta F = s F \delta t.$$

Die drei infinitesimalen Rotationen liefern also die folgenden infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe in s, F:

$$is\frac{\partial f}{\partial s} + iF\frac{\partial f}{\partial F}$$
$$\frac{1-s^2}{2}i\frac{\partial f}{\partial s} - isF\frac{\partial f}{\partial F}$$
$$\frac{1+s^2}{2}\frac{\partial f}{\partial s} + sF\frac{\partial f}{\partial F}.$$

Damit ist die gesuchte Gruppe gefunden. Sie kann offenbar bequemer so geschrieben werden:

$$(23)\quad \left|\begin{array}{llll} & \dfrac{\partial f}{\partial F} & s\dfrac{\partial f}{\partial F} & s^2\dfrac{\partial f}{\partial F} \\ \dfrac{\partial f}{\partial s} & & s\dfrac{\partial f}{\partial s} + F\dfrac{\partial f}{\partial F} & s^2\dfrac{\partial f}{\partial s} + 2sF\dfrac{\partial f}{\partial F}. \end{array}\right.$$

Abbildung d. Minimalcurven in der Ebene.

Jeder Relation zwischen s und F entspricht eine Minimalcurve, denn durch eine solche Relation wird F als Function von s definiert, für welche die Gleichungen (15) eine Minimalcurve liefern. Durch Einführung der Bestimmungsgrössen s, F wird also jede Minimalcurve des Raumes in eine Curve der Ebene mit den gewöhnlichen Coordinaten s, F abgebildet. Zwei verschiedenen Minimalcurven entsprechen zwei verschiedene Curven der Ebene, und umgekehrt. Führt man auf die Minimalcurven alle Bewegungen aus, so entsprechen diesen Transformationen in der Bildebene (s, F) die Transformationen der soeben bestimmten Gruppe (23). Zwei Minimalcurven sind dann und nur dann congruent, wenn ihre Bildcurven vermöge einer Transformation der Gruppe (23) in einander überführbar sind. Dabei ist jedoch von den Geraden $s = \text{Const.}$ in der (s, F)-Ebene ganz abzusehen, denn sie besitzen keine Gleichung von der Form $F = F(s)$.

Differentialinv. der Gruppe in s, F.

Um die Äquivalenztheorie für die Curven bei der Gruppe (23) zu entwickeln, haben wir zunächst die *Differentialinvarianten* dieser Gruppe aufzustellen. Dazu erweitern wir die infinitesimalen Transformationen der Gruppe um die Incremente, die F', F''... erfahren, indem wir uns der bekannten Formel

$$\delta F^{(n)} \equiv \frac{d\delta F^{(n-1)}}{ds} - F^{(n)}\frac{d\delta s}{ds}$$

bedienen. Wir brauchen, da die Gruppe sechsgliedrig ist, die Erweiterung nach der zu Anfang des ersten Paragraphen vorausgeschickten Bemerkung nur bis zu F^{VI} vorzunehmen. Die erweiterte Gruppe lautet dann:

$$\frac{\partial f}{\partial F}$$

$$s\frac{\partial f}{\partial F} + \frac{\partial f}{\partial F'}$$

$$s^2\frac{\partial f}{\partial F} + 2s\frac{\partial f}{\partial F'} + 2\frac{\partial f}{\partial F''}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$s\frac{\partial f}{\partial s} + F\frac{\partial f}{\partial F} - F''\frac{\partial f}{\partial F''} - 2F'''\frac{\partial f}{\partial F'''} - 3F^{\mathrm{IV}}\frac{\partial f}{\partial F^{\mathrm{IV}}} - 4F^{\mathrm{V}}\frac{\partial f}{\partial F^{\mathrm{V}}} - 5F^{\mathrm{VI}}\frac{\partial f}{\partial F^{\mathrm{VI}}}$$

$$\begin{aligned} s^2\frac{\partial f}{\partial s} + 2sF\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial F'} &+ \\ + (2F' - 2sF'')\frac{\partial f}{\partial F''} - 4sF'''\frac{\partial f}{\partial F'''} &- \\ - (4F''' + 6sF^{\mathrm{IV}})\frac{\partial f}{\partial F^{\mathrm{IV}}} &- \\ - (10F^{\mathrm{IV}} + 8sF^{\mathrm{V}})\frac{\partial f}{\partial F^{\mathrm{V}}} &- \\ - (18F^{\mathrm{V}} + 10sF^{\mathrm{VI}})\frac{\partial f}{\partial F^{\mathrm{VI}}}&. \end{aligned}$$

Setzen wir diese infinitesimalen Transformationen gleich Null, so liegt ein gerade 6-gliedriges vollständiges System in 8 Veränderlichen $s, F, F' .. F^{\mathrm{VI}}$ vor, denn die 6-gliedrige Determinante der Coefficienten von $s, F, F' .. F^{\mathrm{IV}}$ hat den nicht verschwindenden Wert $8F'''^2$. Nach unserem allgemeinen Theorem 29, § 4 des 16 Kap., ist

$$F''' \equiv 0$$

eine invariante Differentialgleichung, und zwar die einzige, die sich durch Nullsetzen von Determinanten ergiebt. Das vollständige System besitzt zwei von einander unabhängige Lösungen. Sie enthalten nur F''', F^{IV}, F^{V}, F^{VI} und erfüllen die beiden Differentialgleichungen:

$$Af \equiv 2F''' \frac{\partial f}{\partial F'''} + 3F^{IV} \frac{\partial f}{\partial F^{IV}} + 4F^{V} \frac{\partial f}{\partial F^{V}} + 5F^{VI} \frac{\partial f}{\partial F^{VI}} = 0,$$

$$Bf \equiv 2sF''' \frac{\partial f}{\partial F'''} + (2F''' + 3sF^{IV}) \frac{\partial f}{\partial F^{IV}} + (5F^{IV} + 4sF^{V}) \frac{\partial f}{\partial F^{V}} + \\ + (9F^{V} + 5sF^{VI}) \frac{\partial f}{\partial F^{VI}} = 0.$$

Es ist hier $(AB) = 0$. Die beiden Differentialgleichungen bilden also ein vollständiges System. Die erste Gleichung besitzt offenbar die Lösungen:

$$u \equiv \frac{F^{IV}}{F'''^{\frac{3}{2}}}, \quad v \equiv \frac{F^{V}}{F'''^{\frac{4}{2}}}, \quad w \equiv \frac{F^{VI}}{F'''^{\frac{5}{2}}}.$$

Verstehen wir also unter f eine Function von u, v, w allein, so nimmt $Bf = 0$ die Gestalt an:

$$2\frac{\partial f}{\partial u} + 5u\frac{\partial f}{\partial v} + 9v\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

und besitzt folglich die Lösungen

$$J_5 \equiv \frac{4F'''F^{V} - 5F^{IV^2}}{F'''^3},$$

$$J_6 \equiv \frac{4F'''^2F^{VI} - 18F'''F^{IV}F^{V} + 15F^{IV^3}}{F'''^{\frac{9}{2}}}.$$

Dies also sind die beiden niedrigsten Differentialinvarianten. Die höheren ergeben sich, wie wir wissen, aus diesen beiden durch Differentiation:

$$J_7 \equiv \frac{dJ_6}{dJ_5}, \quad J_8 \equiv \frac{dJ_7}{dJ_5}, \cdots.$$

Hiernach hat sich ergeben:

Invariante Diffgln.

Die Gruppe (23) lässt folgende Differentialgleichungen invariant: Erstens die *dritter* Ordnung

$$F''' = 0,$$

dann die fünfter Ordnung:

$$J_5 = \text{Const.},$$

ferner alle sechster Ordnung von der Form

$$J_6 - \varphi(J_5) = 0$$

u. s. w.

Eine Minimalcurve wird durch eine Relation, die F als Function von s ausdrückt, dargestellt. *Gestattet sie keine infinitesimale Bewegung,* so nimmt sie nach Satz 1 des § 2 bei der Gruppe der Bewegungen gerade ∞^6 verschiedene Lagen an, deren Gesamtheit bei der Gruppe invariant ist. Dasselbe gilt von den ∞^6 Bildcurven in der (s, F)-Ebene. Sie erfüllen eine invariante Differentialgleichung sechster Ordnung, die nach Obigem, da bei ihnen J_5 nicht constant ist, weil $J_5 = \text{Const.}$ nur ∞^5 Curven bestimmt, die Form haben muss

Minimalcurve, die keine inf. Bewegung gestattet.

$$J_6 - \varphi(J_5) = 0.$$

Zwei Minimalcurven also, die keine infinitesimale Bewegung gestatten, sind dann und nur dann congruent, wenn bei beiden J_6 dieselbe Function von J_5 ist.

Gestattet eine Minimalcurve gerade eine infinitesimale Bewegung, so nimmt sie insgesamt bei der Gruppe der Bewegungen ∞^5 verschiedene Lagen an, nach Satz 1 des § 2. Der Inbegriff dieser ist invariant, entsprechend der Inbegriff der ∞^5 Bildcurven in der (s, F)-Ebene bei unserer Gruppe (23). Diese ∞^5 Curven werden daher durch eine invariante Differentialgleichung fünfter Ordnung definiert, die nach Obigem notwendig die Form hat:

Minimalcurve, die eine inf. Bewegung gestattet.

$$J_5 = \text{Const.}$$

Für diese Curven ist $J_6 \equiv 0$, denn es ist allgemein*)

$$J_5 \equiv \frac{1}{F'''^{\frac{1}{2}}} \frac{dJ_5}{ds}.$$

Zwei Minimalcurven also, die gerade eine infinitesimale Bewegung zulassen, sind dann und nur dann congruent, wenn bei beiden J_5 denselben constanten Wert besitzt.

Gestattete eine Minimalcurve gerade zwei infinitesimale Bewegungen, so würden die ∞^4 Bildcurven der ∞^4 Minimalcurven, in die sie nach Satz 1 des § 2 bei der Gruppe der Bewegungen übergehen müsste, durch eine bei der Gruppe (23) invariante Differentialgleichung vierter Ordnung bestimmt. Da es aber eine solche nicht giebt, so folgt: Es giebt keine Minimalcurve, die zwei und nur zwei von einander unabhängige infinitesimale Bewegungen zulässt.

Minimalcurve, die zwei inf. Bewegung gestattet.

*) Bei dieser Gelegenheit bemerken wir, dass wir uns die Aufsuchung von J_6 hätten ersparen können. Sobald man nämlich drei invariante Differentialgleichungen kennt, kann man nach einem Satze von Lie eine Differentialinvariante ohne jede Integration finden. Hier kennen wir schon die drei invarianten Differentialgleichungen $F''' = 0$, $J_5 = 0$ und $\frac{dJ_5}{ds} = 0$. Aus ihnen lässt sich nach dem erwähnten Satze J_6 ohne Integration ableiten.

Liesse endlich eine Minimalcurve gerade drei infinitesimale Bewegungen zu, so würden wir durch dasselbe Raisonnement auf die Differentialgleichung

$$F''' = 0$$

geführt, aus der folgt:

$$F \equiv a + bs + cs^2,$$

wenn a, b, c Constanten bedeuten. Diese Function F aber giebt, in (15) eingesetzt, $x =$ Const., $y =$ Const., $z =$ Const., d. h. keine Curven, sondern die Punkte des Raumes, die bei der Definition der Minimalcurven als Rückkehrkanten der Developpabeln, die den Kugelkreis enthalten, zu den Minimalcurven gehören. Dass die Punkte des Raumes eine invariante Schar bilden, ist allerdings trivial.

Weitere Fälle kommen nun nicht in Betracht, da es keine niederen invarianten Differentialgleichungen giebt. Wir haben also gefunden:

Gesamtergebnis.

Theorem 41: *Setzt man, wenn F die Function $F(s)$ in den allgemeinen Gleichungen*

$$x = (1 - s^2)F''(s) + 2sF'(s) - 2F(s),$$
$$iy = (1 + s^2)F''(s) - 2sF'(s) + 2F(s),$$
$$z = 2sF''(s) - 2F'(s)$$

einer Minimalcurve bedeutet,

$$J_5 \equiv \frac{4F'''F^{\mathrm{V}} - 5F^{\mathrm{IV}^2}}{F'''^3},$$

$$J_6 \equiv \frac{1}{F'''^{\frac{1}{2}}} \frac{dJ_5}{ds},$$

so sind zwei Minimalcurven dann und nur dann einander congruent, wenn

entweder bei beiden dieselbe Relation

$$J_6 - \varphi(J_5) \equiv 0 \quad (J_5 \not\equiv \text{Const.})$$

besteht

oder bei beiden J_5 denselben constanten Wert hat.

Zwei Minimalgeraden sind einander stets congruent.

Andere Behandlung der Minimalgeraden.

Was die Minimalgeraden anbetrifft, so wollen wir noch bemerken: Wir können, wie wir auseinandersetzten, s, F, F' als die Coordinaten dieser ∞^3 Geraden auffassen. Diese Coordinaten werden bei der Gruppe der Bewegungen durch die einmal erweiterte Gruppe (23), nämlich durch die Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial F} \qquad s\frac{\partial f}{\partial F} + \frac{\partial f}{\partial F'} \qquad s^2\frac{\partial f}{\partial F} + 2s\frac{\partial f}{\partial F'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} \qquad s\frac{\partial f}{\partial s} + F\frac{\partial f}{\partial F} \qquad s^2\frac{\partial f}{\partial s} + 2sF\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial F'}$$

unter einander transformiert. Man zeigt sofort, dass diese Gruppe in s, F, F' zwei Wertsysteme (s, F, F') stets ineinander überzuführen vermag. Damit wäre ein zweiter Beweis dafür erbracht, dass die Minimalcurven sämtlich congruent sind.

Noch Einiges möge über die in Theorem 41 ebenfalls als Ausnahme auftretende Classe von Minimalcurven gesagt werden, für die J_5 constant ist. Wir integrieren die Differentialgleichung

Minimalcurven $J_5 = \text{Const.}$

$$J_5 = 8c \tag{24}$$

oder

$$4F'''F^{\text{V}} - 5F^{\text{IV}^2} = 8cF'''^3 \tag{24'}$$

zunächst unter der besonderen Annahme $c = 0$. Im Fall $c = 0$ lässt sie sich so schreiben:

$$4\frac{F^{\text{V}}}{F^{\text{IV}}} - 5\frac{F^{\text{IV}}}{F'''} = 0$$

und daher sofort integrieren. Es kommt:

$$F'''^{-\frac{1}{4}} = \text{Const.}\, s + \text{Const.},$$

also

$$F = \frac{1}{as+b} + As^2 + Bs + C \quad (a \neq 0),$$

wenn a, b, A, B, C die Integrationsconstanten sind. Setzen wir diesen Wert F in die Gleichungen (15) der Minimalcurven ein, so ergeben sich, wenn man schliesslich $\frac{1}{as+b}$ als Parameter t einführt, die ∞^5 einander congruenten Curven:

$$\left\{\begin{aligned} x &= -6t + 6bt^2 + 2(a^2-b^2)t^3 + 2(A-C),\\ iy &= +6t - 6bt^2 + 2(a^2+b^2)t^3 + 2(A+C),\\ z &= +6at^2 - 4abt^3 - 2B,\end{aligned}\right. \tag{25}$$

also Curven dritter Ordnung. Man kann übrigens zeigen, dass dies *alle Minimalcurven dritter Ordnung* sind.

Minimalcurven 3ter Ordn.

Im Falle $c \neq 0$ führt die Integration der Differentialgleichung (24) oder (24') zu einem wesentlich anderen Ergebnis. Zunächst lässt sich

(24') als Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen F''' und s auffassen. Sie liefert*):

$$F''' = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2c(s-\alpha)^2(s-\beta)^2},$$

wenn α, β die Integrationsconstanten bedeuten, die jedoch nicht einander gleich gewählt werden dürfen, denn sonst käme der oben besprochene triviale Fall $F''' = 0$. Einige Quadraturen geben nun

$$\begin{aligned} F = -\frac{1}{2c}\Big\{&(s-\alpha)\lg(s-\alpha) + (s-\beta)\lg(s-\beta) + \\ &+ \frac{1}{\alpha-\beta}\Big[(s-\alpha)^2\lg(s-\alpha) - (s-\beta)^2\lg(s-\beta)\Big] + \\ &+ As^2 + Bs + C\Big\}, \end{aligned}$$

wenn A, B, C Constanten bedeuten. Setzen wir diesen Wert in die Gleichungen (15) der Minimalcurven ein, so kommt:

$$(26)\quad \begin{cases} x = -\frac{1}{c}\left\{\frac{-(\alpha+\beta)s^2 + 2(1+\alpha\beta)s - (\alpha+\beta)}{2(s-\alpha)(s-\beta)} + \frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}\lg\frac{s-\alpha}{s-\beta} + A - C\right\}, \\ y = \quad \frac{i}{c}\left\{\frac{(\alpha+\beta)s^2 + 2(1-\alpha\beta)s - (\alpha+\beta)}{2(s-\alpha)(s-\beta)} + \frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta}\lg\frac{s-\alpha}{s-\beta} + A + C\right\}, \\ z = -\frac{1}{c}\left\{\frac{s^2 - \alpha\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\lg\frac{s-\alpha}{s-\beta} - B\right\}. \end{cases}$$

Wird hierin c, d. h. J_5, bestimmt gewählt, so liegen ∞^5 einander congruente Minimalcurven vor, die sonst mit keiner Curve congruent sind. Um die Gestalt dieser Curven zu erkennen, brauchen wir nur eine von den ∞^5 zu betrachten, da sie alle einander congruent sind. Setzen wir also z. B.

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad A = -\frac{i\pi}{4}, \quad C = \frac{i\pi}{4}, \quad B = 0,$$

so kommt:

$$x = -\frac{1}{c}\left(\lg\frac{s-1}{s+1} - \frac{i\pi}{2}\right),$$

$$y = \frac{i}{c}\frac{2s}{s^2-1}, \quad z = -\frac{1}{c}\frac{s^2+1}{s^2-1}.$$

Hier ist aber

$$y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}.$$

---

*) Leser, welche die „Diffgln. m. inf. Trf.“ kennen, werden die Integration mit Hülfe der dort im 24. Kap. auseinandergesetzten Methoden leisten, indem sie bedenken, dass diese Differentialgleichung zwischen F''' und s die dreigliedrige Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial s} \qquad s\frac{\partial f}{\partial s} - 2F'''\frac{\partial f}{\partial F'''} \qquad s^2\frac{\partial f}{\partial s} - 4sF'''\frac{\partial f}{\partial F'''}$$

gestattet, die von unserer erweiterten Gruppe übrigbleibt, wenn die Incremente von s und F''' allein ins Auge gefasst werden.

Mithin ist dies eine Minimalcurve, die auf einem Rotationscylinder liegt, eine *Minimal-Schraubenlinie.* Dies tritt noch mehr in Augenschein, wenn man einen neuen Parameter t einführt, sodass

Minimal-Schraubenlinie.

$$\frac{2is}{s^2-1} = \cos t, \quad -\frac{s^2+1}{s^2-1} = \sin t$$

wird, denn dann kommt:

$$(27) \qquad x = -\frac{i}{c}t, \quad y = \frac{\cos t}{c}, \quad z = \frac{\sin t}{c}.$$

Auf jedem Rotationscylinder liegen offenbar ∞^1 congruente Minimal-Schraubenlinien. Im ganzen giebt es ∞^5 solche Cylinder. Unter ihnen sind ∞^4 einander congruent. Wir erhalten durch diese Abzählung also, wie es sein muss, wieder ∞^5 einander congruente Minimal-Schraubenlinien. Bei der Schraubenlinie (27) und also auch bei allen Curven (26) ist der Radius r des Rotationscylinders gleich $\frac{1}{c}$:

$$r = \frac{1}{c},$$

also nach (24)

$$J_5 = \frac{8}{r}.$$

Diese Bemerkung gestattet uns, J_5 für eine *beliebige* Minimalcurve geometrisch zu deuten. Es lässt sich nämlich zunächst durch vier consecutive Punkte einer gegebenen Minimalcurve eine Minimal-Schraubenlinie legen. Denn nach den Gleichungen (15) der Minimalcurve drücken sich die Coordinaten dieser vier Punkte durch s_0, F_0, F_0' . . F_0^{V} aus, wenn s_0 der zum ersten Punkte gehörige Wert von s ist. Wenn man nun eine Function $\bar{F}(s)$ so wählt, dass $\bar{F}$, $\bar{F}'$ . . $\bar{F}^{\text{V}}$ für $s = s_0$ die Werte F_0, F_0' . . F_0^{V} annehmen und überdies $\bar{F}$ der Differentialgleichung (24) unterwirft, nachdem darin $\bar{F}$ für F gesetzt worden, so wird dadurch $\bar{F}$ ebenso wie die Zahl c vollkommen bestimmt. Die sich ergebende Function $\bar{F}$ setzen wir statt F in (15) ein. Die Gleichungen (15) stellen alsdann die Minimal-Schraubenlinie dar, die mit der gegebenen Minimalcurve an der Stelle (s_0) vier consecutive Punkte gemein hat. Sie liegt auf einem Rotationscylinder mit dem Radius $\frac{1}{c}$. Hieraus folgern wir, da $8c$ der Wert von J_5 an der Stelle (s_0) der Minimalcurve ist:

Geometr. Deutung von J_5.

Satz 3: *Die in Theorem 41 mit J_5 bezeichnete Grösse ist gleich dem achtfachen reciproken Wert des Radius des Rotationscylinders, der mit der*

Minimalcurve an der betreffenden Stelle (s) *vier consecutive Punkte gemein hat**).

Die Stellen der Minimalcurve, an denen $J_5 = 0$ ist, sind singulär. Daselbst giebt es keine dreifach berührende Minimal-Schraubenlinie, sondern eine dreifach berührende Minimalcurve 3. Ordnung.

Betrachten wir schliesslich fünf consecutive Punkte einer Minimalcurve. Durch die vier ersten geht ein Rotationscylinder mit dem Radius r, durch die vier letzten ein solcher mit dem Radius $r + dr$. Die Axen beider seien unter dem Winkel $d\vartheta$ zu einander geneigt. Offenbar ändert $\frac{d\vartheta}{dr}$ sich nicht bei Ausführung einer Bewegung, dies ist also eine Differentialinvariante. Zu ihrer Bestimmung sind fünf consecutive Curvenpunkte nötig, die sich nach (15) durch $s_0, F_0, F_0' .. F_0^{VI}$ ausdrücken. Daher ist $\frac{d\vartheta}{dr}$ eine Differentialinvariante sechster Ordnung in s und F, also eine Function von J_5 oder r und J_6. Mithin ist J_6 *eine gewisse Function von* r *und* $\frac{d\vartheta}{dr}$. Auf ihre nähere Bestimmung gehen wir nicht weiter ein.

Deutung von J_6.

Weitere Ausblicke.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen sind auch für gewisse reelle Gebilde practisch wichtig.

Einerseits nämlich lassen sich nach einem Theorem von Lie aus jeder Minimalcurve ∞^3 einander congruente durch Translation in einander überführbare *reelle Minimalflächen* ableiten. Umgekehrt erhält man so alle reellen Minimalflächen. Jede Bewegung einer Minimalcurve giebt somit eine (unendlich vieldeutige) reelle Transformation der reellen Minimalflächen.

Wenn man andererseits jeden Punkt (x, y, z) des Raumes durch einen Kreis in der (x, y)-Ebene mit dem Radius iz ersetzt, so geben die Bewegungen des Raumes alle Berührungstransformationen in der Ebene, die Kreise in Kreise und parallele Geraden in parallele Geraden überführen. Bei dieser Abbildung giebt jede Minimalcurve eine Schar von Kreisen, deren Umhüllende eine sogenannte *Richtungscurve* ist. Mit dem Obigen ist also ein wichtiges Äquivalenzproblem für diese Richtungscurven gelöst.

Endlich machen wir noch darauf aufmerksam, dass man in entsprechender Weise, wie wir es hier gethan haben, die Theorie der Äquivalenz der Minimalcurven gegenüber der allgemeinen zehngliedrigen Gruppe von conformen Punkttransformationen behandeln kann. Alsdann tritt an die Stelle der oben benutzten Gruppe in s, F eine Gruppe in s, F, F'. Deutet man s, F wieder als Punktcoordinaten in der Ebene, so wird dies die allgemeine zehngliedrige Gruppe von Berührungstransformationen in der Ebene (vgl. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, zweiter Abschnitt,

---

*) Diese geometrische Deutung hat Scheffers gegeben.

bearb. u. Mitw. v. Engel, Theorem 77, S. 460). Es lassen sich ganz entsprechend ihre Differentialinvarianten aufstellen und Äquivalenzkriterien entwickeln.

Wir gehen aber hier auf alle diese weiteren Probleme nicht ein.

§ 5. Congruenztheorie der Flächen.

Weniger ausführlich, aber doch in allem wesentlichen vollständig wollen wir nunmehr das Problem der Congruenz der Flächen behandeln. Wir bedürfen dabei wieder der Differentialinvarianten der Gruppe der Bewegungen, aber jetzt sind dies andere Differentialinvarianten als früher.

Erweiterung der Gruppe d. Beweggn.

Da wir nämlich nicht mehr Curven, sondern Flächen betrachten wollen, so haben wir etwa z als Function von x und y zu betrachten und die Gruppe der Bewegungen um die Transformationen zu erweitern, welche die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y bei ihr erfahren. Setzen wir allgemein

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv t,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \equiv a, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \equiv b, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \equiv c, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \equiv d,$$

so erhalten wir die Incremente, welche p, q u. s. w. bei den infinitesimalen Bewegungen erfahren, in dieser Weise: Es ist

$$dz \equiv p dx + q dy,$$

also

$$d\delta z \equiv \delta p \cdot dx + \delta q \cdot dy + p d\delta x + q d\delta y. \tag{28}$$

Bei einer infinitesimalen Bewegung sind δx, δy, δz bekannte Functionen von x, y, z. Vorstehende Gleichung zerfällt also, da immer $dz \equiv p dx + q dy$ zu setzen ist, in zwei einzelne, da sie für alle Werte von dx, dy identisch bestehen muss. Sie liefert also δp und δq. Analog erhalten wir aus den Formeln

$$dp \equiv r dx + s dy, \quad dq \equiv s dx + t dy$$

diese:

$$\begin{cases} d\delta p \equiv \delta r \cdot dx + \delta s \cdot dy + r d\delta x + s d\delta y, \\ d\delta q \equiv \delta s \cdot dx + \delta t \cdot dy + s d\delta x + t d\delta y \end{cases} \tag{29}$$

und hieraus die Incremente von r, s, t u. s. w. Wir verzichten darauf, die Ausrechnung anzugeben. Durch Hinzufügung der Incremente der p, q, r, s, t u. s. w. zu den infinitesimalen Bewegungen und Nullsetzen

ihrer Symbole ergiebt sich ein vollständiges System, dessen Lösungen die gesuchten *Differentialinvarianten* sind. Wir wollen annehmen, die infinitesimale Bewegung

Differential-invarianten.

$$\xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z} \quad (i = 1, 2 \,..\, 6)$$

habe durch die Erweiterung die Form erhalten:

$$\xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z} + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p} + \varkappa_i \frac{\partial f}{\partial q} + \varrho_i \frac{\partial f}{\partial r} + \sigma_i \frac{\partial f}{\partial s} + \tau_i \frac{\partial f}{\partial t} +$$
$$+ \alpha_i \frac{\partial f}{\partial a} + \beta_i \frac{\partial f}{\partial b} + \gamma_i \frac{\partial f}{\partial c} + \delta_i \frac{\partial f}{\partial d} + \cdots$$
$$(i = 1, 2 \,..\, 6).$$

Die unabhängigen Veränderlichen des vollständigen Systems sind $x, y, z, p, q, r, s, t \ldots$. Da die sechsreihigen Determinanten der Matrix

$$(30) \qquad \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i & \pi_i & \varkappa_i & \varrho_i & \sigma_i & \tau_i \\ & & & i = 1, 2 \,..\, 6 & & & & \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwinden, so ist das System gerade sechsgliedrig und besitzt $8 - 6 = 2$ von einander unabhängige Lösungen, die keine höheren als die zweiten Differentialquotienten von z enthalten. Diese Lösungen können als die bekannten Ausdrücke der Krümmungsradien R_1 und R_2 einer Fläche gewählt werden, denn es ist klar, dass diese bei jeder Bewegung invariant bleiben. Ferner giebt es $12 - 6 = 6$ Differentialinvarianten dritter Ordnung. R_1 und R_2 sind selbst welche. Ausser ihnen giebt es also noch vier. Man kann einsehen, dass es die Ausdrücke

$$\frac{\partial R_1}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial s_2}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial s_2}$$

sind, wenn ds_1, ds_2 die Bogenelemente der Krümmungslinien in einem Flächenpunkte mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 sind. Nun kann es allerdings vorkommen, dass diese Ausdrücke der Differentialinvarianten bei gewissen Flächen ihren Sinn verlieren. Aber es existiert doch jedenfalls die gefundene Anzahl von Differentialinvarianten, mögen sie auch unter Umständen nicht die angegebene geometrische Deutung besitzen.

Wir wollen die Differentialinvarianten dritter Ordnung kurz mit J_1, J_2, J_3, J_4 bezeichnen. Relationen zwischen den Differentialinvarianten stellen stets invariante Differentialgleichungen dar.

Endlich bemerken wir noch, dass sich durch Nullsetzen aller sechsreihigen Determinanten der Matrix (30) sowie der bis zu höheren

Differentialquotienten reichenden Matricen gewisse einzeln invariante Gleichungensysteme ergeben werden*).

Wir gehen nach diesen Vorbemerkungen an unser Problem der Congruenz von Flächen.

Führen wir auf eine Fläche alle Bewegungen aus, so geht sie in höchstens ∞^6 verschiedene Flächen über. Nach Satz 1, § 2 dieses Kap., geht sie in gerade ∞^{6-n} verschiedene Flächen über, wenn sie gerade n von einander unabhängige infinitesimale Bewegungen zulässt.

Alle Flächen, in die eine Fläche bei der Gruppe der Bewegungen übergeht, bilden eine bei der Gruppe invariante Schar. Sie wird durch ein System von partiellen Differentialgleichungen zwischen z und x, y definiert sein, und dieses System bleibt invariant gegenüber der Gruppe der Bewegungen.

Diffglu. congruenter Flächen.

Genügen die Flächen der Differentialgleichung

$$\Omega(x, y, z, p, q, r, s, t \dots) = 0,$$

so genügen sie auch allen aus dieser durch partielle Differentiation nach x und y hervorgehenden Differentialgleichungen. Wir können uns daher alle Differentialgleichungen, denen unsere Flächenschar genügt, so geordnet denken, dass partielle Differentiation einer derselben nach x oder y immer nur nachfolgende Differentialgleichungen giebt. Bei dieser Anordnung werden einige von den niederen Differentialquotienten von z (z mit inbegriffen) durch keine Relation verknüpft sein. Doch müssen alle Differentialquotienten durch höchstens 6 derselben ausgedrückt sein. Denn wir können uns die Lösung z des Systems von Differentialgleichungen nach Potenzen von x, y etwa entwickelt denken, in deren Coefficienten dann die Differentialquotienten von z nach x und y für $x = y = 0$ auftreten. Da es höchstens ∞^6 Flächen in der Schar giebt, so dürfen von diesen Coefficienten höchstens 6 willkürlich wählbar sein.

---

*) Man wird wohl das Bedürfnis hegen, diesen invarianten Gleichungensystemen, die sich durch Nullsetzen von Determinanten der Matrix einer Gruppe ergeben, einen besonderen Namen beizulegen. Hierzu empfiehlt sich die Bezeichnung: *singuläres* Gleichungensystem. Aber im Text wollen wir diese Ausdrucksweise noch nicht anwenden. Die singulären invarianten Gleichungensysteme bestimmen im Raume der Veränderlichen der betreffenden Gruppe Mannigfaltigkeiten, die wir dementsprechend singuläre invariante Mannigfaltigkeiten nennen. Dabei leuchtet ein, dass eine singuläre invariante Mannigfaltigkeit in unendlich viele einzeln invariante Teilgebiete zerfallen kann. Im nächsten Kapitel wollen wir zur Vereinfachung des Ausdruckes die Bezeichnung: singulär in dem soeben angedeuteten Sinne benutzen.

Wenn aber die niedrigste Differentialgleichung von m^{ter} Ordnung ist, so sind alle niederen Differentialquotienten von z durchaus beliebig. Da aber bis zu denen zweiter Ordnung schon 6 vorhanden sind, nämlich z, p, q, r, s, t, so folgt, *dass die niedrigste Differentialgleichung von höchstens dritter Ordnung sein muss.*

Keine Diffgl. von erster od. zweiter Ordnung.

Sei zunächst die Schar der Flächen, in die eine bei allen Bewegungen übergeht, durch *keine Differentialgleichung von niederer als dritter Ordnung* definiert. Alsdann sind es gerade ∞^6 Flächen und keine der Flächen gestattet eine infinitesimale Bewegung. Die dritten Differentialquotienten a, b, c, d müssen dann aber sämtlich durch die niederen ausdrückbar sein, weil sonst noch einige willkürlich wären, die Schar also aus noch mehr als ∞^6 Flächen bestände. Es existieren also dann *vier Differentialgleichungen dritter Ordnung.* Da ihre Differentiation nach x und y auch alle höheren Differentialquotienten durch die niederen ausgedrückt giebt, so sehen wir, dass das ganze System von Differentialgleichungen nur aus den vieren von dritter Ordnung und den durch Differentiation aus ihnen hervorgehenden besteht, dass also die vier Differentialgleichungen dritter Ordnung die Flächenschar völlig bestimmen. Sie bilden ein invariantes Gleichungensystem in x, y, z, p, q, r, s, t, a, b, c, d. Es wäre zunächst denkbar, dass das System Gleichungen enthält, die durch Nullsetzen aller sechsreihigen Determinanten der Matrix

$$\left| \begin{matrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i & \pi_i & \varkappa_i & \varrho_i & \sigma_i & \tau_i & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i & \delta_i \\ & & & & & i = 1,\, 2\,..\,6 & & & & & & \end{matrix} \right|$$

hervorgehen. Aber schon die gleich Null gesetzten Determinanten der kleineren Matrix (30) liefern Relationen zwischen den ersten und zweiten Differentialquotienten allein, was im vorliegenden Falle auszuschliessen ist. Mithin ist das gesuchte invariante Gleichungensystem durch vier Relationen zwischen den Differentialinvarianten zweiter und dritter Ordnung herzustellen. Sie haben notwendig die Form:

$$J_j = \varphi_j(R_1,\, R_2) \quad (j = 1,\, 2,\, 3,\, 4). \tag{31}$$

Umgekehrt definieren vier solche Differentialgleichungen auch genau ∞^6 Flächen.

Zwei Flächen, die nicht einer der sich nachher ergebenden besonderen Kategorien angehören, sind also dann und nur dann congruent, wenn bei ihnen dieselben vier Relationen (31) bestehen.

Diffgln. zweiter Ordnung.

Es möge nun zweitens das System der Differentialgleichungen, die unsere Schar congruenter Flächen darstellen, zwar *Differential-*

gleichungen zweiter Ordnung, aber keine erster Ordnung enthalten. Es bilden dann — wie stets — die Differentialgleichungen niederster, also hier die der zweiten Ordnung, für sich ein invariantes Gleichungensystem. Es wäre nun denkbar, dass dasselbe ganz oder teilweis durch Nullsetzen der sechsreihigen Determinanten der Matrix (30) hervorginge. Wir können diesen Fall, wenn wir weitläufige Rechnungen umgehen wollen, so erledigen:

Erster Fall.

In diesem Falle wären z, p, q durch keine Relation gebunden. Wir könnten also das betrachtete Wertsystem der x, y, z, p, q, r, s, t, das ja ein krummes Flächenelement bis zu den infinitesimalen Grössen zweiter Ordnung bestimmt, in der speciellen Form wählen, dass $x = y = z = 0$ und auch $p = q = 0$ ist, d. h. dass das Element im Anfangspunkt die (x, y)-Ebene berührt. Es bleiben dann als Bewegungen nur die Drehungen um die z-Axe übrig. Es müsste also, wenn eine invariante Gleichung zweiter Ordnung durch Nullsetzen der Determinanten hervorginge, bei der infinitesimalen Drehung $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$ das betrachtete krumme Flächenelement in Ruhe bleiben. Aber hier liefert die Formel (28) wegen $\delta x = y\delta t$, $\delta y = -x\delta t$, $\delta z = 0$ sofort:

$$\delta p = q\delta t, \quad \delta q = -p\delta t,$$

ferner kommt aus (29)

$$\delta r = 2s\delta t, \quad \delta s = (t-r)\delta t, \quad \delta t = -2s\delta t.$$

Eine Verwechselung von t mit dem t in δt, der infinitesimalen Constanten, ist wohl nicht zu befürchten. Wir haben also das bei der infinitesimalen Transformation

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial p} - p\frac{\partial f}{\partial q} + 2s\frac{\partial f}{\partial r} + (t-r)\frac{\partial f}{\partial s} - 2s\frac{\partial f}{\partial t}$$

invariante krumme Flächenelement zu bestimmen, bei dem $x = y = z = p = q = 0$ ist. Bei ihm muss offenbar

$$s = 0, \quad r - t = 0$$

sein. Also ist es das Flächenelement eines *Nabelpunktes*. Die im vorliegenden Falle zu betrachtenden Flächen müssen also lauter Nabelpunkte besitzen. Sie sind daher bekanntlich Kugeln oder Developpabeln, die den imaginären Kugelkreis enthalten. Bei letzteren aber wäre die Differentialgleichung erster Ordnung

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

erfüllt, von der wir jedoch nach Voraussetzung absehen müssen. Mithin sind die hier betrachteten Flächen *Kugeln*. Bekanntlich ist ein

Kugeln.

allgemeines krummes Flächenelement (x, y, z, p, q, r, s, t) das eines Nabelpunktes, sobald

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}$$

ist. Dies sind also im vorliegenden Falle *Differentialgleichungen zweiter Ordnung* der Flächenschar. Ihre Differentiation liefert alle Differentialquotienten dritter Ordnung ausgedrückt durch die niederen. Also treten keine höheren Differentialgleichungen als wesentlich neu hinzu, wohl aber *noch eine zweiter Ordnung.* Denn eine Kugel nimmt bei allen Bewegungen nur ∞^3 Lagen an, da sie drei von einander unabhängige infinitesimale Bewegungen gestattet. Unsere Flächenschar besteht also aus nur ∞^3 Flächen. Lägen nur die obigen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor, so blieben z, p, q und etwa s willkürlich, d. h. es wären ∞^4 Flächen vorhanden. Die also noch fehlende Differentialgleichung zweiter Ordnung kann nun nicht durch Nullsetzen von Determinanten entstanden sein. Sie ist daher eine Relation zwischen den Invarianten R_1 und R_2, die wegen der beiden ersten Gleichungen einander gleich werden, sodass sich $R_1 = R_2 =$ Const. ergiebt. Die gesuchte dritte Differentialgleichung kann also symmetrisch so geschrieben werden:

$$R_1 R_2 = \text{Const.}$$

In Worten: Zwei Kugeln sind congruent, wenn ihre Krümmung dieselbe ist.

Zweiter Fall.

Wir kommen jetzt zu dem Fall, dass die Flächenschar zwar auch durch Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung und keine erster definiert sei, dass sich aber die Differentialgleichungen zweiter Ordnung weder ganz noch teilweise durch Nullsetzen von Determinanten der Matrix (30) ergeben. Sie müssen Relationen zwischen den Differentialinvarianten R_1, R_2 sein. Es kann also hier höchstens zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung geben.

Liegen wirklich zwei vor, so haben sie notwendig die Form

$$R_1 = a, \quad R_2 = b,$$

in der a und b zwei Constanten bedeuten. Aber zwei solche Differentialgleichungen zweiter Ordnung widersprechen sich, sobald nicht $a = b$ ist. $a = b$ jedoch führt zu $R_1 = R_2$, d. h. wieder zu den schon besprochenen Kugeln.

Wenn nur eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vorliegt, so hat sie die Form:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0. \tag{32}$$

Wir kommen also zu den *Weingarten'schen Flächen* *). Liegen ausserdem *vier Differentialgleichungen dritter Ordnung* vor, die notwendig die Form

Weingarten'sche Flächen.

$$(33) \qquad J_j = \varphi_j(R_1, R_2) \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

haben müssen **), so erhalten wir, da nur z, p, q und zwei der Grössen r, s, t beliebig bleiben, nur ∞^5 Flächen. Jede dieser Flächen gestattet daher nach Satz 1, § 2 dieses Kap., eine infinitesimale Bewegung. Wenn umgekehrt eine Fläche gerade eine infinitesimale Bewegung gestattet, so sind ihre Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft und es liegt dieser Fall vor. Zwei solche Flächen sind also congruent, wenn bei beiden dieselben Relationen (32) und (33) bestehen. Zwei der letzteren folgen durch Differentiation aus (32).

Sodann ist anzunehmen, dass ausser

$$\Omega(R_1, R_2) = 0$$

nur *drei Differentialgleichungen dritter Ordnung* vorkommen. Weniger sind nicht denkbar, da sich sonst mehr als ∞^6 Flächen ergeben. Hier giebt es dann gerade ∞^6 Flächen. Keine derselben gestattet also eine infinitesimale Bewegung. Zwei Differentialgleichungen dritter Ordnung gehen durch Differentiation aus $\Omega = 0$ hervor. Die dritte ist also eine Relation

$$\Phi(J_1, J_2, J_3, J_4, R_1, R_2) = 0,$$

die übrigens, da $\Omega = 0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$ die drei Invarianten R_2, J_3, J_4 etwa durch die übrigen auszudrücken gestatten, auch einfach

$$\Phi(J_1, J_2, R_1) = 0$$

geschrieben werden kann. Differentiation giebt alle vierten Differentialquotienten ausgedrückt durch die niederen ***).

Endlich käme der Fall, dass die *Differentialgleichungen* der Schar congruenter Flächen auch welche *erster Ordnung* enthalten. Da nun

Diffgln. erster Ordnung.

*) Siehe Weingarten, Crelle's Journal Bd. 59.

**) Sie können nämlich nicht durch Nullsetzen von Determinanten der Matrix hervorgehen, da dies auch Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also die schon erledigten Kugeln geben würde.

***) Wir bemerken beiläufig: Wenn eine Differentialgleichung

$$\Omega(R_1, R_2) = 0$$

zu integrieren ist, so scheint es naturgemäss, zunächst solche Gleichungen

$$\Phi\left(\frac{\partial R_1}{\partial s_1}, \frac{\partial R_1}{\partial s_2}, R_1\right) = 0$$

zu suchen, dass das System $\Omega = 0$, $\Phi = 0$ gemeinsame Integralflächen besitzt.

keine Differentialinvariante erster Ordnung existiert, so müsste jede solche Gleichung durch Nullsetzen aller fünfreihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i & \pi_i & \varkappa_i \\ & (i = 1, 2 \,..\, 6) & & & \end{vmatrix}$$

hervorgehen. Dies liefert aber die Gleichung

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

die alle den Kugelkreis enthaltenden Developpabelen darstellt. Jede solche Fläche ist die *Developpabele einer Minimalcurve.* Zwei solche Flächen sind congruent, wenn es ihre Rückkehrkanten, diese Minimalcurven, sind. Für die Minimalcurven aber haben wir eine vollständige Congruenztheorie schon im vorigen Paragraphen aufgestellt.

Developp. von Minimalcurven.

Die Gruppe der Bewegungen besitzt, wie hier anhangsweise bemerkt werden mag, noch andere Differentialinvarianten als die in diesem Kapitel betrachteten. Man kann insbesondere eine Grösse f einführen, die nicht transformiert werden soll, d. h. man kann zur Gruppe der Bewegungen in x, y, z noch die Gleichung $f' = f$ hinzufügen und sodann die Differentialinvarianten von der Form

$$\Omega\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \cdots, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \cdots\right)$$

aufsuchen. Diese Differentialinvarianten sind zugleich Differentialparameter, da $\delta f = 0$ ist. Sie geben, sobald f eine Differentialinvariante ist, wieder eine Differentialinvariante. Man kommt hier zu Differentialinvarianten, die u. a. in der Theorie der Orthogonalsysteme oder in der Mechanik auftreten.

Kapitel 23.

Über die Invariantentheorie der ganzen Functionen und über die allgemeine Theorie der Differentialinvarianten beliebiger Gruppen.

Schon oben bemerkten wir, dass zu jeder durch Differentialgleichungen definierten continuierlichen Gruppe Differentialinvarianten gehören. Wie in den im vorigen Kapitel gegebenen Beispielen giebt es sogar mehrere Reihen von Differentialinvarianten, je nach den Gebilden, die man im Raume der Veränderlichen ins Auge fasst. In jedem einzelnen Falle kann man noch die Frage nach den Äquivalenzkriterien zweier Gebilde stellen, und es ist uns, wie in jenen Beispielen, möglich, allgemein geltende Kriterien zu geben.

In der Geschichte der Mathematik ist, kann man wohl sagen, die von Gauss und Minding begründete, von Späteren, wie Weingarten, Christoffel und Lipschitz weiter entwickelte *Deformationstheorie* das erste Beispiel einer Invariantentheorie und zwar bei einer gewissen *unendlichen* Gruppe*). Auch die von Beltrami und Lamé betrachteten *Differentialparameter* sind Differentialinvarianten von Gruppen.

Das zweite Beispiel ist die *Invariantentheorie der Formen* gegenüber der linearen homogenen Gruppe, die nach Vorarbeiten von Boole durch Cayley begründet wurde und zu deren Aufbau namentlich Sylvester, Aronhold, Hermite, Clebsch, Gordan und Hilbert beigetragen haben. Diese Theorie ist nämlich, wenn man sie auf allgemeine analytische Functionen bez. Gleichungen anwendet, eine Theorie von *Differential*invarianten. Beschränkt man sich auf algebraische Gebilde, so vereinfacht sie sich allerdings zu einer Invariantentheorie der Veränderlichen einer Gruppe allein, nicht ihrer Differentialquotienten. Immerhin aber sind die *Differentialparameter*, die in der Theorie der Formen auftreten, wirkliche *Differential*invarianten.

Die nächste Invariantentheorie ist die von Lie 1872 entwickelte Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen.

Auch die schon längst begründete *Krümmungstheorie der Curven und Flächen* gehört zu den Differentialinvarianten-Theorien. Wenn wir sie oben nicht als Beispiel aufgezählt haben, so liegt das darin, dass man sich dieser Auffassung bisher nicht bewusst gewesen ist. Wir haben aber im vorigen Kapitel diese Theorie als eine solche der Differentialinvarianten der Gruppe der Bewegungen vollständig entwickelt.

Im gegenwärtigen Kapitel wollen wir zunächst die *Cayley'sche Invariantentheorie der Formen* in der gekennzeichneten Auffassung besprechen. Dabei ist unser Hauptzweck, zu zeigen, dass dieselben allgemeinen gruppentheoretischen Gesichtspunkte, von denen aus wir sie behandeln, auch für andere Gruppen analoge Theorien geben. Die Ergebnisse sind selbstverständlich nicht neu, aber die Form ihrer Ableitung dürfte es teilweise sein.

Alsdann werden wir zum Schlusse des Kapitels für die *Aufstellung allgemeiner Invariantentheorien* bei vorgelegter Gruppe die massgebenden Gesichtspunkte in Kürze andeuten.

---

*) Siehe Lie, *Über Differentialinvarianten.* Math. Ann. Bd. 24.

§ 1. Allgemeines über die Invariantentheorie der binären Formen.

Liegt eine r-gliedrige Gruppe in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ vor:

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n, e_1 \ldots e_r) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

und giebt es eine bei der Gruppe invariante Schar von — sagen wir ∞^m — Mannigfaltigkeiten, so werden diese ∞^m Mannigfaltigkeiten durch die Transformationen T_e der Gruppe unter einander vertauscht. Da die Mannigfaltigkeiten von m wesentlichen Parametern $a_1 \ldots a_m$ abhängen, finden ihre Vertauschungen bei Ausführung der Transformation T_e der gegebenen Gruppe ihren Ausdruck in gewissen Transformationen der Wertsysteme $(a_1 \ldots a_m)$:

$$a_k' = \psi_k(a_1 \ldots a_m, e_1 \ldots e_r) \quad (k = 1, 2 \ldots m).$$

Zu jeder Transformation T_e der gegebenen Gruppe gehört eine solche Transformation S_e der Parameter $a_1 \ldots a_m$. Die Gleichungen der S_e enthalten ausser $a_1 \ldots a_m$ noch die r willkürlichen Constanten $e_1 \ldots e_r$, die in den endlichen Gleichungen der gegebenen Gruppe auftreten, d. h. die Parameter der Gruppe, die aber nicht mit den Parametern $a_1 \ldots a_m$ der Schar von Mannigfaltigkeiten verwechselt werden dürfen. Man erkennt nun aus der begrifflichen Auffassung unmittelbar, dass mit

$$T_e T_{e'} = T_{e''}$$

auch

$$S_e S_{e'} = S_{e''}$$

Gruppe der Parameter.

ist. Die Transformationen $S_e \ldots$ bilden daher eine *Gruppe*, die *Gruppe der Parameter* $a_1 \ldots a_m$. (Siehe Satz 36, § 5 des 19. Kap.)

Wir haben dies in § 1 des 10. Kap. für den Fall ausführlich dargestellt, dass die gegebene Gruppe nur zwei Veränderliche enthält. Aber diese Beschränkung ist bei den damaligen Betrachtungen so unwesentlich, dass wir ohne weiteres die dortigen Ergebnisse, insbesondere die dort angegebene Methode der Berechnung der infinitesimalen Transformationen der neuen Gruppe, verallgemeinern können. Wir wollen dabei ausdrücklich daran erinnern, dass die r Parameter der gegebenen Gruppe in der neuen Gruppe der Parameter der Schar nicht sämtlich als wesentlich aufzutreten brauchen. *Die Gruppe der Parameter der Schar von Mannigfaltigkeiten kann vielmehr auch weniger als r-gliedrig sein.* Aber sie ist stets (meroëdrisch) isomorph auf die gegebene Gruppe bezogen.

Äquivalenz von Mannigfaltigkeiten.

Wenn es sich nun darum handelt zu entscheiden, *ob und wann zwei Mannigfaltigkeiten der betrachteten Schar vermöge einer Transformation der gegebenen Gruppe in einander überführbar sind* oder, wie wir

kurz sagen, ob sie mit einander *äquivalent* sind, so kommt dies auf ein von uns schon erledigtes Fundamentalproblem zurück. Deuten wir nämlich $a_1 \ldots a_m$ als Coordinaten in einem Raume R_m von m Dimensionen, so wird jede der ∞^m Mannigfaltigkeiten durch einen Punkt $(a_1 \ldots a_m)$ in diesem Raume dargestellt, und umgekehrt. Die Gruppe der Parameter der Schar stellt dann eine Gruppe von (höchstens ∞^r) Transformationen der Punkte des R_m dar. Unsere Frage kommt mithin auf die hinaus, ob und wann zwei Punkte des R_m vermöge dieser Gruppe in einander überführbar sind. Um dies zu entscheiden haben wir nach § 4 des 16. Kap. die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten in diesem R_m, denen die betreffenden Punkte angehören, zu berechnen. Ein Punkt geht vermöge der Gruppe des R_m nur in Punkte der ihm zugehörigen kleinsten invarianten Mannigfaltigkeit im R_m über. Einem Punkt allgemeiner Lage des R_m erteilt die Gruppe der Parameter eine gewisse Anzahl von einander unabhängiger Fortschreitungsrichtungen. Für Punkte specieller Lage können sich weniger ergeben. Wir finden diese Punkte bekanntlich durch Nullsetzen aller Determinanten gleicher Reihenzahl der Matrix der Gruppe. Dadurch werden invariante Gleichungensysteme gefunden, die wir wie schon in einer Fussnote S. 711 *singulär* nennen wollen. Die Punkte, deren Coordinaten a_0, $a_1 \ldots a_m$ diese singulären Gleichungensysteme erfüllen, heissen entsprechend *singuläre Punkte*. Jeder singuläre Punkt stellt eine *singuläre Mannigfaltigkeit* in der Schar aller ∞^m zu betrachtenden dar, d. h. eine, die mehr infinitesimale Transformationen der vorgelegten Gruppe gestattet, als die allgemeine Mannigfaltigkeit der Schar. Wenn letztere gar keine infinitesimale Transformation der gegebenen Gruppe gestattet, so gestatten die singulären mindestens eine.

Singuläre Mannigfaltigkeit.

Man sieht, dass das angeregte Problem nur eine andere Fassung eines früher erledigten ist. Wir werden aber doch an einem wichtigen Beispiele zeigen, wie sich die Ausführung des entwickelten Gedankenganges darstellt. Dabei sei noch bemerkt, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe der Parameter $a_1 \ldots a_m$ der invarianten Schar ohne Integration direct gefunden werden können, sobald die endlichen Gleichungen der vorgelegten Gruppe bekannt sind.

Vom Standpunkt der Gruppentheorie aus bietet das in Rede stehende Problem, wie gesagt, keine Schwierigkeiten dar und ist in allem wesentlichen längst erledigt. Aber man kann in bezug auf die auftretenden Functionen beschränkende Voraussetzungen machen und dadurch unter Umständen functionentheoretischen Schwierigkeiten begegnen. Denn wenn man allgemeine analytische Functionen zulässt, ist bei allen Operationen stillschweigend immer ein solcher Bereich

zu begrenzen, in dem sie sich regulär und eindeutig verhalten. So lange man über die Functionen nichts näheres weiss, kann man auch hierüber nicht hinaus gehen. Sobald aber nur gewisse Arten von Functionen, etwa nur algebraische, auftreten, erhebt sich ein neues *rein algebraisches* Problem, für die Ergebnisse im ganzen Raume R_m allgemein gültige Formeln zu finden. Insbesondere stellt sich dann das algebraische Problem, die den Punkten des R_m zugeordneten kleinsten invarianten und irreducibelen Mannigfaltigkeiten in unzweideutiger Weise darzustellen.

Aber alle diese Fragen sind, obgleich sie bedeutende Schwierigkeiten machen können, nicht solche, die der Gruppentheorie angehören.

In dem in diesem und dem folgenden Paragraphen zu gebenden wichtigen Beispiel nun bieten sich derartige algebraische Schwierigkeiten dar. Es ist nicht unsere Sache, auf diese genauer einzugehen. Vielmehr legen wir das Gewicht darauf, zu zeigen, welches die leitenden gruppentheoretischen Gesichtspunkte bei dem betreffenden Problem sind oder doch sein sollten.

Lin. homog. Gruppe.

Wir wollen ausgehen von der viergliedrigen *linearen homogenen Gruppe* in zwei Veränderlichen x, y:

$$(1) \qquad x' = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y,$$

deren Determinante mit $\varDelta$ bezeichnet sei:

$$\varDelta \equiv \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0.$$

Binäre Form.

Wir wollen die Transformationen der Gruppe auf alle *binären Formen* ausüben. Unter einer binären Form versteht man bekanntlich eine homogene ganze rationale Function in zwei Veränderlichen x, y. Es ist augenscheinlich, dass jede binäre Form bei linearer homogener Transformation der Veränderlichen wieder in eine binäre Form übergeht.

Man kann nach allen Transformationen in x, y fragen, die jede binäre Form wieder in eine solche überführen, und deren inverse Transformationen ebenfalls diese Eigenschaft haben. Da x, y selbst binäre Formen sind, so sieht man leicht, dass bei einer derartigen Transformation die neuen Veränderlichen x', y' binäre Formen der alten sein müssen, und umgekehrt. Dies ist aber nur dann möglich, wenn x', y' linear und homogen in x, y sind, wie in (1).

Die Schar aller binärer Formen ist zwar der Gruppe (1) gegenüber invariant, aber sie hängt von einer *unendlichen* Anzahl von Parametern ab. Doch lässt sich unser Problem der Äquivalenz binärer Formen gegenüber der linearen homogenen Gruppe auf das Eingangs skizzierte Problem zurückführen:

Binäre Form n^{ten} Grades.

Einerseits nämlich bemerkt man, dass eine binäre Form n^{ten} Grades

$$\varphi \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n$$

durch lineare homogene Transformation stets wieder in eine binäre Form desselben Grades übergeht. Wir können uns deshalb auf die Betrachtung der binären Formen n^{ten} Grades beschränken, die nur von einer *endlichen* Anzahl von Parametern $a_0, a_1 \ldots a_n$ abhängen.

Andererseits sieht man, dass die Äquivalenz von *Formen* φ gegenüber der Gruppe (1) sich deckt mit der Äquivalenz von *Gleichungen*

$$\varphi = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n$$

zwischen x, y und φ gegenüber der Gruppe in x, y, φ, die aus der Gruppe (1) durch Hinzufügung von

$$\varphi' = \varphi$$

hervorgeht. Wir haben also thatsächlich eine Äquivalenzfrage von ∞^{n+1} Mannigfaltigkeiten im Raume der drei Coordinaten x, y, φ vor uns. Damit aber haben wir genau den Ausgangspunkt dieses Paragraphen erreicht.

Zu jeder linearen homogenen Transformation (1) gehört eine Transformation in $a_0, a_1 \ldots a_n$. Sie ist offenbar ebenfalls linear und homogen. Denn, wenn die Form φ vermöge (1) in

$$\varphi' \equiv a_0' x'^n + \binom{n}{1} a_1' x'^{n-1} y' + \binom{n}{2} a_2' x'^{n-2} y'^2 + \cdots + a_n' y'^n$$

übergeht, so muss umgekehrt wieder aus φ' die Form φ vermöge der zu (1) inversen Transformation

$$x = \frac{\beta_2}{\Delta} x' - \frac{\beta_1}{\Delta} y', \quad y = -\frac{\alpha_2}{\Delta} x' + \frac{\alpha_1}{\Delta} y'$$

hervorgehen. Setzen wir aber diese Werte x, y in φ ein, so kommt:

$$a_0 \left(\frac{\beta_2}{\Delta} x' - \frac{\beta_1}{\Delta} y'\right)^n + \cdots + a_n \left(-\frac{\alpha_2}{\Delta} x' + \frac{\alpha_1}{\Delta} y'\right)^n.$$

Wenn wir hierin die Klammern ausrechnen, dann nach Potenzen von x', y' ordnen und gliedweise mit φ' vergleichen, so übersehen wir, *dass* a_0', $a_1' \ldots a_n'$ *linear und homogen in* $a_0, a_1 \ldots a_n$ *sind.* Zugleich sehen wir, dass sich die endlichen Gleichungen der Gruppe der Parameter $a_0, a_1 \ldots a_n$ ohne jede Schwierigkeit ergeben.

Äquivalenz binärer Formen.

Deuten wir $a_0, a_1 \ldots a_n$ als gewöhnliche Coordinaten in einem Raume R_{n+1} von $n+1$ Dimensionen, so wird jede Form n^{ten} Grades φ durch einen Punkt $(a_0, a_1 \ldots a_n)$ des R_{n+1} dargestellt. *Zwei Formen sind dann und nur dann gegenüber der linearen homogenen Gruppe* (1) *äquivalent,* wenn ihre Bildpunkte im R_{n+1} durch eine Transformation

der Gruppe der Parameter $a_0, a_1 \cdot \cdot a_n$ in einander überführbar sind. Um dies zu entscheiden, ist nach § 4 des 16. Kap. die Zerlegung des R_{n+1} in lauter kleinste invariante Punktmannigfaltigkeiten zu bewirken. Dazu haben wir nach Theorem 29 jenes Paragraphen die Determinanten der Matrix der Gruppe der Parameter gleich Null zu setzen, sowie die eventuell vorhandenen Invarianten $J(a_0, a_1 \dots a_n)$ zu berechnen, die sich, wie stets, als *beliebige* Functionen einer gewissen *endlichen* Anzahl von Invarianten darstellen. Durch Nullsetzen der Determinanten der Matrix ergeben sich *singuläre Gebilde* und zu ihnen gehören *singuläre Formen.* Da eine allgemeine Form n^{ten} Grades keine infinitesimale lineare Transformation zulässt (sobald $n > 2$ ist), so sind diese singulären Formen als die gekennzeichnet, die bei mindestens einer infinitesimalen linearen homogenen Transformation in sich übergehen. Ferner die Invarianten der Gruppe der Parameter bestimmen sich, da diese Gruppe auch linear und homogen ist, aus vollständigen Systemen von linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten in $a_0, a_1 \dots a_n$ linear und homogen sind. Aber die Lösungen eines solchen Systems lassen sich bekanntlich immer bestimmen. Ihre Berechnung kann nur algebraische Schwierigkeiten machen.

Singuläre Formen.

Es ist dies eine Bemerkung, die für die ganze Invariantentheorie der binären, ternären u. s. w. Formen gilt: Alle in betracht kommenden Invarianten lassen sich rein algebraisch bestimmen.

Quadratische Form.

Fassen wir ein einfaches Beispiel ins Auge: Bei der *quadratischen Form*

$$\varphi \equiv a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2$$

lautet die Gruppe der Parameter, wie man sofort berechnet, so:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_0' = \frac{1}{\Delta^2}(\beta_2^2 a_0 - \alpha_2 \beta_2 a_1 + \alpha_2^2 a_2), \\ a_1' = \frac{1}{\Delta^2}(-2\beta_1\beta_2 a_0 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) a_1 - 2\alpha_1\alpha_2 a_2), \\ a_2' = \frac{1}{\Delta^2}(\beta_1^2 a_0 - \alpha_1\beta_1 a_1 + \alpha_1^2 a_2). \end{cases}$$

Wir können auch nach der in § 1 des 10. Kap. angegebenen Methode die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe (3) direct aus denen der Gruppe (1):

$$(1') \qquad yp \quad xp - yq \quad xq \quad xp + yq$$

berechnen. Wir haben danach zu setzen:

$$\delta\varphi \equiv 2(a_0 x\delta x + a_1(x\delta y + y\delta x) + a_2 y\delta y) + \\ + x^2\delta a_0 + 2xy\delta a_1 + y^2\delta a_2$$

und hierin unter δx, δy die Incremente bei einer der infinitesimalen Transformationen (1′) zu verstehen. Alsdann muss $\delta\varphi$ für alle Werte von x, y Null sein. Danach zerfällt $\delta\varphi = 0$ in drei von x, y freie Gleichungen zur Bestimmung von δa_0, δa_1, δa_2. Gehen wir z. B. von yp aus, so ist $\delta x = y\delta t$, $\delta y = 0$, also zu setzen:

$$2(a_0 xy + a_1 y^2)\delta t + x^2 \delta a_0 + 2xy\delta a_1 + y^2 \delta a_2 \equiv 0.$$

Hieraus folgt einzeln:

$$\delta a_0 = 0, \quad \delta a_1 = -a_0, \quad \delta a_2 = -2a_1.$$

In dieser Weise finden wir als infinitesimale Transformationen der Gruppe (3) der Parameter diese:

$$\begin{array}{lll}
 & -\ a_0 \dfrac{\partial f}{\partial a_1} & -2a_1 \dfrac{\partial f}{\partial a_2} \\
-2a_0 \dfrac{\partial f}{\partial a_0} & & +2a_2 \dfrac{\partial f}{\partial a_2} \\
-2a_1 \dfrac{\partial f}{\partial a_0} & -\ a_2 \dfrac{\partial f}{\partial a_1} & \\
-2a_0 \dfrac{\partial f}{\partial a_0} & -2a_1 \dfrac{\partial f}{\partial a_1} & -2a_2 \dfrac{\partial f}{\partial a_2}.
\end{array}$$

Die letzte infinitesimale Transformation erteilt dem Punkte (a_0, a_1, a_2) des gewöhnlichen Raumes R_3, in dem wir die quadratischen Formen als Punkte abbilden, die Fortschreitung längs des Radiusvectors des Punktes. Daraus folgt, dass die kleinste invariante Mannigfaltigkeit eines Punktes stets den Radiusvector des Punktes enthält, also ein Kegel ist. Dies wird durch die Berechnung verificiert: Die Gruppe besitzt keine Invariante, da die dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\left|\begin{array}{ccc}
0 & -a_0 & -2a_1 \\
-2a_0 & 0 & 2a_2 \\
-2a_1 & -a_2 & 0 \\
-2a_0 & -2a_1 & -2a_2
\end{array}\right|$$

nicht sämtlich identisch Null sind. Ihr Nullsetzen liefert den invarianten Kegel zweiten Grades

$$a_0 a_2 - a_1{}^2 = 0$$

als singuläres Gebilde. Alle zweireihigen Determinanten verschwinden nur für den Anfangspunkt, dessen Invarianz bekannt ist. Zwei quadratische Formen also, die nicht durch Punkte jenes Kegels dargestellt werden, sind stets in einander überführbar. Zwei solche, die durch Punkte des Kegels dargestellt werden, ebenfalls. Letztere sind wegen $a_0 a_2 - a_1{}^2 = 0$ die rein quadratischen Formen $(\sqrt{a_0}\,x + \sqrt{a_2}\,y)^2$. Bei

allen ∞^4 linearen homogenen Transformationen nimmt eine allgemeine quadratische Form nur ∞^3 Werte an. Sie gestattet daher eine infinitesimale lineare homogene Transformation. Dies ist übrigens auch anders leicht einzusehen. Die rein quadratischen Formen gestatten zwei unabhängige infinitesimale Transformationen.

Es kommen, wie sich zeigte, nur solche kleinste invariante Mannigfaltigkeiten in betracht, die aus Strahlen durch den Anfangspunkt bestehen, also durch homogene Gleichungen zwischen a_0, a_1, a_2 dargestellt werden. Diese aber sind durch ihren Schnitt mit der unendlich fernen Ebene völlig definiert.

In der unendlich fernen Ebene sind a_0, a_1, a_2 als *homogene* Coordinaten des Punktes aufzufassen, in dem der Strahl vom Anfangspunkt zum Punkt (a_0, a_1, a_2) des R_3 diese Ebene trifft. Statt also im Raume R_3 die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten zu suchen, können wir uns darauf beschränken, sie in der *Ebene* mit den *homogenen* Coordinaten a_0, a_1, a_2 aufzusuchen. Durch einen Punkt dieser Ebene werden dann die Form φ sowie alle Formen $\lambda\varphi$ dargestellt, in denen λ ein von x, y unabhängiger beliebiger Factor ist. Die Ersetzung des R_3 durch die Ebene kommt also darauf hinaus, dass man Formen, die sich nur um einen Zahlenfactor unterscheiden, als dieselben auffasst, sodass nur noch die Verhältnisse der Parameter a_0, a_1, a_2 in betracht kommen. Nebenbei bemerken wir, dass wir der hier betrachteten Gruppe schon öfters begegnet sind.

Die vorstehenden Auseinandersetzungen gelten nun auch für Formen beliebigen Grades:

$$\varphi \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n.$$

Die Gruppe der Parameter a_0, $a_1 \ldots a_n$ enthält alle Transformationen, die den Punkt $(a_0, a_1 \ldots a_n)$ im R_{n+1} mit den *gewöhnlichen* Coordinaten a_0, $a_1 \ldots a_n$ längs seines Radiusvectors fortführen. Denn bei der Transformation

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y$$

geht φ in $\lambda^{-n} \cdot \varphi$ über, sodass

$$a_0' = \lambda^{-n} a_0, \quad a_1' = \lambda^{-n} a_1, \ \ldots \ a_n' = \lambda^{-n} a_n$$

Invariante Mannigfaltigkeit von Strahlen.

wird. Deshalb werden auch hier *die Invarianten homogen von nullter Ordnung sein, die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten aus Strahlen durch den Anfangspunkt* bestehen und durch den Schnitt mit dem unendlich fernen Raume R_n von n Dimensionen bestimmt. Im R_n spielen

$a_0, a_1 \ldots a_n$ die Rolle von *homogenen* Coordinaten. Wir beeinträchtigen mithin die Allgemeinheit nicht, *wenn wir nur die Verhältnisse der Parameter* $a_0, a_1 \ldots a_n$ *als wesentlich auffassen.*

Äquivalenz von Gleichgn.

Es deckt sich das Äquivalenzproblem mit dem folgenden: Es wird gefragt, ob die *Gleichung* in x, y

$$\varphi \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n = 0$$

durch eine lineare homogene Transformation (1) in die Gleichung in x', y'

$$\varphi' \equiv a_0' x'^n + \binom{n}{1} a_1' x'^{n-1} y' + \cdots + a_n' y'^n = 0$$

überführbar ist. Da nämlich φ vermöge der fraglichen Transformation wieder in eine binäre Form n^{ten} Grades übergeht, so sind die beiden *Gleichungen* nur dann äquivalent, wenn die beiden *Formen* φ und φ' mit einander äquivalent sind.

Rationale Invariante.

Wir wollen einmal die Invarianten der Gruppe der Parameter ins Auge fassen, die *rational* sind. Jede solche wird sich als ein Quotient aus zwei ganzen Functionen darstellen, die vom selben Grade homogen sind:

$$J \equiv \frac{U}{V}.$$

Da die Gruppe der Parameter linear und homogen ist, so bleibt J bei einer Transformation S derselben in der Weise invariant, dass U wie auch V sich mit einem von den Parametern $a_0, a_1 \ldots a_n$ unabhängigen Factor ϱ reproduciert:

$$U' = \varrho U, \quad V' = \varrho V.$$

Der Factor ϱ hängt nur von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, den Parametern der Gruppe (1), ab. Da diese in den Gleichungen der Gruppe der Parameter, also in den Ausdrücken für $a_0', a_1' \ldots a_n'$ als Factoren in Form von Brüchen mit den Nennern Δ^n auftreten, deren Zähler vom n^{ten} Grade in $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sind, so erkennt man, dass, wenn U vom m^{ten} Grade in $a_0, a_1 \ldots a_n$ ist, ϱ eine rationale homogene Function vom $-nm^{\text{ten}}$ Grade in $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ mit dem Nenner Δ^{nm} ist.

Es giebt nun ∞^3 lineare homogene Transformationen, bei denen

$$\varrho(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = 1$$

ist. Sie bilden eine Untergruppe, da sie sämtlich U invariant lassen. Diese Gruppe hat offenbar paarweis inverse, die identische und infinitesimale Transformationen. Sie enthält aber nicht alle Transformationen

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y,$$

denn bei *allen* diesen kann ϱ nicht gleich Eins bleiben, da hier $\alpha_1 = \lambda, \ \beta_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \beta_2 = \lambda$ ist. Nach Theorem 16, § 4 des

Specielle lin. homog. Gruppe.

5. Kap., ist die Untergruppe mithin die *specielle lineare homogene Gruppe.* Sie ist durch die Forderung:

$$\Delta \equiv \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1$$

definiert, sodass also ϱ eine Function von Δ allein und offenbar von der Form

$$\varrho = \Delta^{\frac{-nm}{2}}$$

ist.

Die rationalen Invarianten J der Gruppe der Parameter a_0, $a_1 \ldots a_n$, die sich ergeben, wenn wir die Veränderlichen x, y der allgemeinen linearen homogenen Gruppe (1) *unterwerfen, sind mithin Quotienten*

$$J \equiv \frac{U}{V}$$

von ganzen Invarianten U, V der Gruppe der Parameter a_0, $a_1 \ldots a_n$, die sich ergeben, wenn wir die Veränderlichen x, y nur der speciellen linearen homogenen Gruppe unterwerfen.

Das Ergebnis ist auch umkehrbar. Nämlich jede Invariante J der Gruppe der Parameter bleibt insbesondere auch bei den Transformationen dieser Gruppe invariant, die zur speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y gehören und natürlich für sich eine Untergruppe bilden, ist also eine Function aller Invarianten dieser Untergruppe der Gruppe der Parameter. Soll sie bei der ganzen Gruppe der Parameter invariant sein, so muss sie bei der ungeändert bleiben, die zu $xp + yq$ gehört und bis auf einen Zahlenfactor die Form

$$a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial f}{\partial a_n}$$

hat, d. h. sie muss von nullter Ordnung homogen in a_0, $a_1 \ldots a_n$ sein.

Bezeichnen wir die Untergruppe der Gruppe der Parameter, die zur speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y gehört, als die *specielle Gruppe der Parameter,* so sehen wir also: *Die Invarianten der allgemeinen Gruppe der Parameter sind identisch mit den von nullter Ordnung homogenen Invarianten der speciellen Gruppe der Parameter.*

Specielle Gruppe der Parameter

Invarianten bei der speciellen Gruppe.

Da die Invarianten der speciellen Gruppe der Parameter an sich Interesse haben, werden wir künftig von der *speciellen* linearen homogenen Gruppe:

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y, \\ \Delta \equiv \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1 \end{cases}$$

ausgehen. Wir sind dann sicher, auch die für das Äquivalenzproblem bei der allgemeinen linearen homogenen Gruppe in betracht kommenden Invarianten zu finden.

Wir bemerken dabei noch, dass sich nach Satz 13, § 6 des 20. Kap., soviele von einander unabhängige Invarianten, als es überhaupt giebt, stets *homogen* wählen lassen. Die Invarianten der speciellen Gruppe der Parameter sind diejenigen Functionen, die von den Vertretern der Theorie der binären Formen als Invarianten bezeichnet werden. Die von nullter Ordnung homogenen heissen bei ihnen absolute Invarianten. Vom allgemeinen Standpunkt der Gruppentheorie aus sind letztere die Invarianten gegenüber der allgemeinen Gruppe der Parameter.

Äquivalenz von Formenreihen.

Handelt es sich um die Äquivalenz einer Reihe von Formen $\varphi, \psi \dots$ mit anderen $\varphi', \psi' \dots$, so werden wir die Reihe $\varphi, \psi \dots$ auch schon dann mit der Reihe $\varphi', \psi' \dots$ äquivalent nennen, wenn eine lineare homogene Transformation existiert, die $\varphi, \psi \dots$ in $\lambda\varphi', \mu\psi' \dots$ überführt, da wir festgesetzt haben, dass nur die Verhältnisse der Coefficienten $a_0, a_1 \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m, \dots$ jeder einzelnen Form in betracht kommen sollen. Um dies Äquivalenzproblem zu behandeln, haben wir $a_0, a_1 \dots a_n$ unter sich homogen, ebenso $b_0, b_1 \dots b_m$ unter sich homogen u. s. w. anzunehmen, also die speciellen Gruppen der Parameter $a_0, a_1 \dots a_n$, ferner $b_0, b_1 \dots b_m$ u. s. w. zu einer einzigen Gruppe zusammenzufassen, deren infinitesimale Transformationen also die Summen der entsprechenden infinitesimalen Transformationen der einzelnen speciellen Gruppen der Parameter sind, und hinzuzufügen:

$$a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial f}{\partial a_n},$$

$$b_0 \frac{\partial f}{\partial b_0} + b_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} + \cdots + b_m \frac{\partial f}{\partial b_m}$$

u. s. w. Die Formenreihen sind äquivalent, wenn die Wertsysteme $(a_0 : a_1 : \dots : a_n,\ b_0 : b_1 : \dots : b_m, \dots)$ in die Wertsysteme $(a_0' : a_1' : \dots : a_n',\ b_0' : b_1' : \dots : b_m', \dots)$ vermöge der so gebildeten Gruppe überführbar sind. Wir werden dies nachher an einigen Beispielen erläutern.

§ 2. Weitere Ausführungen und Beispiele.

Mit Formen invariant verknüpfte Functionen.

Ehe wir zu den Beispielen übergehen, wollen wir noch *die mit einer binären Form invariant verknüpften Functionen* besprechen.

Liegt nämlich eine Form

$$\varphi \equiv a_0 x_n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

vor, so kann man sich nach Functionen fragen, die erstens von ihr abhängig sind, d. h. also, welche die Form

$$F(x, y, a_0, a_1 \ldots a_n)$$

haben, und die zweitens mit φ bei der speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y invariant verknüpft sind. Wenn, um dies deutlicher auszudrücken, φ bei einer speciellen linearen homogenen Transformation von x, y in

$$\varphi' \equiv a_0' x'^n + \binom{n}{1} a_1' x'^{n-1} y' + \cdots + a_n' y'^n$$

übergeht, so soll gleichzeitig F in

$$F' \equiv F(x', y', a_0', a_1' \ldots a_n')$$

übergehen. Natürlich sind diese Functionen F von besonderer Bedeutung für die Theorie der binären Formen. Insbesondere pflegt man in dieser Theorie solche Functionen F zu suchen, die wieder binäre Formen sind. Man nennt sie dort Covarianten. Wir bemerken aber, dass sie nichts anderes sind, als *Invarianten*. Die Functionen F müssen nämlich invariant sein gegenüber der Gruppe in den $n+3$ Veränderlichen $x, y, a_0, a_1 \ldots a_n$, die dadurch entsteht, dass man zu den speciellen linearen homogenen Transformationen von x, y die zugehörigen linearen homogenen Transformationen von $a_0, a_1 \ldots a_n$ hinzufügt. Dass die so entstehenden Transformationen auch eine dreigliedrige Gruppe erzeugen, ist begrifflich klar und wurde in § 1 des 10. Kap. in Satz 2 ausgesprochen.

Man kann offenbar auch *die mit einer Reihe von Formen $\varphi, \psi \ldots$ invariant verknüpften Functionen* aufsuchen. Man wird alsdann nach den Invarianten der dreigliedrigen Gruppe fragen, die aus der speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y hervorgeht, wenn man die Transformationen der Coefficienten $a_0, a_1 \ldots a_n$, ferner $b_0, b_1 \ldots b_m$ u. s. w. der Formen $\varphi, \psi \ldots$ mitberücksichtigt.

Alle diese allgemeinen gruppentheoretischen Überlegungen sollen an den einfachsten Beispielen, an quadratischen, cubischen und biquadratischen Formen erläutert werden.

Dabei bemerken wir, dass man von vornherein gewisse diese Formen betreffende Ergebnisse ohne Rechnung angeben kann, indem man die Theorie der projectiven Gruppen der Geraden benutzt.

Eine *Form* nämlich:

$$\varphi \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

stellt gleich Null gesetzt eine *Gleichung* n^{ten} Grades für $\frac{y}{x}$ dar, und wir wissen, dass die Äquivalenz von Formen sich mit der dieser Gleichungen deckt. Wenn wir x, y als homogene Punktcoordinaten auf der

Geraden deuten, so wird die Gleichung $\varphi = 0$ gerade n Wurzelpunkte auf der Geraden haben. Sind diese gegeben, so sind auch die Verhältnisse von $a_0, a_1 \ldots a_n$ bekannt. In dieser Auffassung ist also *die Form n^{ten} Grades durch n Punkte der Geraden dargestellt.* Die specielle lineare homogene Gruppe in x, y ist ferner in dieser Auffassung die allgemeine projective Gruppe der Geraden (vgl. § 4 des 5. Kap.). Zwei Formen n^{ten} Grades sind dann und nur dann vermöge der speciellen linearen Gruppe einander äquivalent, wenn die n Wurzelpunkte der einen durch projective Transformation der Geraden in sich in die n Wurzelpunkte der anderen überführbar sind. Nach Satz 1, § 1 des 5. Kap., sind daher zwei lineare oder zwei quadratische oder zwei cubische Formen mit getrennten Wurzelpunkten stets mit einander äquivalent. Aus Satz 5 ebendaselbst folgt ferner, dass nur solche Formen, die höchstens zwei getrennte Wurzelpunkte besitzen, infinitesimale specielle lineare homogene Transformationen in sich gestatten. Es sind dies die oben als *singulär* bezeichneten Formen. Hierher gehören alle linearen und quadratischen, ferner diejenigen cubischen Formen, die einen rein quadratischen Factor enthalten:

Form n^{ten} Grades durch n Pkte. der Geraden dargestellt.

Singuläre Formen.

$$(\lambda x + \mu y)^2 (\varrho x + \sigma y),$$

ferner diejenigen biquadratischen, die entweder zwei rein quadratische Factoren haben:

$$(\lambda x + \mu y)^2 (\varrho x + \sigma y)^2$$

oder aber einen rein cubischen Factor besitzen:

$$(\lambda x + \mu y)^3 (\varrho x + \sigma y)$$

u. s. w. Natürlich gehören hierher auch alle Formen n^{ten} Grades, die n^{te} Potenzen linearer Formen sind, also $(\lambda x + \mu y)^3$, $(\lambda x + \mu y)^4$ u. s. w.

Wir wenden uns jetzt zur Besprechung der einzelnen Formen. Dabei deuten wir $a_0, a_1 \ldots a_n$, wie im vorigen Paragraphen auseinandergesetzt wurde, als *homogene Punktcoordinaten eines nur n-fach ausgedehnten Raumes.* Dann kommen für die Äquivalenzfrage, wie gesagt, nur die in $a_0 \ldots a_n$ von nullter Ordnung homogenen Invarianten und überhaupt die homogenen invarianten Gleichungensysteme in betracht.

1. Beispiel: Quadratische Form.

Quadratische Form.

Wir haben schon das Äquivalenzproblem einer quadratischen Form

$$\varphi \equiv a_0 x^2 + 2 a_1 xy + a_2 y^2$$

besprochen. Wir recapitulieren unsere Ergebnisse kurz mit den durch die Auffassung von a_0, a_1, a_2 als homogenen Parametern gebotenen Abänderungen.

Hier lautet die specielle Gruppe der Parameter:

$$\begin{array}{ll} & -a_0\frac{\partial f}{\partial a_1}-2a_1\frac{\partial f}{\partial a_2}\\ -2a_0\frac{\partial f}{\partial a_0} & \qquad\quad +2a_2\frac{\partial f}{\partial a_2}\\ -2a_1\frac{\partial f}{\partial a_0}-a_2\frac{\partial f}{\partial a_1}. & \end{array}$$

Nullsetzen der infinitesimalen Transformationen giebt ein nur zweigliedriges vollständiges System mit einer Lösung, der Invariante*)

$$D_\varphi \equiv 2(a_0a_2-a_1^2).$$

Deuten wir a_0, a_1, a_2 als homogene Punktcoordinaten in der Ebene, so giebt diese Invariante nur gleich Null gesetzt eine invariante Curve, einen Kegelschnitt. Er ist der Träger der rein quadratischen Formen. Zwei allgemein gewählte quadratische Formen sind einander stets äquivalent. Fügen wir zur Gruppe noch

$$a_0\frac{\partial f}{\partial a_0}+a_1\frac{\partial f}{\partial a_1}+a_2\frac{\partial f}{\partial a_2}$$

hinzu und setzen dann alle dreireihigen Determinanten der Matrix gleich Null, so ergiebt sich nichts Neues. Also sind zwei quadratische Formen nur dann nicht allgemein, wenn D_φ bei ihnen Null ist. Zwei solche rein quadratische Formen sind stets mit einander äquivalent. Dass jede quadratische Form eine infinitesimale specielle lineare homogene Transformation zulässt, wurde schon oben bemerkt. Insbesondere die rein quadratischen Formen gestatten deren zwei von einander unabhängige. Suchen wir die mit einer quadratischen Form invariant verknüpften Functionen, so haben wir die Invarianten der Gruppe in x, y, a_0, a_1, a_2 zu bestimmen:

$$\begin{array}{ll} yp & \qquad -a_0\frac{\partial f}{\partial a_1}-2a_1\frac{\partial f}{\partial a_2}\\ xp-yq-2a_0\frac{\partial f}{\partial a_0} & \qquad\qquad\quad +2a_2\frac{\partial f}{\partial a_2}\\ \qquad xq-2a_1\frac{\partial f}{\partial a_0}-a_2\frac{\partial f}{\partial a_1}. & \end{array}$$

Nullsetzen dieser drei infinitesimalen Transformationen giebt ein dreigliedriges vollständiges System in fünf Veränderlichen x, y, a_0, a_1, a_2, das also zwei von einander unabhängige Lösungen besitzt. Solche kennen wir aber schon, nämlich die Form φ selbst und die Invariante D_φ. Mit einer quadratischen Form φ ist also keine andere binäre Form

*) Wir wählen die Bezeichnungen in Einklang mit den in der Theorie der binären Formen gebräuchlichen.

Form invariant verknüpft ausser den trivialen, die Functionen von φ sind.

2. Beispiel: System von zwei quadratischen Formen

Zwei quadratische Formen.

$$\varphi \equiv a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2,$$
$$\psi \equiv b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2.$$

Hier haben wir zur Entscheidung der Äquivalenzfrage die Gruppe zu betrachten:

$$\begin{array}{ll} -a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1} - 2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2} & -b_0 \frac{\partial f}{\partial b_1} - 2b_1 \frac{\partial f}{\partial b_2} \\ -2a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} \qquad + 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} & -2b_0 \frac{\partial f}{\partial b_0} \qquad + 2b_2 \frac{\partial f}{\partial b_2} \\ -2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} - a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} & -2b_1 \frac{\partial f}{\partial b_0} - b_2 \frac{\partial f}{\partial b_1}. \end{array}$$

Die infinitesimalen Transformationen stellen gleich Null gesetzt ein dreigliedriges vollständiges System in 6 Veränderlichen a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 dar. Es giebt also drei von einander unabhängige Invarianten. Zwei kennen wir schon, nämlich

$$D_\varphi \equiv 2(a_0 a_2 - a_1^2), \quad D_\psi \equiv 2(b_0 b_2 - b_1^2),$$

während eine dritte diese ist:

$$A_{\varphi\psi} \equiv a_0 b_2 - 2a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

Homogen von nullter Ordnung in a_0, a_1, a_2 wie b_0, b_1, b_2 ist nur die Invariante:

$$J_{\varphi\psi} \equiv \frac{A^2_{\varphi\psi}}{D_\varphi D_\psi}.$$

In a_0, a_1, a_2 wie in b_0, b_1, b_2 homogene invariante Gleichungen sind also diese:

$$D_\varphi = 0, \quad D_\psi = 0, \quad J = \text{Const.},$$

sowie solche, die sich durch Nullsetzen der fünfreihigen Determinanten der Matrix der Gruppe ergeben, nachdem zur Gruppe

$$a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2}$$
$$b_0 \frac{\partial f}{\partial b_0} + b_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} + b_2 \frac{\partial f}{\partial b_2}$$

hinzugefügt worden ist. Aber diese fünfreihigen Determinanten liefern, wie die Ausrechnung zeigt, die 6 Relationen

$$D_\varphi(b_0 A_{\varphi\psi} - a_0 D_\psi) = 0, \quad D_\psi(a_0 A_{\varphi\psi} - b_0 D_\varphi) = 0,$$
$$D_\varphi(b_1 A_{\varphi\psi} - a_1 D_\psi) = 0, \quad D_\psi(a_1 A_{\varphi\psi} - b_1 D_\varphi) = 0,$$
$$D_\varphi(b_2 A_{\varphi\psi} - a_2 D_\psi) = 0, \quad D_\psi(a_2 A_{\varphi\psi} - b_2 D_\varphi) = 0.$$

Wenn also eine der beiden Grössen D_φ, D_ψ nicht Null ist, so müssen b_0, b_1, b_2 proportional a_0, a_1, a_2 sein. Aber diesen Fall schliessen wir natürlich aus. Es ergeben sich also keine neuen invarianten Gleichungen. Nullsetzen aller vierreihigen Determinanten giebt, wie man leicht sieht, ebenfalls kein neues invariantes Gleichungensystem. Die beiden quadratischen Formen φ und ψ sind durch Punkte der Ebene mit den homogenen Coordinaten a_0, a_1, a_2 bez. b_0, b_1, b_2 dargestellt. $J_{\varphi\psi} =$ Const. stellt eine invariante Zerlegung der Schar aller Punktpaare dar. Also folgt: Ein allgemein gewähltes System von zwei quadratischen Formen ist in ein anderes solches dann und nur dann überführbar, wenn $J_{\varphi\psi}$ bei beiden denselben Zahlenwert hat. Geometrisch ist $J_{\varphi\psi}$ leicht zu deuten. Denn die Bildpunkte von φ und ψ werden ja durch die allgemeine projective Gruppe des Kegelschnittes $D_\varphi = 0$ unter einander transformiert. Die Bildpunkte von φ und ψ bestimmen nun eine Gerade, die den Kegelschnitt in zwei Punkten trifft. Alle vier Punkte besitzen ein augenscheinlich invariantes Doppelverhältnis. Es muss also $J_{\varphi\psi}$ eine Function des Doppelverhältnisses sein, welches die Bildpunkte von φ und ψ und die Schnittpunkte ihrer Geraden mit dem Kegelschnitt bestimmen. Besonderer Art sind nur die Paare von Formen, von denen eine, etwa φ, rein quadratisch ist ($D_\varphi = 0$), oder die alle beide rein quadratisch sind ($D_\varphi = 0$, $D_\psi = 0$). Ein solches Paar ist nur, aber auch stets in ein ebensolches überführbar.

Die mit φ und ψ invariant verknüpften Functionen sind die Invarianten der Gruppe in x, y, a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2:

$$\begin{array}{llll} yp & \cdot \quad \cdot \quad - a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1} - 2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2} & \cdot \quad - b_0 \frac{\partial f}{\partial b_1} - 2b_1 \frac{\partial f}{\partial b_2} \\ xp - yq & - 2a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} \quad \cdot \quad + 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} & - 2b_0 \frac{\partial f}{\partial b_0} \quad \cdot \quad + 2b_2 \frac{\partial f}{\partial b_2} \\ xq & - 2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} - a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} \quad \cdot & - 2b_1 \frac{\partial f}{\partial b_0} - b_2 \frac{\partial f}{\partial b_1} \quad \cdot \end{array}$$

Nullsetzen giebt ein dreigliedriges vollständiges System mit $8 - 3 = 5$ unabhängigen Lösungen. Aber wir kennen schon fünf solche, nämlich φ, ψ, D_φ, D_ψ, $A_{\varphi\psi}$. Jede andere ist folglich eine Function von diesen fünfen. Wir wollen dies an einem Beispiel illustrieren: Die Formen φ und ψ sind durch Punkte der Ebene dargestellt, die der projectiven Gruppe des Kegelschnittes unterworfen sind. Bei dieser Gruppe ist Pol und Polare invariant verknüpft. Also ist mit den beiden Punkten auch der Pol ihrer Geraden invariant verknüpft. Er stellt aber wieder eine quadratische Form ϑ dar. Sie ist somit invariant mit φ und ψ verknüpft und folglich eine Function von

φ, ψ, D_φ, D_ψ, $A_{\varphi\psi}$. In der That beweist man, worauf wir nicht eingehen, dass

$$D_\psi \varphi^2 - 2 A_{\varphi\psi} \varphi \psi + D_\varphi \psi^2$$

das Quadrat einer quadratischen Form ist, die eben durch den Pol der Geraden dargestellt wird, welche die Bildpunkte von φ und ψ verbindet.

3. Beispiel: Cubische Form

Cubische Form.

$$\varphi \equiv a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Hier ist die specielle Gruppe der Parameter, wie man nach bekannter Methode leicht findet, diese:

$$\begin{aligned} & - a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1} - 2 a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} - 3 a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3} \\ - 3 a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} & - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + 3 a_3 \frac{\partial f}{\partial a_3} \\ - 3 a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} & - 2 a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_3 \frac{\partial f}{\partial a_2} \quad . \end{aligned}$$

Nullsetzen dieser infinitesimalen Transformationen giebt ein dreigliedriges vollständiges System mit einer Lösung:

$$R_\varphi \equiv -2 \{ 6 a_0 a_1 a_2 a_3 - 4 a_0 a_2^3 - 4 a_1^3 a_3 - a_0^2 a_3^2 + 3 a_1^2 a_2^2 \}.$$

Deuten wir a_0, a_1, a_2, a_3 als homogene Punktcoordinaten im gewöhnlichen Raume, so stellt nur $R_\varphi = 0$ eine invariante Fläche in diesem Raume dar. Denn andere invariante Flächen könnten nur solche sein, welche die Determinante der Gruppe, die nach Hinzufügung von

$$a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial f}{\partial a_3}$$

hervorgeht, zum Verschwinden bringen. Dies liefert genau $R_\varphi = 0$. Nullsetzen aller dreireihigen Unterdeterminanten dagegen giebt die invariante *Curve*

$$a_2^2 = a_1 a_3, \quad a_2^3 = a_0 a_3^2.$$

Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten liefert nichts. Die invariante Curve ist eine Raumcurve dritter Ordnung, die invariante Fläche ist von vierter Ordnung. Wir haben hier die allgemeine projective Gruppe jener Raumcurve dritter Ordnung vor uns (vgl. das Beispiel § 3 und § 4 des 16. Kap.). Bei ihr bleibt die Fläche der Tangenten der Curve in Ruhe. Mithin ist $R_\varphi = 0$ diese Developpabele der Curve. Zwei cubische Formen, deren Bildpunkte weder auf der Curve, noch auf der Fläche liegen, sind stets mit einander äquivalent. Da die Punkte der Developpabelen bei der Gruppe zwei von einander

unabhängige Fortschreitungsrichtungen erfahren, so sind sie alle mit einander äquivalent. Sie stellen somit ∞^2 cubische Formen dar, die unter sich äquivalent sind. Ebenso geben die Punkte der Curve ∞^1 cubische Formen, die nur unter sich äquivalent sind. Die besondere Art dieser Formen liegt auf der Hand: Die ersteren sind die ∞^2 cubischen Formen mit rein quadratischem Factor:

$$(\lambda x + \mu y)^2 (\varrho x + \sigma y),$$

die letzteren die ∞^3 rein cubischen Formen:

$$(\lambda x + \mu y)^3.$$

Beides sind *singuläre* Formen, die ersteren gestatten eine, die letzteren zwei von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der speciellen linearen homogenen Gruppe. Wir sehen auch: $R = 0$ ist die Bedingung dafür, dass die cubische Gleichung $\varphi = 0$ eine Doppelwurzel $\frac{y}{x}$ hat. Daher heisst R die *Discriminante* der cubischen Form φ.

Discriminante.

Um die mit einer cubischen Form invariant verknüpften Functionen zu finden, bilden wir die dreigliedrige Gruppe in x, y, a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\begin{array}{l} yp - a_0 \frac{\partial f}{\partial a_1} - 2a_1 \frac{\partial f}{\partial a_2} - 3a_2 \frac{\partial f}{\partial a_3} \\ xp - yq - 3a_0 \frac{\partial f}{\partial a_0} - a_1 \frac{\partial f}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial a_2} + 3a_3 \frac{\partial f}{\partial a_3} \\ xq - 3a_1 \frac{\partial f}{\partial a_0} - 2a_2 \frac{\partial f}{\partial a_1} - a_3 \frac{\partial f}{\partial a_2} \end{array}.$$

Nullsetzen liefert ein dreigliedriges vollständiges System mit $6 - 3 = 3$ von einander unabhängigen Lösungen. Eine ist φ, eine zweite R, eine dritte folgende:

$$\varDelta_\varphi \equiv 2\left\{(a_0 a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)xy + (a_1 a_3 - a_2^2)y^2\right\}.$$

Mit jeder cubischen Form ist also diese binäre Form $\varDelta_\varphi$ invariant verknüpft. Man nennt sie die *Hesse'sche Form.* Hieran knüpfen wir die Bemerkung: Eine cubische Form φ mit der Hesse'schen Form $\varDelta_\varphi \equiv 0$ kann durch die specielle Gruppe der Parameter nur in eine solche cubische Form φ' übergeführt werden, deren Hesse'sche Form $\varDelta_{\varphi'}$ durch diese Gruppe aus $\varDelta_\varphi$ hervorgeht, d. h. deren $\varDelta_{\varphi'}$ ebenfalls identisch Null ist. Alle cubischen Formen also, deren Hesse'sche Form identisch verschwindet, bilden für sich eine invariante Schar. Aber $\varDelta_\varphi = 0$ stellt drei Bedingungsgleichungen zwischen a_0, a_1, a_2, a_3 dar, von denen zwei von einander unabhängig sind. Mithin haben wir hier eine invariante Schar von ∞^1 cubischen Formen vor uns, die mit der einzigen

Hesse'sche Form.

derartigen Schar, die wir oben fanden, übereinstimmen muss. Daher: Das identische Verschwinden von $\varDelta_\varphi$ ist die Bedingung dafür, dass φ ein reiner Cubus ist.

4. Beispiel: Biquadratische Form

Biquadratische Form.

$$\varphi \equiv a_0x^4 + 4a_1x^3y + 6a_2x^2y^2 + 4a_3xy^3 + a_4y^4.$$

Die dreigliedrige Gruppe der Parameter ist hier diese:

$$(5)\quad \begin{cases} \qquad\qquad - a_0\dfrac{\partial f}{\partial a_1} - 2a_1\dfrac{\partial f}{\partial a_2} - 3a_2\dfrac{\partial f}{\partial a_3} - 4a_3\dfrac{\partial f}{\partial a_4} \\ -4a_0\dfrac{\partial f}{\partial a_0} - 2a_1\dfrac{\partial f}{\partial a_1} \qquad\qquad + 2a_3\dfrac{\partial f}{\partial a_3} + 4a_4\dfrac{\partial f}{\partial a_4} \\ -4a_1\dfrac{\partial f}{\partial a_0} - 3a_2\dfrac{\partial f}{\partial a_1} - 2a_3\dfrac{\partial f}{\partial a_2} - a_4\dfrac{\partial f}{\partial a_3} \qquad . \end{cases}$$

Die Invarianten der Gruppe erfüllen ein dreigliedriges vollständiges System in fünf Veränderlichen. Es giebt also zwei von einander unabhängige:

$$i \equiv 2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$
$$j \equiv 6(a_0a_2a_4 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 + 2a_1a_2a_3),$$

deren letztere sich auch so schreiben lässt:

$$j \equiv 6\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Als von nullter Ordnung homogene Invariante geht daher die Function

$$\frac{j^2}{i^3}$$

hervor. In dem Raume R_4 von vier Dimensionen mit den homogenen Punktcoordinaten $a_0 \ldots a_4$ bleiben demnach die ∞^1 dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten

$$\frac{j^2}{i^3} = \text{Const.}$$

einzeln invariant. Fügen wir zur Gruppe noch

$$a_0\frac{\partial f}{\partial a_0} + a_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + a_4\frac{\partial f}{\partial a_4}$$

hinzu und setzen wir dann die vierreihigen Determinanten ihrer Matrix gleich Null, so ergiebt sich ein invariantes Gleichungensystem. Es hat, wenn die obigen Bezeichnungen i, j sowie die folgenden später wieder auftretenden Abkürzungen

$$\delta_0 = 2(a_0a_2 - a_1^2), \quad \delta_4 = 2(a_2a_4 - a_3^2),$$
$$\delta_1 = (a_0a_3 - a_1a_2), \quad \delta_3 = (a_1a_4 - a_2a_3),$$
$$3\delta_2 = a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2$$

benutzt werden, die Form:

$$(6) \qquad \delta_k i - a_k j = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Entweder ist also

$$(6') \qquad i = j = 0$$

oder

$$(6'') \qquad \frac{\delta_0}{a_0} = \frac{\delta_1}{a_1} = \frac{\delta_2}{a_2} = \frac{\delta_3}{a_3} = \frac{\delta_4}{a_4} = \frac{j}{i}.$$

Die Gleichungen (6′) definieren eine invariante zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Dasselbe thun die Gleichungen (6″), wenn i und j nicht beide Null sind, denn die fünf Gleichungen (6″) reducieren sich auf nur zwei von einander unabhängige, wie man leicht einsieht. Wir haben also zwei verschiedene invariante Mannigfaltigkeiten von zwei Dimensionen erhalten. Dass sie wirklich verschieden sind, erkennt man z. B. daraus, dass der Bildpunkt der Form x^2y^2 zwar auf der einen (6″), nicht aber auf der anderen (6′) liegt, während umgekehrt für die Form x^3y zwar (6′) erfüllt ist, aber die δ_k den a_k nicht proportional sind.

Nullsetzen aller dreireihigen Determinanten giebt

$$(7) \qquad \delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0.$$

Von diesen Gleichungen sind nur drei von einander unabhängig. Sie stellen also eine invariante Curve dar und zwar eine Curve vierter Ordnung im R_4. Nullsetzen aller zweireihigen Determinanten liefert nichts. Wir finden also:

Zwei allgemein gewählte biquadratische Formen sind einander äquivalent, sobald bei beiden $\frac{j^2}{i^3}$ denselben Wert hat.

Besondere Formen sind nur die *singulären*, die entweder durch die Punkte der Mannigfaltigkeit (6′) oder die der Mannigfaltigkeit (6″) oder die der Curve (7) dargestellt werden. Solche, die den beiden ersteren Arten angehören, gestatten eine, solche der letzten Art zwei infinitesimale specielle lineare homogene Transformationen in sich. Nach den diesen Beispielen vorausgeschickten Bemerkungen sind diese singulären Formen die von den Gestalten:

$$(\lambda x + \mu y)^3(\varrho x + \sigma y), \quad (\lambda x + \mu y)^2(\varrho x + \sigma y)^2,$$
$$(\lambda x + \mu y)^4.$$

Die der ersten Gestalt werden durch die Punkte der Mannigfaltigkeit (6′) dargestellt, da z. B. x^3y einen Bildpunkt auf (6′) hat. Die der zweiten Art, zu denen z. B. x^2y^2 gehört, erfüllen (6″), die der letzten Art notwendig (7).

Die Bedingung dafür, dass die biquadratische Gleichung $\varphi = 0$ eine dreifache Wurzel $\frac{y}{x}$ habe, ist mithin $i = j = 0$, die Bedingung dafür, dass sie zwei Doppelwurzeln habe, ist, dass die δ den a proportional werden, die Bedingungen dafür, dass sie eine vierfache Wurzel besitze, wird durch die Gleichungen (7), unter denen drei von einander unabhängige sind, ausgedrückt.

Man vermisst hierbei den Fall, dass $\varphi = 0$ eine Doppelwurzel habe. Das liegt darin, dass die Formen

$$(\lambda x + \mu y)^2 (\varrho x + \sigma y)(\alpha x + \beta y)$$

keine singulären sind. Da es deren ∞^3 giebt und da sie nur wieder mit solchen äquivalent sein können, so erfüllen ihre Bildpunkte eine invariante dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\frac{j^2}{i^3} = \text{Const.}$ Um den Wert der Constanten zu finden, brauchen wir i und j nur für eine solche Form, etwa für $x^2y(x + y)$, zu berechnen. Wir finden:

$$\frac{j^2}{i^3} = \frac{1}{6}$$

oder:

$$R \equiv j^2 - \frac{i^3}{6} = 0.$$

Dies ist also die Bedingung dafür, dass $\varphi = 0$ eine Doppelwurzel hat. Deshalb heisst R die *Discriminante* von φ. Die Curve (7) der rein biquadratischen Formen kann in Parameterdarstellung so geschrieben werden:

Discriminante.

$$a_0 = t^4, \quad a_1 = t^3\tau, \quad a_2 = t^2\tau^2, \quad a_3 = t\tau^3, \quad a_4 = \tau^4.$$

Ihre Tangenten erzeugen natürlich eine invariante Mannigfaltigkeit. Es ist dies die der Formen mit rein cubischem Factor

$$(\lambda x + \mu y)^3 (\varrho x + \sigma y),$$

d. h. die Mannigfaltigkeit (6′). Denn zwei benachbarte Punkte der Curve (7) stellen zwei Formen

$$(\lambda x + \mu y)^4, \quad ((\lambda + d\lambda)x + (\mu + d\mu)y)^4$$

dar. Jede Form auf der durch beide Punkte bestimmten Tangente ist additiv aus diesen beiden gebildet, besitzt also den Factor $(\lambda x + \mu y)^3$.

Wollen wir schliesslich die mit der biquadratischen Form φ invariant verknüpften Functionen finden, so haben wir die Invarianten der dreigliedrigen Gruppe in $x, y, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ zu suchen, die entsteht, wenn wir die infinitesimalen Transformationen (5) zu denen der speciellen linearen homogenen Gruppe

$$yp \quad xp - yq \quad xq$$

addieren. Nullsetzen der infinitesimalen Transformationen giebt ein dreigliedriges vollständiges System in sieben Veränderlichen, sodass vier von einander unabhängige Invarianten vorhanden sind. Drei sind uns schon bekannt, nämlich die Form φ selbst, sowie die früheren Invarianten i und j. Eine vierte ergiebt sich in dieser Gestalt:

$$\varDelta \equiv \delta_0 x^4 + 4\delta_1 x^3 y + 6\delta_2 x^2 y^2 + 4\delta_3 x y^3 + \delta_4 y^4,$$

in der $\delta_0, \delta_1 \dots \delta_4$ die oben eingeführten Grössen bedeuten. Es ist diese mit der biquadratischen Form φ invariant verbundene ebenfalls biquadratische Form die sogenannte *Hesse'sche Form* von φ. Alle biquadratischen Formen φ, deren Hesse'sche Form identisch Null ist, bilden für sich eine invariante Schar. Nach (7) sind dies die rein biquadratischen Formen. Ferner lehrt (6″), dass man die Formen φ, die das Quadrat quadratischer Formen sind, auch dadurch definieren kann, dass für sie $\varphi : \varDelta$ eine von x, y freie Grösse ist.

Hesse'sche Form.

Wir bemerkten schon, dass die in der Theorie der binären Formen auftretenden Invarianten aus vollständigen Systemen gefunden werden, deren Coefficienten linear und homogen in den Variabeln und Parametern sind, und dass sie sich daher stets bestimmen lassen. Es folgt dies andererseits auch daraus, dass uns die endlichen Gleichungen der betreffenden Gruppen bekannt sind. In der Theorie der Formen benutzt man nun eine besondere *Symbolik*, um die Invarianten zu berechnen. Die Möglichkeit dieser allerdings auf das Specialgebiet beschränkten Symbolik hat den folgenden Grund:

Symbolik.

Liegt etwa eine Form n^{ten} Grades

$$\varphi \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

vor, so deuten wir sie als Punkt eines Raumes R_n von n Dimensionen mit den homogenen Coordinaten $a_0, a_1 \dots a_n$. Die Punkte dieses Raumes werden dann durch die lineare homogene Gruppe dieser Parameter $a_0, a_1 \dots a_n$ unter einander transformiert. Insbesondere werden alle ∞^1 Formen, die n^{te} Potenzen von linearen Formen sind:

$$(\lambda x + \mu y)^n,$$

durch die Punkte

$$a_0 = \lambda^n, \quad a_1 = \lambda^{n-1}\mu, \quad \ldots a_n = \mu^n$$

einer Curve n^{ter} Ordnung dargestellt, die in keiner nur $(n-1)$fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit liegt und augenscheinlich bei der Gruppe invariant ist. Ihre Punkte werden also unter sich transformiert. Wenn man nun nur diese Transformationen der Punkte der Curve kennt, mit anderen Worten, wenn man nur die Transformationen der linearen Formen $\lambda x + \mu y$ kennt, so kennt man auch die ganze lineare homogene Gruppe im R_n. Denn jede $(n-1)$fach ausgedehnte ebene Mannigfaltigkeit M_{n-1} schneidet die Curve in n Punkten, deren Transformationen bekannt sind, sodass also auch, da die M_{n-1} durch diese n Punkte völlig bestimmt wird, die Transformationen der ebenen M_{n-1}, mithin auch die aller Punkte des R_n bekannt sind. Rechnerisch lässt sich die Gruppe der Parameter von φ aus der Gruppe der Parameter von $\lambda x + \mu y$ so ableiten: Letztere Gruppe bestimmt λ' und μ' als lineare homogene Functionen von λ und μ. Also werden sich

$$\lambda'^n, \quad \lambda'^{n-1}\mu' \ \ldots \ \mu'^n$$

linear und homogen durch

$$\lambda^n, \quad \lambda^{n-1}\mu \ \ldots \ \mu^n$$

ausdrücken. Setzen wir in diesen Ausdrücken für diese beiden Wertereihen bez.:

$$a_0', \quad a_1' \ \ldots \ a_n'$$

und:

$$a_0, \quad a_1 \ \ldots \ a_n,$$

so erhalten wir die gesuchte Gruppe im R_n.

Dies ist in der Hauptsache der Grund dafür, dass man bei der Berechnung der Invarianten eine solche Symbolik anwenden darf, bei der die Form φ durch die specielle $(\lambda x + \mu y)^n$ ersetzt wird.

§ 3. Differentialparameter in der Invariantentheorie der binären Formen.

Nur kurz sollen jetzt die *Differentialparameter* in der Invariantentheorie der binären Formen oder also die *Differentiationsprocesse* besprochen werden, durch die man aus bekannten Invarianten neue findet.

Differentialparameter.

Angenommen, es sei eine Reihe von Formen $\varphi, \psi \ldots$ gegeben. Es handelt sich alsdann um die Frage, ob es einen Ausdruck Ω giebt, der eine Function der Veränderlichen x, y und der Coefficienten

$a_0, a_1 \ldots, b_0, b_1 \ldots$ der Formen sowie einer Anzahl von Functionen $\Phi, \Psi \ldots$ und ihrer Differentialquotienten nach $x, y, a_0, a_1 \ldots, b_0, b_1 \ldots$ sein soll und der eine mit $\varphi, \psi \ldots$ invariant verknüpfte Function darstellt, sobald $\Phi, \Psi \ldots$ irgend welche mit $\varphi, \psi \ldots$ invariant verknüpfte Functionen bedeuten. Existieren solche Ausdrücke Ω, die wir Differentialparameter nennen, so fragt es sich, wie man sie methodisch sämtlich bestimmen kann.

Es giebt eine ausserordentlich grosse Anzahl von Differentialparametern. Zu ihrer Bestimmung können wir ein Verfahren einschlagen analog dem im letzten Kapitel. Wir begnügen uns aber damit, nur einige der einfacheren und wichtigeren unter diesen Differentialparametern abzuleiten.

Es möge J eine mit den Formen $\varphi, \psi \ldots$ invariant verknüpfte Function sein. Alsdann erfahren die Differentialquotienten von J gewisse Transformationen bei der dreigliedrigen Gruppe, die aus der speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y hervorgeht, wenn man Transformationen der Parameter $a_0, a_1 \ldots, b_0, b_1 \ldots$ der Formen $\varphi, \psi \ldots$ mitberücksichtigt. Um insbesondere die Incremente jener Differentialquotienten bei den infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe zu berechnen, gehen wir aus von der Formel:

Incremente der Diffquot. einer Invariante.

$$dJ \equiv J_x dx + J_y dy + J_{a_0} da_0 + \cdots + J_{b_0} db_0 + \cdots.$$

Hierin bedeutet J mit angehängtem Index den partiellen Differentialquotienten von J nach der durch den Index angegebenen Grösse. Erfahren nun bei einer infinitesimalen Transformation der Gruppe $x, y, a_0 \ldots, b_0 \ldots$ die Incremente $\delta x, \delta y, \delta a_0 \ldots, \delta b_0 \ldots$, so ergiebt sich, da

$$\delta dJ \equiv d\delta J = 0$$

ist, weil J invariant, also $\delta J = 0$ ist, die Formel:

$$(8)\quad \begin{cases} 0 = \delta J_x dx + \delta J_y dy + \delta J_{a_0} da_0 + \cdots + \delta J_{b_0} db_0 + \cdots \\ \quad + J_x d\delta x + J_y d\delta y + J_{a_0} d\delta a_0 + \cdots + J_{b_0} d\delta b_0 + \cdots. \end{cases}$$

Diese Relation muss für alle Werte von $x, y, a_0 \ldots, b_0 \ldots$ bestehen. Rechnet man die Grössen $d\delta x, d\delta y, d\delta a_0 \ldots, d\delta b_0 \ldots$ aus, so erhält man rechts einen in $dx, dy, da_0 \ldots, db_0 \ldots$ linearen und homogenen Ausdruck, dessen sämtliche Coefficienten also Null sein müssen. Dies liefert die Werte von $\delta J_x, \delta J_y, \delta J_{a_0} \ldots, \delta J_{b_0} \cdots$. Man bemerkt, da δx und δy lineare homogene Functionen von x, y allein, ferner $\delta a_0 \ldots$ solche von $a_0 \ldots$ allein u. s. w. sind, dass $\delta J_x, \delta J_y$ lineare homogene Functionen von J_x, J_y allein, $\delta J_{a_0} \ldots$ solche von $J_{a_0} \ldots$ allein u. s. w. werden.

Wenn z. B.

$$\delta a_k = \sum^j \gamma_{kj} a_j \delta t \quad (k = 0, 1 \cdots) \tag{9}$$

wäre, so käme sofort:

$$\delta J_{a_k} = -\sum^j \gamma_{jk} J_{a_j} \delta t \quad (k = 0, 1 \ldots). \tag{10}$$

Wir wollen nun nach den Differentialparametern Ω fragen, die von x, y, $a_0 \ldots$, $b_0 \ldots$, von einer beliebigen mit φ, $\psi \ldots$ invariant verknüpften Function J, sowie deren *ersten* partiellen Differentialquotienten J_x, J_y, $J_{a_0} \ldots$, $J_{b_0} \ldots$ abhängen. Zu verlangen haben wir, dass Ω unter der Voraussetzung $\delta J = 0$ bei den infinitesimalen Transformationen der Gruppe invariant bleibe. Es ist aber

Differentialparameter erster Ordn.

$$\delta \Omega \equiv \frac{\partial \Omega}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial a_0} \delta a_0 + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial b_0} \delta b_0 + \cdots$$
$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial J} \delta J + \frac{\partial \Omega}{\partial J_x} \delta J_x + \frac{\partial \Omega}{\partial J_y} \delta J_y + \frac{\partial \Omega}{\partial J_{a_0}} \delta J_{a_0} + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial J_{b_0}} \delta J_{b_0} + \cdots.$$

Mithin muss Ω den drei linearen partiellen Differentialgleichungen genügen, die durch Nullsetzen der drei um die Incremente von J, J_x, J_y, $J_{a_0} \ldots$, $J_{b_0} \ldots$ *erweiterten* infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe hervorgehen. Diese Bedingung ist auch — wie man zeigen könnte — hinreichend. Man kann ferner einsehen, dass diese drei Differentialgleichungen ein dreigliedriges vollständiges System bilden. Doch gehen wir an dieser Stelle auf den Nachweis nicht ein, der sich ganz allgemein, bei beliebiger Gruppe, führen lässt.

Die Anzahl der von einander unabhängigen Differentialparameter erster Ordnung mit nur einer Invariante J ist hiernach endlich und lässt sich sofort berechnen: Wenn die Form φ vom n_1^{ten}, ψ vom n_2^{ten} Grade ist u. s. w. und wenn im ganzen m Formen φ, $\psi \ldots$ vorliegen, so hat das vollständige System

$$2 + (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \cdots + (n_m + 1)$$
$$+ 3 + (n_1 + 1) + (n_2 + 1) + \cdots + (n_m + 1),$$

also

$$5 + 2m + 2 \Sigma n_i$$

unabhängige Veränderliche, daher giebt es

$$2 + 2m + 2 \Sigma n_i$$

von einander unabhängige Differentialparameter erster Ordnung mit nur einer Invariante J. Von diesen ist eine grosse Anzahl frei von J_x, J_y, $J_{a_0} \ldots$, $J_{b_0} \cdots$. Alle diese von ihnen freien, die wir *uneigentliche* Differentialparameter nennen können und die mit φ, $\psi \ldots$ in-

variant verknüpfte Functionen sind, erfüllen ein dreigliedriges vollständiges System mit nur

$$3 + m + \Sigma n_i$$

unabhängigen Veränderlichen. Ihre Zahl beträgt somit

$$m + \Sigma n_i.$$

Also ist jeder Differentialparameter erster Ordnung mit nur einer Invariante J der m Formen $\varphi, \psi \ldots$ eine Function von $(m + \Sigma n_i)$ mit $\varphi, \psi \ldots$ invariant verknüpften Functionen und $(2 + m + \Sigma n_i)$ eigentlichen Differentialparametern. Letztere Zahl ist gerade so gross wie die der Veränderlichen und Parameter.

Fassen wir den Specialfall ins Auge, dass nur zwei Formen n^{ten} Grades φ und ψ vorliegen:

$$\varphi \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n,$$

$$\psi \equiv b_0 x^n + \binom{n}{1} b_1 x^{n-1} y + \cdots + b_n y^n.$$

Unter den Differentialparametern, die es hier giebt, sind es namentlich zwei, die in der Theorie der binären Formen eine Rolle gespielt haben, nämlich die sogenannten *Evectanten:*

Evectanten.

$$A(J) \equiv J_{a_0} b_0 + J_{a_1} b_1 + \cdots + J_{a_n} b_n,$$
$$B(J) \equiv J_{b_0} a_0 + J_{b_1} a_1 + \cdots + J_{b_n} a_n.$$

Dass sie in der That Differentialparameter sind, ist leicht einzusehen, denn wenn $a_0 \ldots a_n$ die Incremente (9) erfahren, so erfahren $b_0 \ldots b_n$ diese:

$$\delta b_k = \sum_j \gamma_{kj} b_j \delta t \quad (k = 0, 1 \ldots n).$$

Demnach und nach (10) wird also:

$$\frac{\delta A(J)}{\delta t} \equiv \sum_0^n{}_j (\delta J_{a_k} b_k + J_{a_k} \delta b_k)$$

$$= -\sum_0^n{}_k \sum_j \gamma_{jk} J_{a_j} b_k + \sum_0^n{}_k \sum_j J_{a_k} \gamma_{kj} b_j.$$

Dieser Ausdruck aber ist identisch Null, also

$$\delta A(J) = 0.$$

Analog ist

$$\delta B(J) = 0.$$

Da die besondere Form der Constanten γ_{kj} hier keine Rolle gespielt hat, so sehen wir: Liegt *irgend eine* lineare homogene Gruppe in $n + 1$ Veränderlichen $a_0 \ldots a_n$ vor und ist J eine Invariante zweier

Wertsysteme $(a_0 \ldots a_n)$, $(b_0 \ldots b_n)$, so sind $A(J)$ und $B(J)$ Differentialparameter der Gruppe.

Bisher haben wir nur specielle Fälle von Differentialparametern besprochen. Wir können die Betrachtungen nach mehreren Richtungen hin verallgemeinern.

Differentialparameter 2. Ordn.

Zunächst können wir Differentialparameter suchen, die auch von den höheren Differentialquotienten der Invariante J abhängen. Dabei haben wir unsere Gruppe zu erweitern durch Hinzunahme der Transformationen, welche die höheren Differentialquotienten von J erfahren. Um die Incremente dieser höheren Differentialquotienten bei den infinitesimalen Transformationen der Gruppe zu bilden, gehen wir von den Formeln aus:

$$\begin{aligned} dJ_x &\equiv J_{xx}\,dx + J_{xy}\,dy + J_{xa_0}\,da_0 + \cdots, \\ dJ_y &\equiv J_{xy}\,dx + J_{yy}\,dy + J_{ya_0}\,da_0 + \cdots, \\ dJ_{a_0} &\equiv J_{xa_0}dx + J_{ya_0}dy + J_{a_0a_0}da_0 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

die wir variieren. Die erste liefert z. B.:

$$\begin{aligned} d\delta J_x \equiv\; & \delta J_{xx}dx + \delta J_{xy}dy + \delta J_{xa_0}da_0 + \cdots + \\ & + J_{xx}d\delta x + J_{xy}d\delta y + J_{xa_0}d\delta a_0 + \cdots. \end{aligned}$$

Da uns δJ_x, δx, δy, $\delta a_0 \ldots$ bekannt sind, so erhalten wir hieraus, wenn wir alle Differentiationen ausgeführt haben, eine in $dx, dy, da_0 \ldots$ lineare homogene Gleichung, die für alle Werte von dx, dy, $da_0 \ldots$ bestehen muss. Sie liefern daher die Werte von δJ_{xx}, δJ_{xy}, $\delta J_{xa_0} \cdots$. Entsprechend berechnen sich die Incremente der übrigen zweiten Differentialquotienten. Man übersieht, dass sie sich linear und homogen durch die zweiten Differentialquotienten von J ausdrücken. Die gesuchten Differentialparameter zweiter Ordnung sind nun die Invarianten der durch Hinzunahme der Transformationen der ersten und zweiten Differentialquotienten von J erweiterten Gruppe. Der allgemeinste ist demnach eine beliebige Function einer leicht zu berechnenden *endlichen* Anzahl von Differentialparametern. Sie bestimmen sich wieder aus einem dreigliedrigen vollständigen System von linearen partiellen Differentialgleichungen, deren Coefficienten linear und homogen in x, y, $a_0 \ldots$, $b_0 \ldots$, J und den Differentialquotienten von J sind.

Entsprechendes gilt von den höheren Differentialparametern. Ihre Berechnung bietet nur algebraische Schwierigkeiten. Die Anzahl der von einander unabhängigen ist stets *endlich*.

Wenn wir mit $\Delta_n(J)$ und $\Delta_m(J)$ Differentialparameter n^{ter} und m^{ter} Ordnung bezeichnen, so ist offenbar $\Delta_n(\Delta_m J)$ ein Differentialparameter $(n+m)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man erhält also eine grosse Anzahl höherer Differentialparameter durch Differentiationsprocesse. Ja, man könnte zeigen, dass von einer gewissen Ordnung an alle höheren in dieser Weise gefunden werden können, doch wollen wir darauf hier noch nicht eingehen. Ein analoges Theorem für die Differentialinvarianten gilt bei beliebigen endlichen continuierlichen Gruppen, worauf wir im nächsten Paragraphen zurückkommen.

Differentialparameter von mehreren Invarianten.

Man kann endlich Differentialparameter suchen, welche die Differentialquotienten von *mehreren* Invarianten $J, K\dots$ enthalten. Man hat zu dem Zweck dasselbe Verfahren wie bisher einzuschlagen. Die Gruppe wird durch Hinzunahme der Transformationen von $J, K\dots$ und ihrer Differentialquotienten erweitert, und die gesuchten Differentialparameter sind die Invarianten der so entstehenden dreigliedrigen Gruppe. Wieder ist die allgemeinste von n^{ter} Ordnung eine beliebige Function einer gewissen *endlichen* Anzahl von einander unabhängiger. Zu diesen Differentialparametern gehört z. B. der in der Theorie der binären Formen als m^{te} *Überschiebung* bezeichnete:

Überschiebung.

$$U(J,\,K) \equiv \frac{\partial^m J}{\partial x^m}\,\frac{\partial^m K}{\partial y^m} - \binom{m}{1}\frac{\partial^m J}{\partial x^{m-1}\partial y}\;\frac{\partial^m K}{\partial x\partial y^{m-1}} + \cdots \pm \frac{\partial^m J}{\partial y^m}\,\frac{\partial^m K}{\partial x^m},$$

deren Invarianz leicht nachzuweisen ist.

Auf die Berechnung der Differentialparameter gehen wir nicht näher ein. Die Betrachtungen der drei letzten Paragraphen bezwecken ja nur, einen Überblick über die leitenden gruppentheoretischen Gesichtspunkte zu geben, nicht aber einen Abriss der Theorie der binären Formen zu liefern. Die Probleme, die sich stellen, bieten, wie wir gezeigt haben, vom gruppentheoretischen Standpunkt aus keine Schwierigkeiten dar. Wohl aber können bedeutende algebraische Hindernisse auftreten. Um diese bequem zu überwinden, hat man von der dieser speciellen Theorie eigentümlichen symbolischen Bezeichnungsweise der Formen Gebrauch zu machen.

Noch sei bemerkt: Wir betonten überall, dass die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten endlich ist, dass also jede Invariante durch eine endliche Anzahl von Invarianten ausdrückbar ist. Wir sagen deshalb, im vorliegenden Problem besitze die betrachtete invariante Schar von Mannigfaltigkeiten gegenüber der linearen homogenen Gruppe *ein endliches Formensystem.*

Endliches Formensystem.

Dies darf nicht mit der in der Theorie der binären Formen von

Gordan und anderen gebrauchten Bezeichnung eines endlichen Formensystems verwechselt werden. Dort stellt man sich vielmehr das algebraische Problem, alle *ganzen rationalen* Invarianten *ganz und rational* durch eine endliche Anzahl solcher auszudrücken.

Nur ganz kurz deuten wir an, wie sich gruppentheoretisch die Invariantentheorie der *ternären* Formen darstellt.

Ternäre Formen.

Verstehen wir unter x, y, z homogene Punktcoordinaten, unter u, u, w homogene Liniencoordinaten in der Ebene mit gemeinsamem Coordinatendreieck, so stellt eine ternäre Form

$$\varphi \equiv \sum_{ikl}^{1..n} A_{ikl} x^i y^k z^l \quad (i + k + l = n)$$

gleich Null gesetzt eine *Curve* n^{ter} *Ordnung* dar, ferner die ternäre Form

$$\psi \equiv \sum_{ikl}^{1..m} \mathsf{A}_{ikl} u^i v^k w^l \quad (i + k + l = m)$$

gleich Null gesetzt eine *Curve* n^{ter} *Classe* und schliesslich die Form

$$\chi \equiv \sum_{ikl}^{1..n} \sum_{\varrho\sigma\tau}^{1..m} \mathfrak{A}_{ikl,\varrho\sigma\tau} x^i y^k z^l u^\varrho v^\sigma w^\tau \quad \begin{pmatrix} i + k + l = n \\ \varrho + \sigma + \tau = m \end{pmatrix}$$

einen *Connex* (n, m) dar. $\chi = 0$ giebt bei festgehaltenen x, y, z eine Curve m^{ter} Classe, bei festgehaltenen u, v, w eine Curve n^{ter} Ordnung.

Diese Gebilde werden unter einander transformiert, sobald man auf die Ebene eine projective Transformation ausübt. Bei dieser werden x, y, z linear und homogen transformiert und zwar, wie wir annehmen können, durch eine Transformation der speciellen linearen und homogenen Gruppe in x, y, z. Ferner werden nach § 2 des 19. Kap. auch u, v, w durch die hierzu dualistische lineare homogene Transformation unter einander vertauscht. Geht die Form χ dabei etwa über in diese:

$$\chi' \equiv \sum_{ikl}^{1..n} \sum_{\varrho\sigma\tau}^{1..m} \mathfrak{A}'_{ikl,\varrho\sigma\tau} x'^i y'^k z'^l u'^\varrho v'^\sigma w'^\tau,$$

so werden die Parameter $\mathfrak{A}'$ gewisse Functionen der ursprünglichen $\mathfrak{A}$ sein. Man findet sie, indem man in χ statt x, y, z, u, v, w ihre Werte in den transformierten Veränderlichen einsetzt und darauf χ mit χ' vergleicht. Die $\mathfrak{A}'$ sind offenbar ebenfalls lineare homogene Functionen der $\mathfrak{A}$. Sie bestimmen also auch eine lineare homogene Transformation. Alle so sich ergebenden linearen homogenen Transformationen bilden wieder eine Gruppe, die (specielle) *Gruppe der Parameter.* Zwei Formen χ und χ' sind äquivalent, wenn die zugehörigen Wertsysteme $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{A}')$ der Parameter vermöge der Gruppe in einander überführbar sind, sonst nicht. Damit kommen wir wieder zum Problem der kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten bei der Gruppe der Parameter im Raume der Parameter zurück, das erledigt ist.

Gruppe der Parameter.

Die Formen φ und ψ, die, gleich Null gesetzt, Curven n^{ter} Ordnung bez. m^{ter} Classe darstellen, sind Specialfälle der allgemeinen Form χ. Für ihre Parameter A bez. A gilt also auch das soeben Gesagte. Noch ist zu bemerken, dass bei der Äquivalenzfrage wieder nur diejenigen kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten in betracht kommen, die durch homogene Gleichungen in den Parametern ausgedrückt werden. Von den Invarianten der Gruppe der Parameter spielen also nur die von nullter Ordnung homogenen eine Rolle.

Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe der Parameter ergeben sich durch die in § 1 des 10. Kap. auseinandergesetzte Methode wie bei den binären Formen.

Beispiel: Cubische Form.

Betrachten wir als einziges Beispiel die *cubische ternäre Form:*

$$\varphi \equiv \sum_{ikl}^{1,2,3} A_{ikl} x^i y^k z^l \quad (i + k + l = 3),$$

die, gleich Null gesetzt, eine beliebige Curve dritter Ordnung in der Ebene darstellt. Die cubische Form φ hat offenbar insgesamt zehn Parameter A_{300}, A_{030} . . A_{111}. Bei der speciellen linearen homogenen Gruppe in x, y, z, die 8-gliedrig ist, werden sie einer 8-gliedrigen Gruppe von Transformationen unterworfen. Wäre diese Gruppe nämlich weniger als achtgliedrig, so müsste eine allgemeine ebene Curve dritter Ordnung wenigstens eine infinitesimale projective Transformation zulassen, was bekanntlich nicht der Fall ist. Die Gruppe der Parameter besitzt also $10 - 8 = 2$ Invarianten, darunter eine homogene J, d. h. eine, die auch bei der infinitesimalen linearen Transformationen, die den A_{ikl} ihnen proportionale Incremente erteilt, nämlich bei dieser:

$$\sum A_{ikl} \frac{\partial f}{\partial A_{ikl}}$$

invariant bleibt. Diese Invariante J ist also für die Äquivalenz ausschlaggebend: Zwei allgemeine ebene Curven dritter Ordnung sind durch projective Transformation in einander überführbar, wenn die Invariante J bei beiden denselben Zahlenwert hat, sonst nicht. Die Bedeutung von J ist leicht zu ersehen: Bekanntlich ist der Wert des Doppelverhältnisses der vier Tangenten, die man von einem Punkte aus an eine allgemeine Curve dritter Ordnung ziehen kann, von der Lage des Punktes unabhängig, also durch die Curve selbst gegeben. Andererseits ändert er sich natürlich nicht bei projectiver Transformation. Es ist das Doppelverhältnis demnach die Invariante J.

Singuläre Fälle.

Nicht allgemeiner Lage sind nur die Curven dritter Ordnung, die wir nach unserer Terminologie als *singulär* bezeichnen müssen, nämlich diejenigen, für welche alle vierreihigen Determinanten der Matrix der um $\sum A_{ikl} \frac{\partial f}{\partial A_{ikl}}$ vergrösserten Gruppe verschwinden, die also eine infinitesimale projective Transformation in sich gestatten.

Nach § 4 des 3. Kap. aber muss sich jede ebene Curve, die eine infinitesimale projective Transformation gestattet, nicht transcendent und

weder Gerade noch Kegelschnitt ist, notwendig bei geeigneter Coordinatenwahl auf die Form

$$x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} z^{\lambda_3} = \text{Const.}$$

bringen lassen, in der $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ist. Die Constante rechts lässt sich sofort durch projective Transformation gleich Eins machen. Daher folgt: Jede ebene Curve dritter Ordnung, welche eine infinitesimale projective Transformation gestattet, kann auf die Form:

$$xy^2 = z^3$$

gebracht werden. Alle solche Curven sind also mit einander äquivalent. Bekanntlich lässt sich andererseits jede Curve dritter Ordnung mit *Spitze* bei geeigneter Coordinatenwahl auf diese Gleichung bringen.

Sobald also $\varphi = 0$ eine Curve dritter Ordnung mit Spitze darstellt, ist φ nur mit solchen, aber auch mit allen solchen cubischen Formen φ' äquivalent, die gleich Null gesetzt ebenfalls eine Curve dritter Ordnung mit Spitze darstellen.

Aber $\varphi = 0$ kann nun auch zerfallen. Zerfällt die Curve in einen Kegelschnitt und eine schneidende (nicht berührende) Gerade, so ist die Form φ mit jeder derartigen, bei der dasselbe eintritt, äquivalent, weil es stets eine projective Transformation giebt, die einen gegebenen Kegelschnitt mit Secante wieder in einen gegebenen Kegelschnitt mit Secante überführt.

Wenn $\varphi = 0$ einen Kegelschnitt mit Tangente darstellt, so ist φ wieder mit jeder Form φ' äquivalent, bei der dasselbe gilt.

Ebenso, wenn $\varphi = 0$ drei ein wirkliches Dreieck bildende Geraden darstellt.

Ferner gilt dasselbe, wenn $\varphi = 0$ drei durch einen Punkt gehende verschiedene Geraden liefert.

Ferner auch, wenn $\varphi = 0$ eine Doppelgerade und einfache Gerade darstellt, also φ das Product aus einer rein quadratischen und einer linearen Form ist.

Schliesslich, wenn φ ein reiner Cubus einer linearen Form ist.

Alle diese Fälle also müssen sich durch Nullsetzen aller Determinanten gleicher Reihenzahl der Matrix ergeben. Unsere früheren Resultate aber haben uns der factischen Ausrechnung dieser Determinanten überhoben.

Weiter wollen wir hier auf die ternären Formen nicht eingehen.

§ 4. Das allgemeine Äquivalenzproblem.

Vorgelegt sei eine r-gliedrige Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ in einer gewissen Anzahl von Veränderlichen. Deuten wir diese Veränderlichen als gewöhnliche Punktcoordinaten in einem Raume von entsprechender Dimensionenzahl, so stellt die Gruppe eine Gruppe von Transformationen dieses Raumes dar. Liegen in diesem Raume zwei Mannigfaltigkeiten vor, so erhebt sich die Frage, wie man entscheidet, ob sie durch eine Transformation der Gruppe in einander überführbar

Äquivalente Gebilde.

sind, ob sie also vermöge der Gruppe mit einander *äquivalent* sind. Dieses Äquivalenzproblem soll hier in grossen Zügen erledigt werden. Beispiele hierzu haben wir in dieser Abteilung schon mehrere gegeben.

Besonderer Fall.

Zunächst lässt sich ein *besonderer Fall* dieses Problems als wesentlich einfacher als der allgemeine Fall abtrennen. Gesetzt nämlich, es sei uns bekannt, dass die beiden zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten zu einer bei der Gruppe invarianten ebenfalls bekannten Schaar von ∞^m Mannigfaltigkeiten gehören, die von m wesentlichen Parametern $a_1 \dots a_m$ abhängt, so bemerken wir, dass jede Transformation der Gruppe diese ∞^m Mannigfaltigkeiten unter einander vertauscht, also, da letztere durch die Wertsysteme $(a_1 \dots a_m)$ bestimmt werden, eine Transformation in $a_1 \dots a_m$ bewirkt. Alle diese Transformationen von $a_1 \dots a_m$ stellen, wie man begrifflich sofort einsieht, wieder eine, und zwar eine höchstens r-gliedrige Gruppe dar, die *Gruppe der Parameter* $a_1 \dots a_m$. (Vgl. Satz 36, § 5 des 19. Kap.) Das Äquivalenzproblem kommt also auf das Problem zurück, zu entscheiden, ob zwei Wertsysteme $(a_1 \dots a_m)$, $(a_1' \dots a_m')$ durch die Gruppe der Parameter in einander überführbar sind. Sie sind es, wenn im Raume der m Parameter $a_1 \dots a_m$ der Punkt $(a_1' \dots a_m')$ der kleinsten bei der Gruppe der Parameter invarianten Mannigfaltigkeit des Punktes $(a_1 \dots a_m)$ angehört. Das Problem reducirt sich hier auf das der Bestimmung der kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten im Raume $(a_1 \dots a_m)$ bei der Gruppe der Parameter. Dies Problem wurde aber im 16. Kap. allgemein erledigt. In den ersten Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels haben wir Beispiele hierzu betrachtet*).

Gruppe der Parameter.

Sehen wir von diesem Specialfall ab, so führen uns die folgenden Überlegungen stets zum gewünschten Ergebnis, *eine endliche Anzahl von Kriterien für die Äquivalenz zweier Mannigfaltigkeiten* aufzustellen. Diese Überlegungen werden durch die im vorigen Kapitel gegebenen Beispiele erläutert. Wie dort führt auch im allgemeinen Falle die Theorie der Differentialinvarianten und invarianten Differentialgleichungen stets zum Ziel. —

Allgemeines Problem.

Das Problem der Äquivalenz zerfällt zunächst in eine Reihe einzelner. Es ist nämlich klar, dass nur zwei *Mannigfaltigkeiten von*

*) Handelt es sich um die Äquivalenz algebraischer Gebilde gegenüber einer projectiven Gruppe oder, sagen wir, gegenüber einer linearen homogenen Gruppe, sobald nämlich homogene Coordinaten eingeführt werden, so bleibt die Ordnung der Gebilde bei der Gruppe invariant. Die Gebilde von bestimmter Ordnung gehören also zu einer invarianten Schar, für welche die Betrachtungen des Textes Geltung haben.

gleicher Dimensionenzahl mit einander äquivalent sein können. Wir haben demnach soviele einzelne Äquivalenzprobleme, als es Dimensionenzahlen von Mannigfaltigkeiten im Raum der Veränderlichen der gegebenen Gruppe giebt. Um nun die Betrachtungen nicht unnötig zu verwickeln, beschränken wir uns auf das Äquivalenzproblem für die *Mannigfaltigkeiten grösster Dimensionenzahl*, d. h. für die, welche durch nur eine Gleichung zwischen den Veränderlichen gegeben werden. In den anderen Fällen kommen wir auf ganz analogem Wege durch, wenn auch der analytische Apparat etwas complicierter wird. Übrigens haben wir in §§ 2, 3 des vorigen Kapitels auch diese anderen Fälle völlig erledigt beim Beispiel der Gruppe der Bewegungen im Raume.

Gruppe im R_{n+1}.

Um uns möglichst bequem ausdrücken zu können, wollen wir annehmen, die gegebene r-gliedrige Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ enthalte $n+1$ Veränderliche, die wir mit $z, x_1 \ldots x_n$ bezeichnen. Wir deuten die Veränderlichen als gewöhnliche Punktcoordinaten in einem Raume R_{n+1} von $n+1$ Dimensionen. Eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit wird dann durch eine Gleichung:

n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

$$\omega(z, x_1 \ldots x_n) = 0$$

dargestellt. Sie wird im allgemeinen z enthalten. Dies wollen wir immer annehmen, da im anderen Falle eine andere Coordinatenauswahl stets zum Ziele führt. Wir betrachten also im R_{n+1} zwei Mannigfaltigkeiten:

$$z = \varphi(x_1 \ldots x_n), \quad z = \psi(x_1 \ldots x_n)$$

und fragen uns, ob sie durch die Gruppe in einander überführbar sind.

Die Mannigfaltigkeiten werden dadurch gegeben, dass z als Function von $x_1 \ldots x_n$ definiert wird, während $x_1 \ldots x_n$ als von einander unabhängige Veränderliche zu betrachten sind. Es haben also für unsere Mannigfaltigkeiten die partiellen Differentialquotienten von z nach $x_1 \ldots x_n$ einen bestimmten Sinn.

Schar der äquivalent. Mannigfaltigkeiten.

Fassen wir eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ins Auge. Sie geht bei allen ∞^r Transformationen der Gruppe in höchstens ∞^r von einander verschiedene Mannigfaltigkeiten M über. Nach Satz 1, § 2 des vorigen Kap., geht sie übrigens, wenn sie gerade p von einander unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe gestattet, in genau ∞^{r-p} Mannigfaltigkeiten M über. Die Schar dieser höchstens ∞^r Mannigfaltigkeiten M ist gegenüber der Gruppe invariant und enthält alle mit der ursprünglichen äquivalenten Mannigfaltigkeiten.

Differential-gleichungen der Schar.

Diese Schar wird durch Differentialgleichungen definiert sein, da sie continuierlich ist. Erfüllt sie eine partielle Differentialgleichung zwischen z als abhängiger und $x_1 \dots x_n$ als unabhängigen Veränderlichen, so erfüllt sie offenbar auch jede, die aus dieser Differentialgleichung durch Differentiation nach den unabhängigen Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ hervorgeht. Die Schar erfüllt also sicher unendlich viele partielle Differentialgleichungen. Wir können uns die Gesamtheit dieser Differentialgleichungen so hingeschrieben denken, dass sie mit der niedrigsten Ordnung anfangend zu immer höheren Ordnungen aufsteigen, dass sich ferner aus denen p^{ter} Ordnung die p^{ten} Differentialquotienten nicht eliminiren lassen und dass endlich jede durch Differentiation aus einer der Differentialgleichungen hervorgehende Differentialgleichung im System vorhanden, d. h. eine Folge der hingeschriebenen ist. Im Folgenden stellen wir uns also das System von Differentialgleichungen, das wir kurz mit

$$\Omega_k = 0 \quad (k = 1, 2 \dots)$$

Unbeschränkt integrabeles System $\Omega_k=0$

bezeichnen, stets in dieser *unbeschränkt integrabelen Form* aufgestellt vor.

Nicht gebundene Diffquot.

Alsdann werden durch $\Omega_k = 0$ alle partiellen Differentialquotienten von z nach $x_1 \dots x_n$ durch eine gewisse Anzahl derselben ausgedrückt sein, zwischen denen nun keine Relation mehr besteht. Hierbei rechnen wir zu den Differentialquotienten auch z selbst als nullten. Andererseits können wir uns eine der Mannigfaltigkeiten M der Schar in einem Punkte $(x_1^0 \dots x_n^0)$ allgemeiner Lage auf ihr durch die Reihenentwickelung von z nach ganzen positiven Potenzen von $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0, \dots x_n - x_n^0$ gegeben denken. In dieser Entwickelung treten in den Coefficienten die Werte der Differentialquotienten von z an der Stelle $(x_1^0 \dots x_n^0)$ auf. Geben wir denjenigen unter diesen Differentialquotienten, die durch das System $\Omega_k = 0$ nicht gebunden werden, irgend welche Werte, so liefert das System $\Omega_k = 0$ auch die Werte aller übrigen Differentialquotienten, sodass damit aus der Schar aller unserer Mannigfaltigkeiten M eine ganz bestimmte herausgegriffen ist. Mithin hängen die Mannigfaltigkeiten M von sovielen wesentlichen willkürlichen Constanten ab, als es Differentialquotienten von z giebt, die nicht vermöge $\Omega_k = 0$ durch Relationen verknüpft sind. Da die Schar aus höchstens ∞^r Mannigfaltigkeiten besteht, werden also durch das System $\Omega_k = 0$ *höchstens r Differentialquotienten nicht gebunden.*

Alle Diffquot. q^{ter} Ordng. durch niedere ausgedr.

Hieraus folgt, dass vermöge $\Omega_k = 0$ die Differentialquotienten von einer gewissen Ordnung an, sagen wir der q^{ten}, sämtlich durch die niederen ausgedrückt werden. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde ja von jeder beliebigen Ordnung mindestens ein Differentialquotient willkürlich bleiben. Die Zahl q ist an eine obere Grenze

gebunden. Denn es sind vermöge $\Omega_k = 0$ nicht alle Differentialquotienten $(q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung durch die niederen ausgedrückt, weil sonst $q-1$ an die Stelle von q treten müsste. Es ist also mindestens ein Differentialquotient $(q-1)^{\text{ter}}$ Ordnung willkürlich, daher auch mindestens einer $(q-2)^{\text{ter}}$ Ordnung u. s. w., bis schliesslich auch der von nullter Ordnung, z selbst, willkürlich bleibt. Somit sind sicher soviele Differentialquotienten nicht gebunden, als es Ordnungen vor der q^{ten} giebt, also sicher q. Da höchstens r Differentialquotienten nicht durch Relationen verknüpft sind, so ist

$$q \leqq r.$$

Da die Schar von Mannigfaltigkeiten M bei der Gruppe invariant ist, ist es auch das System der Differentialgleichungen $\Omega_k = 0$. Um dies analytisch auszudrücken, haben wir die Transformationen mitzuberücksichtigen, welche die Differentialquotienten von z bei der vorgelegten Gruppe erfahren. Sie lassen sich im gegebenen Falle leicht aufstellen. Wir deuten dies nur kurz an für die ersten partiellen Differentialquotienten von z nach $x_1 \ldots x_n$, die wir $p_1 \ldots p_n$ nennen. Wenn bei einer Transformation der Gruppe $z, x_1 \ldots x_n$ in $z', x_1' \ldots x_n'$ übergehen und wenn die ersten partiellen Differentialquotienten von z' nach $x_1' \ldots x_n'$ mit $p_1' \ldots p_n'$ bezeichnet werden, so ist:

Invarianz von $\Omega_k = 0$.

Transf. d. Diffquot.

$$dz' \equiv p_1' dx_1' + p_2' dx_2' + \cdots + p_n' dx_n'.$$

Ersetzen wir hierin $x_1' \ldots x_n'$ durch ihre Werte in $z, x_1 \ldots x_n$ und dz durch

$$dz \equiv p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n,$$

so erhalten wir eine in $dx_1 \ldots dx_n$ lineare homogene Relation. Sie muss für alle Differentiale $dx_1 \ldots dx_n$ der unabhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ bestehen, zerfällt also in n einzelne, die gerade $p_1' \ldots p_n'$ als Functionen von $z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$ bestimmen. Entsprechend ergeben sich die zweiten partiellen Differentialquotienten von z' nach $x_1' \ldots x_n'$ u. s. w. Allgemein übersieht man: Die k^{ten} partiellen Differentialquotienten von z' nach $x_1' \ldots x_n'$ stellen sich dar als Functionen von $z, x_1 \ldots x_n$ und den Differentialquotienten von z bis zur k^{ten} Ordnung.

Fügen wir die Transformationen aller ersten, zweiten, ... k^{ten} Differentialquotienten von z zu denen der Gruppe hinzu, so bilden die neuen ∞^r Transformationen, wie zu vermuten ist, wieder eine r-gliedrige Gruppe. Wir wollen auf den Beweis hierfür nicht eingehen. Die infinitesimalen Transformationen dieser *k-mal erweiterten Gruppe* ergeben sich durch k-malige Erweiterung der infinitesimalen Transformationen der gegebenen Gruppe. Die Incremente, welche die Diffe-

Erweiterte Gruppe.

rentialquotienten bei den infinitesimalen Transformationen der gegebenen Gruppe erfahren, lassen sich aus den Incrementen δz, $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ von z, $x_1 \ldots x_n$ selbst berechnen. Denn aus

$$dz \equiv p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

folgt durch Variation, da die Zeichen d und δ vertauschbar sind:

$$d\delta z \equiv \delta p_1 \cdot dx_1 + \cdots + \delta p_n \cdot dx_n + \\ + p_1 d\delta x_1 + \cdots + p_n d\delta x_n.$$

Sind δz, $\delta x_1 \ldots \delta x_n$ gegeben als Functionen von z, $x_1 \ldots x_n$ und setzt man für dz seinen Wert $p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$ ein, so erhält man eine Gleichung, die in n Relationen zur Bestimmung von $\delta p_1 \ldots \delta p_n$ zerfällt. Analog ergeben sich die Incremente der höheren Differentialquotienten.

Wir können also unsere r-gliedrige Gruppe bis zu den Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung erweitern. Wir werden sogleich sehen, dass es genügt, die Gruppe r-mal zu erweitern. Es seien $X_1^r f \ldots X_r^r f$ die r-mal erweiterten infinitesimalen Transformationen der Gruppe.

Das unbeschränkt integrabele System $\Omega_k = 0$ soll nun bei der Gruppe invariant sein. Die Incremente $\delta \Omega_k$, welche die Ω_k bei den hinreichend erweiterten infinitesimalen Transformationen der Gruppe erfahren, sollen also vermöge des Systems $\Omega_k = 0$ verschwinden. Weil nun die Incremente der k^{ten} Differentialquotienten von z, $x_1 \ldots x_n$ und den Differentialquotienten bis zur k^{ten} Ordnung abhängen, so ist Folgendes einleuchtend: Betrachten wir nur die Gesamtheit aller Differentialgleichungen $\Omega_k = 0$ bis zur r^{ten} Ordnung — wir wollen sie mit $\Phi_k = 0$ bezeichnen —, so bleibt dies kleinere System $\Phi_k = 0$ für sich bei der r-mal erweiterten Gruppe invariant. Andererseits aber wird durch dieses kleinere System das ganze System $\Omega_k = 0$ völlig definiert, da alle Differentialquotienten höherer als q^{ter} Ordnung aus denen von q^{ter} Ordnung durch Differentiation nach $x_1 \ldots x_n$ hervorgehen und $q \leqq r$ ist.

Alle Diffgln. bis zur r^{ten} Ordnung: $\Phi_k = 0$.

Wir können uns also auf die bei der r-mal erweiterten Gruppe invarianten Systeme von Differentialgleichungen $\Phi_k = 0$ von höchstens r^{ter} Ordnung beschränken.

Raum R_N der r-mal erweiterten Gruppe.

Deuten wir die Veränderlichen der r-mal erweiterten Gruppe, nämlich z, $x_1 \ldots x_n$ und die Differentialquotienten von z bis zur r^{ten} Ordnung — ihre leicht zu berechnende Anzahl sei gleich N — als gewöhnliche Punktcoordinaten in einem Raume R_N von N Dimen-

sionen, so stellt das System $\Phi_k = 0$ eine Mannigfaltigkeit M in diesem Raume dar, die gegenüber der r-mal erweiterten Gruppe invariant ist.

Invariante Mannigf. im R_N.

Aber nicht jede bei der r-mal erweiterten Gruppe invariante Mannigfaltigkeit M gehört zu einem System von Differentialgleichungen, das eine Schar von äquivalenten Mannigfaltigkeiten M im Raume R_{n+1} definiert. Denn es giebt ja Scharen von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten im R_{n+1}, die bei der vorgelegten Gruppe invariant sind und nicht nur aus äquivalenten Mannigfaltigkeiten bestehen. Jede Mannigfaltigkeit einer solchen Schar geht zwar bei der gegebenen Gruppe in eine der Schar über, aber nicht notwendig in jede. Wir wollen eine Schar von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten im R_{n+1}, die bei der gegebenen Gruppe invariant ist, aber nicht nur aus den Mannigfaltigkeiten besteht, die mit einer bestimmten der Schar äquivalent sind, eine *reducibele* invariante Schar nennen. Eine *irreducibele* soll also nur aus den Mannigfaltigkeiten bestehen, die aus einer der Schar durch Ausführung aller Transformationen der Gruppe hervorgehen. Jede reducibele Schar zerfällt in mindestens ∞^1 irreducibele.

Reducibele inv. Schar

Auch jede reducibele Schar wird durch ein unbeschränkt integrabeles System von Differentialgleichungen $W_k = 0$ definiert. Ist $\Omega_k = 0$ das unbeschränkt integrabele System, das eine in jener reducibelen Schar enthaltene irreducibele Schar definiert, so ziehen die Gleichungen $\Omega_k = 0$ die Gleichungen $W_k = 0$ nach sich. Letztere sind also dann in ersteren enthalten. Auch alle reducibelen Scharen, die aus höchstens ∞^r Mannigfaltigkeiten bestehen, haben ein solches Gleichungensystem $W_k = 0$, durch das alle Differentialquotienten von einer gewissen Ordnung, die höchstens gleich r ist, durch die niederen bestimmt werden, sodass wir also auch bei einem solchen System $W_k = 0$ mit den Differentialgleichungen r^{ter} Ordnung abbrechen dürfen. Die sich so ergebenden Gleichungen $\Psi_k = 0$ definieren ebenfalls im R_N der r-mal erweiterten Gruppe eine invariante Mannigfaltigkeit, die aber in mindestens ∞^1 kleinere einzeln invariante Mannigfaltigkeiten zerfällt.

Reducibele Schar defin. durch $W_k = 0$.

$W_k = 0$ enthalten in $\Omega_k = 0$.

Hieraus folgt, dass die irreducibelen Scharen $\Phi_k = 0$ nur durch *kleinste invariante Mannigfaltigkeiten im Raume R_N* dargestellt werden; ob durch alle diese oder nicht, lassen wir hier dahingestellt. Wir haben aber in Kap. 16 gesehen, wie man alle kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten bei gegebener Gruppe zu bestimmen hat. Wir schalten hierzu noch ein, dass man beweisen kann, dass nicht alle r-reihigen Determinanten der r-mal erweiterten Gruppe $X_1^r f \,.\,. X_r^r f$ identisch Null sind. Wir halten uns aber mit dem Beweis hierfür nicht auf. Nach Kap. 16 zerfallen nun die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten im R_N in solche, für welche die r-reihigen Determinanten der

Kleinste invariante Mannigf. im R_N.

Matrix der Gruppe $X_1^r f\,.\,.\,X_r^r f$ nicht sämtlich verschwinden, und in solche, für welche diese Determinanten sämtlich verschwinden. Die der ersteren Art werden durch Relationen zwischen den Invarianten $J_1\,.\,.\,J_s$ der r-mal erweiterten Gruppe, also durch die *Differentialinvarianten* der gegebenen Gruppe bis zu denen r^{ter} Ordnung bestimmt.

Differential-invarianten.

Äquivalenz-kriterien.

Liegen nun zwei n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten:

$$z = \varphi(x_1\,.\,.\,x_n), \quad z = \psi(x_1\,.\,.\,x_n)$$

im Raume R_{n+1} der gegebenen Gruppe $X_1 f\,.\,.\,X_r f$ vor, so hat man hiernach zur *Entscheidung ihrer Äquivalenz* so zu verfahren: Man erweitert die Gruppe r-mal und untersucht, ob die r-reihigen Determinanten dieser Gruppe $X_1^r f\,.\,.\,X_r^r f$ für die beiden Mannigfaltigkeiten, bei denen sich ja die Differentialquotienten von z in bestimmter Weise durch $x_1\,.\,.\,x_n$ ausdrücken, sämtlich verschwinden oder nicht. Ist letzteres der Fall, so berechnet man die *Differentialinvarianten* $J_1\,.\,.\,J_s$ der Gruppe $X_1 f\,.\,.\,X_r f$, indem man dabei bis zur r^{ten} Ordnung aufsteigt. Sie werden für die beiden Mannigfaltigkeiten bestimmte Functionen von $x_1\,.\,.\,x_n$. Alsdann sind die Mannigfaltigkeiten dann und nur dann äquivalent, wenn bei beiden zwischen $J_1\,.\,.\,J_s$ genau dieselben Relationen bestehen. Hierbei hat man natürlich $J_1\,.\,.\,J_s$ immer als sogenannte Hauptlösungen der vollständigen Systeme, deren Lösungen sie sind, zu wählen. Doch wollen wir auf diesen Punkt nicht näher eingehen.

Wenn nun zweitens für die eine Mannigfaltigkeit $z = \varphi$ sämtliche r-reihige Determinanten der Matrix der r-mal erweiterten Gruppe $X_1^r f\,.\,.\,X_r^r f$ verschwinden, wenn also diese Mannigfaltigkeit *singulär* ist, so kann sie nur dann mit der andern Mannigfaltigkeit $z = \psi$ äquivalent sein, wenn für diese dasselbe gilt. Es könnten für $z = \varphi$ auch alle $(r - k)$-reihigen Determinanten verschwinden. Dasselbe müsste dann für $z = \psi$ der Fall sein. Hierbei ist aber eine gewisse Vorsicht zu beachten. Eine gleich Null gesetzte Determinante kann nämlich in mehrere Factoren zerfallen. Es müssen für beide Mannigfaltigkeiten, soll überhaupt Äquivalenz möglich sein, dieselben irreducibelen Factoren der Determinanten verschwinden. Zur Entscheidung, ob nun wirklich Äquivalenz eintritt oder nicht, verfahren wir weiterhin so: Für beide Mannigfaltigkeiten verschwindet dieselbe Reihe von $(n - k)$-reihigen Determinanten:

$$\varDelta_1 = 0, \quad \varDelta_2 = 0, \ldots \varDelta_\varrho = 0,$$

und nicht alle $(n - k - 1)$-reihigen. Diese ϱ Gleichungen werden gewisse unter den Differentialquotienten von z als Functionen der übrigen und

von $x_1 \,.\,. x_n$ bestimmen. Wir berücksichtigen alsdann nur noch diejenigen Differentialquotienten, die durch keine Relation gebunden sind. Sie seien mit $z_1 \,.\, : z_\nu$ bezeichnet. Wenn wir in den Transformationen der r-mal erweiterten Gruppe für die übrigen ihre Werte in $x_1 \,.\,. x_n$, $z_1 \,.\,. z_\nu$ einsetzen und nur die Transformationen dieser $n + \nu$ Veränderlichen betrachten, so erhalten wir eine Gruppe*) in $x_1 \,.\,. x_n$, $z_1 \,.\,. z_\nu$, die wir eine *verkürzte* nennen. Nunmehr sind die Invarianten $I_1 \,.\,. I_\sigma$ dieser Gruppe zu bestimmen. Geometrisch gedeutet kommt dies nämlich darauf hinaus, dass man die kleinsten invarianten Mannigfaltigkeiten bestimmt, in welche die durch

Verkürzte Gruppe.

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \,.\,. \Delta_\varrho = 0$$

definierte invariante Mannigfaltigkeit im Raume R_N zerfällt. Die beiden gegebenen Mannigfaltigkeiten $z = \varphi$, $z = \psi$ liefern nun für $I_1 \,.\,. I_\sigma$ bestimmte Werthe in $x_1 \,.\,. x_n$. Sie sind dann und nur dann äquivalent, wenn bei beiden genau dieselben Relationen zwischen $I_1 \,.\,. I_\sigma$ bestehen. Man kann nämlich einsehen, dass die gegebenen beiden Mannigfaltigkeiten im Raume $x_1 \,.\,. x_n$, $z_1 \,.\,. z_\nu$ kein bei der verkürzten Gruppe singuläres Gleichungensystem erfüllen.

An diese allerdings nicht ganz erschöpfend abgeleiteten Äquivalenzkriterien knüpfen wir *eine Reihe wichtiger Bemerkungen an* **).

Wichtige Bemerkgn.

Es kann vorkommen, dass es solche Functionen der Invarianten $J_1 \,.\,. J_s$ giebt, die sich auch für die Wertsysteme der Veränderlichen und Differentialquotienten, die dem singulären System

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \,.\,. \Delta_\varrho = 0$$

genügen, noch regulär verhalten, ohne constant zu werden. Jede solche Function giebt alsdann eine der Invarianten $I_1 \,.\,. I_\sigma$, indem man in ihr alles durch $x_1 \,.\,. x_n$, $z_1 \,.\,. z_\nu$ ausdrückt. Ob aber in dieser Weise alle Invarianten $I_1 \,.\,. I_\sigma$ aus den $J_1 \,.\,. J_s$ abgeleitet werden können, das ist eine Frage, die wir hier gar nicht behandeln werden.

Ferner sei hervorgehoben, dass man sich das Problem stellen kann, *alle unbeschränkt integrabelen Systeme von Differentialgleichungen* $\Omega_k = 0$ *aufzustellen, die* *irreducibele* *invariante Scharen von n-fach*

---

*) Ausführlicheres hierüber findet man im I. Abschnitt des Werkes: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen, bearb. unter Mitwirk. v.* Engel, Kap. 14, insbesondere § 64.

**) Es wird beabsichtigt, in einem ausführlichen Werke über Differentialinvarianten die ganze Äquivalenztheorie in aller Vollständigkeit und für die Praxis geeigneter zu entwickeln und zugleich durch viele Beispiele zu erläutern. Wir beschränken uns auf einzelne Bemerkungen.

ausgedehnten Mannigfaltigkeiten im R_{n+1} definieren. Wir haben dies Problem für die Gruppe der Bewegungen im Raume in § 5 des vorigen Kapitels in grossen Zügen erledigt und wollen hier auf die allgemeine Behandlung nicht weiter eingehen. Indem man zunächst dieses Problem, nicht das eigentliche Äquivalenzproblem löst, kommt man zu dem Verfahren, das practisch den Vorzug verdient. Man kann überhaupt unser Verfahren noch vielfach bequemer gestalten, unter anderem dadurch, dass man die Erweiterung der Gruppe schrittweise vornimmt und jedesmal die invarianten Systeme von Differentialgleichungen $\Phi_k = 0$ sucht, die unbeschränkt integrabele Systeme definieren. Aber auf diese Vereinfachungen wollen wir hier nicht näher eingehen.

Das allgemeine Problem.

Wir haben uns auf die Äquivalenztheorie n-fach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten im Raume von $n+1$ Dimensionen beschränkt, aber schon hervorgehoben, dass sich die Theorie für Mannigfaltigkeiten von weniger Dimensionen ebenso entwickeln lässt. Wenn eine r-gliedrige Gruppe in n Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ vorliegt, so kann man etwa q der Veränderlichen als unabhängig betrachten, sagen wir $x_1 \ldots x_q$, und die übrigen $x_{q+1} \ldots x_n$ als Functionen von ihnen. Alsdann handelt es sich um die Äquivalenzkriterien zweier q-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, deren jede durch ein Gleichungensystem von der Form:

$$x_{q+1} = \varphi_{q+1}(x_1 \ldots x_q), \ldots x_n = \varphi_n(x_1 \ldots x_q)$$

dargestellt wird. In diesem Falle hat man wieder die Gruppe r-mal zu erweitern, indem man die Transformationen mitberücksichtigt, welche die Differentialquotienten von $x_{q+1} \ldots x_n$ nach $x_1 \ldots x_q$, bis zu denen r^{ter} Ordnung, bei der Gruppe erfahren. Auch hier sind die Invarianten dieser erweiterten Gruppe oder — bei singulären Gebilden — die Invarianten einer aus letzterer Gruppe durch eine gewisse Verkürzung hervorgehenden Gruppe von entscheidender Bedeutung. Für beide Mannigfaltigkeiten müssen diese Invarianten durch genau dieselben Relationen verknüpft sein, damit die Flächen äquivalent seien.

Verschiedene Reihen von Diffinv.

Je nachdem man die Zahl $q = 1, 2 \ldots n-1$ wählt, erhält man jedesmal eine Reihe von Invarianten der erweiterten Gruppe, und zwar eine unendliche Reihe, wenn man bis zu den Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung erweitert. Wir wollen beweisen, dass man alle Differentialinvarianten einer Reihe durch Differentiation aus einer *endlichen* Anzahl von Differentialinvarianten ableiten kann.

Wir beweisen dies für die Reihe der Differentialinvarianten, die wir bisher betrachtet haben, nämlich in dem Fall, dass wir *nur eine Veränderliche z als abhängig,* alle übrigen $x_1 \ldots x_n$ als unabhängig auf-

fassen. In den anderen Fällen kommt man durch ganz entsprechende Betrachtungen zum Ziele.

Es sei also eine r-gliedrige Gruppe in $n+1$ Veränderlichen $z, x_1 \dots x_n$ vorgelegt. Wir erweitern sie etwa m-mal durch Hinzunahme der Transformationen, welche die ersten, zweiten ..., m^{ten} partiellen Differentialquotienten von z nach $x_1 \dots x_n$ bei der Gruppe erfahren. Wir bemerkten schon früher, dass dadurch bei hinreichend grossem m eine r-gliedrige Gruppe hervorgeht und dass sich durch Nullsetzen der infinitesimalen Transformationen dieser Gruppe ein gerade r-gliedriges vollständiges System ergiebt, dessen Lösungen die Differentialinvarianten bis zur m^{ten} Ordnung sind. Erweitern wir $(m+1)$mal, so treten neu hinzu die Differentialinvarianten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Da nun bei dieser Erweiterung die $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z als Veränderliche im r-gliedrigen vollständigen System hinzutreten, so folgt, dass es gerade so viele von einander und von den niederen Differentialinvarianten unabhängige Differentialinvarianten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, als die Anzahl aller $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z beträgt. Diese Bemerkung wird nachher gebraucht werden.

Es mögen nun zunächst $J_1 \dots J_n$ irgend welche n Differentialinvarianten sein, zwischen denen keine Relation besteht. Jede Gleichung

Invariante Diffgl.

$$\Omega(J_1 \dots J_n) = 0$$

ist dann eine bei der Gruppe invariante Differentialgleichung, d. h. sie definiert eine invariante Schar von Functionen $z = \varphi(x_1 \dots x_n)$, also eine invariante Schar von n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten im Raume R_{n+1} der Veränderlichen $z, x_1 \dots x_n$ unserer Gruppe. Bilden wir alle möglichen derartigen Gleichungen, so erhalten wir jedesmal eine solche invariante Schar. Die Gesamtheit aller dieser invarianten Scharen ist natürlich ebenfalls bei der Gruppe invariant. Für jede solche Function $z = \varphi(x_1 \dots x_n)$ werden $J_1 \dots J_n$ von einander abhängige Functionen von $x_1 \dots x_n$. Mithin machen alle diese Functionen $z = \varphi(x_1 \dots x_n)$ die Functionaldeterminante von $J_1 \dots J_n$ hinsichtlich $x_1 \dots x_n$ identisch gleich Null. Also sind sie definiert durch die partielle Differentialgleichung

$$(11) \qquad \Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \frac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial J_n}{\partial x_n} = 0,$$

die somit bei der Gruppe ebenfalls invariant ist. Bei ihrer Bildung ist z als Function von $x_1 \dots x_n$ zu behandeln, bei der partiellen Differentiation nach x_i also ist auch z sowie jeder Differentialquotient von z zu differenzieren.

Nach Voraussetzung ist die Functionaldeterminante nicht für beliebige Functionen z von $x_1 \,.\,. x_n$ identisch Null, da sonst eine Relation zwischen $J_1 \,.\,. J_n$ identisch bestände. Wenn unter $J_1 \,.\,. J_n$ keine Differentialinvariante von höherer als m^{ter} Ordnung, aber wenigstens eine von gerade m^{ter} Ordnung vorhanden ist, so ist die Relation $\Omega(J_1 \,.\,. J_n) = 0$ eine Differentialgleichung höchstens m^{ter} Ordnung. Weil die Differentialgleichung (11) von allen Functionen z erfüllt wird, die irgend einer der Relationen $\Omega = 0$ genügen, so ist die Differentialgleichung (11) von mindestens $(m+1)^{\text{ter}}$ und andererseits offenbar nicht von höherer Ordnung.

Es mögen nun $J_1 \,.\,. J_{n+1}$ solche $(n+1)$ Differentialinvarianten sein, zwischen denen keine Relation identisch besteht und unter denen mindestens eine von m^{ter}, aber keine von höherer Ordnung vorhanden ist. Alsdann sind auch

$$J_1, \quad J_2 \ldots J_{n-1}, \quad J_{n+1} - cJ_n$$

n solche Differentialinvarianten, für welche die obigen Schlüsse gemacht werden können, welchen constanten Wert die Grösse c auch haben möge. Also ist:

$$\Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \frac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial (J_{n+1} - cJ_n)}{\partial x_n} = 0 \tag{12}$$

eine invariante Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Sie lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{\Sigma \pm \dfrac{\partial J_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \dfrac{\partial J_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \dfrac{\partial J_n}{\partial x_n}} = c.$$

Da sie für jeden constanten Wert von c invariant ist, so folgt, dass ihre linke Seite für sich invariant ist. Mithin ist

$$\frac{\Sigma \pm \dfrac{\partial J_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \dfrac{\partial J_{n+1}}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \dfrac{\partial J_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial J_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \dfrac{\partial J_n}{\partial x_n}}$$

Differentialinvarianten höh. Ordn. durch Differentiation.

eine Differentialinvariante $(m+1)^{ter}$ Ordnung. Sie ist nicht etwa identisch einer Constanten gleich, da die Relation (12) für keinen constanten Wert von c identisch besteht. Diese Differentialinvariante lässt sich viel einfacher schreiben: Wenn wir nämlich unter z eine

ganz beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$ verstehen, so werden $J_1 \ldots J_n$ für diese Function gewisse Functionen von $x_1 \ldots x_n$ werden und zwar von einander unabhängige, sobald die beliebig gewählte Function z keiner Differentialgleichung $\Omega(J_1 \ldots J_n) = 0$ genügt. Indem wir uns also unter z eine beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$ verstanden denken, können wir umgekehrt $x_1 \ldots x_n$ als von einander unabhängige Functionen von $J_1 \ldots J_n$ auffassen. Alsdann ist J_{n+1} auch eine gewisse Function von $J_1 \ldots J_n$. Es ist in dieser Auffassung:

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_1}\frac{\partial J_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n}\frac{\partial J_n}{\partial x_k} = \frac{\partial J_{n+1}}{\partial x_k}$$

$$(k = 1, 2 \ldots n),$$

und hieraus folgt durch Auflösung:

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1}\frac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial J_{n+1}}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial J_1}{\partial x_1}\frac{\partial J_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial J_n}{\partial x_n}}.$$

Demnach kann die gefundene Differentialinvariante $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung auch so geschrieben werden:

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n}.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit annehmen, die Zahl m sei so gross gewählt, dass unter den Differentialinvarianten bis zur m^{ten} Ordnung sicher n existieren, etwa $J_1 \ldots J_n$, zwischen denen keine Relation $\Omega = 0$ besteht. Wir wissen, dass zu den Differentialinvarianten bis zur m^{ten} Ordnung gerade soviele von $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung hinzutreten: $I_1, I_2 \ldots I_{\varepsilon_{m+1}}$, als es $(m+1)^{\text{te}}$ Differentialquotienten von z giebt. Diese Anzahl bezeichnen wir mit ε_{m+1}. Zwischen den niederen Differentialinvarianten und $I_1, I_2 \ldots I_{\varepsilon_{m+1}}$ besteht keine Relation. Wir bemerken, dass $I_1, I_2 \ldots I_{\varepsilon_{m+1}}$ insbesondere gerade hinsichtlich der $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z von einander unabhängig sind, wie aus ihrer Definition durch das r-gliedrige vollständige System ersehen werden kann, das hinsichtlich der Differentialquotienten von f nach den $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z auflösbar ist. Wenn wir daher wie oben $J_1 \ldots J_n$ als unabhängige Veränderliche einführen, so folgt, dass jeder Ausdruck

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial J_k} \quad (\lambda = 1, 2 \ldots \varepsilon_{m+1}, \quad k = 1, 2 \ldots n)$$

eine Differentialinvariante $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Wir behaupten,

dass sich alle zu den Differentialinvarianten 1., 2... $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung hinzutretenden Differentialinvarianten $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung als Functionen dieser Ausdrücke und der niederen Differentialinvarianten darstellen lassen. Es sind ja $I_1 .. I_{\varepsilon_{m+1}}$ von einander unabhängig hinsichtlich der $(m+1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von z, mithin sind unter den Ausdrücken

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial x_i} \quad (\lambda = 1, 2 .. \varepsilon_{m+1}, \quad i = 1, 2 .. n)$$

sicher soviele von einander hinsichtlich der $(m+2)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten unabhängige enthalten, als die Anzahl dieser Differentialquotienten beträgt, also auch — wie bei Einführung der neuen Veränderlichen $J_1 .. J_n$ statt $x_1 .. x_n$ hervorgeht — unter den Ausdrücken

$$\frac{\partial I_\lambda}{\partial J_k} \quad (\lambda = 1, 2 .. \varepsilon_{m+1}, \quad k = 1, 2 .. n).$$

Wir wissen aber, dass es gerade soviele neue Differentialinvarianten $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt, als Differentialquotienten $(m+2)^{\text{ter}}$ Ordnung vorhanden sind.

Alle Diffinv. höh. Ordn. durch Differentiation.

Wir haben hiermit *alle Differentialinvarianten bis zur* $(m+2)^{\text{ten}}$ *Ordnung durch Differentiationsprocesse* aus denen niederer Ordnung abgeleitet. Entsprechend können wir die $(m+3)^{\text{ter}}$ Ordnung durch Differentiation finden, u. s. w. Damit ist unsere Behauptung für die Reihe der Differentialinvarianten bewiesen, die sich ergiebt, sobald man nur eine Veränderliche als abhängig auffasst.

Durch derartige Betrachtungen beweist man nun auch ganz allgemein den Satz:

Theorem 42: *Liegt eine beliebige endliche continuierliche Gruppe der Veränderlichen $z_1 .. z_q$, $x_1 .. x_n$ vor, so giebt es immer eine unendliche Reihe von Differentialinvarianten*

$$J\left(x_1 .. x_n, \; z_1 .. z_q, \; \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \; \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial z_q}{\partial x_n}, \; \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \cdots \right),$$

die sich sämtlich durch Differentiation aus einer endlich begrenzten Anzahl derartiger Differentialinvarianten ableiten lassen.

Diejenigen Differentialinvarianten, aus denen sich alle durch Differentiation ableiten lassen, genügen zu ihrer Definition. Wir bezeichnen ihren Inbegriff als ein *volles System von Differentialinvarianten.* Im vorstehenden Theorem ist also die *Endlichkeit* jedes vollen Systems von Differentialinvarianten bei endlicher continuierlicher Gruppe aus-

Volles Syst. von Diffinv.

Endlichkeit des Systems.

gesprochen *). Auf die Frage, aus wie vielen Differentialinvarianten das einfachste volle System besteht, gehen wir nicht ein. —

Da zu jeder Gruppe mehrere Reihen von Differentialinvarianten gehören, je nachdem man die Anzahl der als abhängig aufzufassenden Veränderlichen wählt, so erhebt sich die Frage, ob man die verschiedenen Reihen aus einander ableiten kann. Man kann einsehen, dass sie sich sämtlich aus einer Reihe durch *ausführbare* Operationen ableiten lassen. Dies soll im Folgenden angedeutet werden:

Denken wir uns die endlichen Gleichungen einer r-gliedrigen Gruppe in n Veränderlichen vorgelegt, die wir jetzt mit $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}^n$ bezeichnen wollen:

$$\mathfrak{x}_i' = f_i(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n,\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1,\ 2 \dots n). \tag{13}$$

Fügen wir noch hinzu:

$$x_i' = x_i \quad (i = 1,\ 2 \dots n), \tag{14}$$

so bilden alle $2n$ Gleichungen wieder eine r-gliedrige Gruppe und zwar in den $2n$ Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$, $x_1 \dots x_n$. Betrachten wir $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ als abhängige, $x_1 \dots x_n$ als unabhängige Veränderliche, so besitzt diese neue Gruppe eine Reihe von Differentialinvarianten von der Form:

$$U\left(x_1 \dots x_n,\ \mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n,\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_2}\ \cdots\ \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial x_1^2} \cdots\right).$$

Wenn wir nun andererseits die Gleichungen der Gruppe (13) mit der Abänderung aufstellen, dass wir statt $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}$ bez. $\mathfrak{x}$ und x schreiben:

$$\mathfrak{x}_i = f_i(x_1 \dots x_n,\ a_1 \dots a_r) \quad (i = 1,\ 2 \dots n) \tag{15}$$

und wenn wir die Gleichungen hinzufügen, die durch Differentiation nach $x_1 \dots x_n$ aus diesen hervorgehen:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i(x,\ a)}{\partial x_k} \quad (i,\ k = 1,\ 2 \dots n),$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f_i(x,\ a)}{\partial x_k \partial x_l} \quad (i,\ k,\ l = 1,\ 2 \dots n),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

*) In der Theorie der Formen wird auch von der Endlichkeit des Formensystems geredet. Dort aber wird darunter verstanden, dass sich alle rationalen ganzen Invarianten rational und ganz durch eine endliche Anzahl solcher ausdrücken lassen. Dort also hat das volle System eine andere Specialbedeutung. Es erscheint angebracht, den Begriff: volles System in der im Text angegebenen Weise für beliebige Gruppen festzusetzen. (Vgl. S. 744, 745.)

so kann man aus allen die Parameter $a_1 \ldots a_r$ eliminieren und dadurch zu einem System von Differentialgleichungen

$$(16) \qquad W_k\left(x_1 \ldots x_n,\ \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n,\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial x_1^2} \cdots\right) = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots)$$

gelangen, dessen allgemeinste Lösungen gerade die Form (15) haben. Dieses System kann immer auf eine solche Form gebracht werden, dass sich durch Differentiation nichts neues ergiebt; genauer ausgedrückt: wenn m die Ordnung des Systems (16) ist, so sollen alle Differentialgleichungen m^{ter} und niederer Ordnung, die aus (16) durch Differentiationen und Eliminationen hervorgehen, schon ohne Differentiation aus (16) folgen. Alsdann heisst das System (16) das der *Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen* der Gruppe (13). Es gilt nun der wichtige Satz, den wir aber hier nicht beweisen wollen*), dass sich die Definitionsgleichungen auf eine solche Eorm

Definitionsgleichungen der endl. Trf. der Gruppe.

$$V_k\left(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n,\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial x_1^2} \cdots\right) = \Phi_k(x_1 \ldots x_n)$$
$$(k = 1, 2 \ldots)$$

bringen lassen, in der die V_k Differentialinvarianten der Gruppe (13) (14) in $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$, $x_1 \ldots x_n$ sind. Es gilt sogar der Satz, dass sich jede Differentialinvariante

$$U\left(x_1 \ldots x_n,\ \mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n,\ \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}_1}{\partial x_1^2} \cdots\right)$$

der Gruppe (13) (14) als Function von $x_1 \ldots x_n$ allein vermöge der Definitionsgleichungen der Gruppe (13) und der aus ihnen durch Differentiation nach $x_1 \ldots x_n$ hervorgehenden Gleichungen ausdrücken lässt. Alle diese Differentialinvarianten sind also Functionen einer begrenzten Anzahl $V_1, V_2 \ldots$ derselben, der Differentialquotienten dieser nach $x_1 \ldots x_n$ und der n Grössen $x_1 \ldots x_n$, die selbst bei der Gruppe (13) (14) invariant sind.

Ein volles System von Diffinv. aus den Definitionsglchgn.

Sobald also die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen einer Gruppe (13) *vorliegen, kennt man ein volles System von Differentialinvarianten der durch Hinzufügung von* (14) *hervorgehenden Gruppe* (13) (14).

Dass sich nun alle übrigen Reihen von Differentialinvarianten aus einer Reihe durch *ausführbare* Operationen ableiten lassen, erläutern wir durch ein Beispiel:

---

*) Siehe Lie, *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuierlichen Transformationsgruppen.* Leipziger Berichte 1891, S. 316 ff.

Betrachten wir die Gruppe der Bewegungen im Raume $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und fügen wir zu ihren endlichen Gleichungen noch

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

hinzu, so erhalten wir eine Gruppe in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, x, y, z$. Die Definitionsgleichungen liefern hier das volle System von Differentialinvarianten

$$U\left(x, y, z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdot \cdot \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} \cdots\right).$$

Suchen wir nun z. B. die Reihe der Differentialinvarianten der Flächen im Raume, so haben wir etwa $\mathfrak{z}$ als Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aufzufassen oder ganz allgemein $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ als Functionen von zwei Hülfsveränderlichen x, y zu betrachten, die bei der Gruppe nicht transformiert werden. Alle alsdann hervorgehenden Differentialinvarianten sind diejenigen unter den obigen U, die z weder explicite noch implicite enthalten. Man findet also alle diese Differentialinvarianten

$$V\left(x, y, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdot \cdot \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} \cdots\right)$$

durch Elimination von z und den Differentialquotienten von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach z aus dem vollen System der U. Aber von den so erhaltenen Invarianten V kommen nur die in betracht, die ungeändert bleiben, wenn man an Stelle der Hülfsveränderlichen x, y Functionen derselben als Hülfsveränderliche einführt. Es sind also aus der Reihe aller V diejenigen auszuwählen, die ungeändert bleiben bei jeder Transformation von der Form

$$(17) \qquad \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}' = \mathfrak{z}, \quad x' = \Phi(x, y), \quad y' = \Psi(x, y),$$

insbesondere also bei jeder infinitesimalen:

$$\delta\mathfrak{x} = 0, \quad \delta\mathfrak{y} = 0, \quad \delta\mathfrak{z} = 0, \quad \delta x = \varphi(x, y)\delta t, \quad \delta y = \psi(x, y)\delta t.$$

Wir haben eine ähnliche Betrachtung in § 2 des 22. Kap. (vgl. die Formel (8) S. 676) angestellt. Wie dort ist es auch hier erforderlich, ein vollständiges System zu integrieren, dessen Coefficienten linear in den Veränderlichen mit constanten Coefficienten sind (wie auf S. 678 das vollständige System $Af = 0$, $Bf = 0$, $Cf = 0$). Ein solches vollständiges System kann bekanntlich stets durch ausführbare Operationen integriert werden. Wir erhalten dadurch die gesuchten Differentialinvarianten, die von der Wahl der Hülfsveränderlichen x, y unabhängig sind, denn man kann zeigen, dass die gefundenen Differentialinvarianten auch gegenüber jeder endlichen Transformation (17) invariant bleiben*). Wir können nun z. B. x, y direct durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$

*) Alle Transformationen (17) bilden eine sogenannte *unendliche* Gruppe.

ersetzen und erhalten alsdann die gesuchten Differentialinvarianten in der Form

$$W\left(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}, \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2} \cdots\right),$$

also in der Form, wie sie in § 5 des 22. Kap. auftreten.

Man bemerkt, dass sich entsprechende Betrachtungen stets anstellen lassen, und gelangt zu dem

Alle Reihen von Diffinv. abgeleitet aus einer.

Theorem 43: *Sobald die Definitionsgleichungen der endlichen Transformationen einer (endlichen) continuierlichen Gruppe vorliegen, kann man alle Reihen von Differentialinvarianten der Gruppe durch ausführbare Opertionen finden.*

Unendliche Gruppen.

Mit wenigen Worten wollen wir die analoge Theorie bei den *unendlichen Gruppen* besprechen. Eine unendliche Gruppe ist eine Schar von Transformationen, die erstens nicht nur von einer endlichen Anzahl von Parametern, sondern z. B. auch von willkürlichen Functionen abhängt, und die zweitens die Gruppeneigenschaft besitzt, dass stets die Aufeinanderfolge zweier Transformationen der Schar einer einzigen Transformation der Schar äquivalent ist. Insbesondere wird noch vorausgesetzt, dass die endlichen Gleichungen der Gruppe durch Differentialgleichungen, die *Definitionsgleichungen* der Gruppe, definiert seien. Eine genauere Begriffsbestimmung findet man in den einschlägigen Abhandlungen von Lie*).

Zu jeder unendlichen Gruppe gehören ebenfalls mehrere Reihen von Differentialinvarianten, die berechnet werden können, sobald die Definitionsgleichungen der Gruppe vorliegen.

Auch hier gilt der wichtige Satz, dass die Zahl der Kriterien für die Äquivalenz zweier Mannigfaltigkeiten gegenüber der unendlichen Gruppe immer endlich ist. Dieser Satz gilt jedoch nicht für Gruppen, die nicht durch Differentialgleichungen definiert sind, z. B. nicht für die unendliche Gruppe aller Transformationen von der Form

$$x' = \varphi(x), \quad y' = \varphi(y),$$

wo φ in beiden Gleichungen dieselbe beliebige Function bedeutet.

Der Unterschied zwischen *allgemeinen* und *singulären* Mannigfaltigkeiten tritt auch bei den unendlichen durch Differentialgleichungen definierten Gruppen auf. Auch hier werden die singulären Mannigfaltigkeiten, die ihre besondere Invariantentheorie besitzen, durch Nullsetzen von Determinanten gewisser Matricen gefunden.

Für allgemeine wie für singuläre Mannigfaltigkeiten drücken sich die Äquivalenzkriterien dadurch aus, dass die Differentialinvarianten eines gegewissen vollen Systems bei zwei äquivalenten Mannigfaltigkeiten genau dieselben Relationen erfüllen müssen.

Auf weitere Ausführungen im Einzelnen gehen wir nicht ein. In dem oben angekündigten Werke über Differentialinvarianten sollen alle diese Theorien ausführlich dargestellt werden.

---

*) Namentlich in der oben citierten über *„die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuierlichen Transformationsgruppen"*.

Kapitel 24.

Über Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen.

Dieses letzte Kapitel steht mit den vorhergehenden Kapiteln dieser Abteilung in keinem näheren Zusammenhang, sondern behandelt wesentlich andere Probleme, aber ebenfalls Anwendungen der Gruppentheorie.

In den „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen" hatten wir uns die Aufgabe gestellt, zu zeigen, dass sehr viele der alten classischen Integrationsmethoden von Differentialgleichungen ihren Ursprung darin haben, dass die betreffenden Differentialgleichungen bekannte infinitesimale Transformationen oder bekannte Gruppen von Transformationen gestatten. Man kann nun einen höheren Standpunkt einnehmen und zeigen, dass andere classische Methoden, die ausserhalb des damaligen Kreises von Theorien stehen, doch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachtet mit dem Gruppenbegriff in enger Beziehung stehen.

Zunächst werden wir nun ein specielles Problem, das der Integration der Riccati'schen und der Verallgemeinerung der Riccati'schen Gleichung in Zusammenhang mit dem Gruppenbegriff besprechen, alsdann zu Systemen von linearen Differentialgleichungen aufsteigen und zum Schlusse die allgemeinste Classe von Differentialgleichungen bestimmen, die von dem hier einzunehmenden Standpunkt aus mit der Gruppentheorie in sehr enger Beziehung steht. Es sind dies die Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen sich als Functionen einer Anzahl irgend welcher Particularlösungen ausdrücken lassen.

Wir gelangen dadurch zu einer sehr wichtigen Classe von Differentialgleichungen. Handelt es sich nämlich um die Integration eines vollständigen Systems, das bekannte infinitesimale Transformationen zulässt, so erfordert die Lösung dieses Problems, die von Lie zuerst und allgemein entwickelt worden ist*), die Integration solcher Hülfsgleichungen, die sämtlich die Form besitzen, auf die wir hier werden geführt werden.

Hieraus erhellt, dass die Betrachtungen des gegenwärtigen letzten Kapitels von grosser Bedeutung für die Integrationstheorie überhaupt sind.

Noch bemerken wir, dass wir die in den „Vorlesungen über Differentialgleichungen" entwickelten Theorien hier nicht gebrauchen, also auch nicht als bekannt voraussetzen.

---

*) *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuierliche endliche Gruppe gestatten.* Math. Ann. Bd. 25, S. 71—151.

§ 1. Die Riccati'sche Differentialgleichung.

Riccati'sche Differentialgleichung zwischen ω und z.

Vorgelegt sei in zwei Veränderlichen ω und z eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\frac{d\omega}{dz} = A + B\omega + C\omega^2, \tag{1}$$

in der A, B, C Functionen von z allein bedeuten. Wir bezeichnen jede solche Differentialgleichung als eine *Riccati'sche Differentialgleichung.*

z als Zeit gedeutet.

Wenn wir z als die *Zeit* deuten und unter ω die gewöhnliche Punktcoordinate auf einer Geraden verstehen, so haben wir anzunehmen, dass jeder Punkt (ω) der Geraden mit der Zeit z seine Lage auf der Geraden ändert. Die Gleichung (1) sagt aus, dass die Coordinate ω in dem auf den Augenblick z folgenden Zeitelemente dz den Zuwachs

$$d\omega = (A + B\omega + C\omega^2)dz \tag{2}$$

erfahren soll. Da dies Increment quadratisch in ω ist, so folgt, dass ω im Zeitelement dz eine *infinitesimale projective Transformation* erfährt (vgl. § 1 des 5. Kap.). Diese infinitesimale projective Transformation von ω hat das Symbol:

Inf. proj. Transformation.

$$Uf \equiv (A + B\omega + C\omega^2)\frac{df}{d\omega}\cdot$$

Alle Punkte der Geraden werden also während der Zeit dz projectiv unter einander vertauscht.

Nun sollen A, B, C Functionen von z sein. Diese Coefficienten im Symbol Uf ändern sich also mit der Zeit z. Mithin haben wir uns vorzustellen, dass die Punkte (ω) der Geraden von Moment zu Moment in anderer Weise projectiv unter einander transformiert werden, derart, dass sie zur Zeit z während des nächsten Zeitelementes dz gerade die infinitesimale Transformation Uf erfahren.

Die Gleichung (1) integrieren, heisst, ω so als Function von z und einer Constanten zu bestimmen, dass $\frac{d\omega}{dz}$ den vorgeschriebenen Wert erhält. Den gesuchten Ausdruck für ω können wir uns daher so entstanden denken: Wir betrachten im Augenblicke $z = 0$ etwa einen Punkt (ω_0) der Geraden, führen auf ihn die von Moment zu Moment sich ändernde infinitesimale projective Transformation Uf aus. Zur Zeit z wird er dadurch eine gewisse Lage (ω) auf der Geraden erreichen, die eine Function von z und der beliebig gewählten Constanten ω_0, eben die gesuchte Function ist. Die Aufeinanderfolge von mit der Zeit veränderlichen infinitesimalen projectiven Transforma-

tionen ist aber, da alle projectiven Transformationen eine Gruppe bilden, einer einzigen projectiven Transformation äquivalent. Das Integrationsproblem kommt also darauf hinaus, diese äquivalente Transformation nach Ablauf der Zeit z zu bestimmen. Wäre die infinitesimale projective Transformation nicht mit der Zeit veränderlich, so würde die fortwährende Ausübung von Uf eine eingliedrige projective Gruppe erzeugen. Wenn aber A, B, C Functionen von z sind, so ist dies nicht mehr der Fall.

Dennoch können wir einige Sätze, die wir früher abgeleitet haben, hier verwerten: Jede endliche projective Transformation von ω_0 in ω hat, wie wir wissen (vgl. § 2 des 1. Kap.) die Form

$$\omega = \frac{\alpha\omega_0 + \beta}{\gamma\omega_0 + \delta}.$$

Mithin hat die allgemeine Lösung der Riccati'schen Gleichung (1) die Form:

$$\omega = \frac{\alpha(z)\omega_0 + \beta(z)}{\gamma(z)\omega_0 + \delta(z)} \tag{3}$$

und es würde zur vollständigen Integration darauf ankommen, die noch unbekannten Functionen α, β, γ, δ von z zu bestimmen, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ sicher nicht identisch Null ist.

z und ω als Coord. in der Ebene.

Legen wir nunmehr z und ω eine andere geometrische Deutung unter. z sei Abscisse und ω Ordinate in der Ebene. Jede Particularlösung $\omega = \omega(z)$ der Riccati'schen Differentialgleichung stellt alsdann eine Curve in der Ebene dar. Die Parallelen $z =$ Const. werden von allen ∞^1 Integralcurven in Punktreihen geschnitten. Dadurch wird jedem Punkt (ω) auf einer der Parallelen ein bestimmter Punkt (ω) auf jeder anderen Parallelen zugeordnet, nämlich der Punkt, in dem die durch ersteren gehende Integralcurve die andere Parallele trifft. Alsdann führt die infinitesimale projective Transformation Uf die Punkte der Ebene in einander derart über, dass die Punkte jeder der Parallelen in die zugeordneten Punkte der benachbarten Parallelen übergehen. Diese Transformation der Punktreihe auf einer Parallelen in die zugeordnete auf der benachbarten ist projectiv, wie aus der Form (2) des Incrementes von ω beim Übergang von z zu $z + dz$ hervorgeht.

Man sieht dies auch aus der Form (3) der allgemeinen Lösung von (1). Geben wir darin z einen bestimmten Wert, so giebt (3) die Ordinate ω des Punktes der Parallelen (z), der dem Punkte (ω_0) auf der Aufangsparallelen, d. h. auf der ω-Axe zugeordnet ist. Diese Zuordnung (3) aber ist projectiv. Da bei projectiver Zuordnung das

Doppelverhältnis von vier Punkten ungeändert bleibt, so folgt also, *dass vier beliebige Integralcurven alle Parallelen $z = $ Const. in je vier Punkten schneiden, die sämtlich dasselbe Doppelverhältnis besitzen.* Oder auch: *Sind ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 vier Particularlösungen der Riccati'schen Differentialgleichung* (1), *so ist ihr Doppelverhältnis*

Doppelverh. von vier Particularlösungen.

$$(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4) \equiv \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_2} : \frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_3 - \omega_4}$$

von z unabhängig, also eine Constante.

Eine Particularlösung bekannt.

Angenommen, *es sei eine Particularlösung $\omega = u$ von* (1) *bekannt.* Alsdann kennen wir eine Integralcurve $\omega = u(z)$. Von jenen ∞^1 einander projectiv zugeordneten Punktreihen auf den Geraden $z =$ Const. wissen wir dann das Eine, dass die Punkte, in denen die bekannte Curve die Parallelen trifft, einander zugeordnet sind. Diese Punkte lassen sich nun sämtlich durch eine geeignete auf jeder der Parallelen projective Coordinatenänderung, bei der z ungeändert bleibt, in das Unendlichferne verlegen, nämlich durch diese:

$$\omega' = \frac{1}{\omega - u}, \tag{4}$$

denn für $\omega = u$ giebt sie $\omega' = \infty$. Führt man diese neue Veränderliche ω' statt ω ein, ohne z zu ändern, so wird die Zuordnung der Punkte auf den Geraden $z =$ Const. nach wie vor projectiv sein, da die Coordinatenänderung (4) auf jeder dieser Geraden projectiv ist. Es wird also an die Stelle von (1) wieder eine Differentialgleichung zwischen ω' und z treten, deren Integralcurven die Parallelen $z =$ Const. wieder in projectiven Punktreihen schneiden. Aber bei diesen Punktreihen wird jetzt das Unendlichferne auf allen Geraden $z =$ Const. sich entsprechen. Es liegen also nur noch *lineare* Transformationen vor. Die Zuordnung der Punkte einer Geraden $z =$ Const. zu denen der benachbarten wird also durch eine infinitesimale in ω' lineare Transformation

$$U'f \equiv (\lambda(z) + \mu(z)\omega') \frac{df}{d\omega'}$$

vermittelt (vgl. § 1 des 5. Kap.). Durch Einführung von ω' geht demnach die Riccati'sche Differentialgleichung (1) in eine von der besonderen Form

$$\frac{d\omega'}{dz} = \lambda(z) + \mu(z)\omega' \tag{5}$$

Zurückführung auf eine lineare Diffgl.

über, also in eine *lineare Differentialgleichung*, die man bekanntlich durch zwei successive Quadraturen integriert.

Dies Ergebnis können wir rechnerisch verificieren, denn nach (4) ist

$$\frac{d\omega'}{dz} = -\frac{1}{(\omega - u)^2}\left(\frac{d\omega}{dz} - \frac{du}{dz}\right).$$

Nach Voraussetzung soll ω die Gleichung (1) erfüllen und insbesondere u Particularlösung von (1), also

$$\frac{du}{dz} \equiv A + Bu + Cu^2$$

sein, sodass kommt:

$$\frac{d\omega}{dz} - \frac{du}{dz} = B(\omega - u) + C(\omega^2 - u^2).$$

Mithin wird

$$\frac{d\omega'}{dz} = -B\omega' - C\omega'(\omega + u).$$

Da nun

$$\omega = u + \frac{1}{\omega'}$$

ist, so erhalten wir schliesslich

$$\frac{d\omega'}{dz} = -C - (B + 2uC)\omega',$$

also die erwartete lineare Differentialgleichung zwischen ω' und z.

Wir formulieren somit den — längst bekannten —

Satz 1: *Kennt man von einer Riccati'schen Differentialgleichung eine Particularlösung, so findet man die allgemeine Lösung durch zwei successive Quadraturen.*

Zwei Particularlösungen bekannt.

Nehmen wir an, *es seien zwei Particularlösungen u und v der Riccati'schen Gleichung* (1) *bekannt.* Alsdann kennen wir von der oben besprochenen projectiven Zuordnung der Punkte der Geraden $z =$ Const. das Eine, dass gewisse Punktepaare auf allen Geraden $z =$ Const. einander entsprechen. Es sind dies die Punktepaare, die von den Integralcurven $\omega = u(z)$, $\omega = v(z)$ auf den Geraden ausgeschnitten werden. Wir wählen nun auf jeder Geraden $z =$ Const. eine neue Coordinate ω' so, dass $\omega' = \infty$ jedesmal den einen und $\omega' = 0$ jedesmal den anderen dieser beiden Punkte darstellt, und zwar können wir dies bekanntlich durch eine auf jeder Geraden projective Coordinatenänderung erreichen (nach § 1 des 5. Kap., S. 125). Auf allen Geraden gleichzeitig erreichen wir es, wenn wir

$$\omega' = \frac{\omega - v}{\omega - u} \tag{6}$$

setzen. Denn für $\omega = u$ wird $\omega' = \infty$, für $\omega = v$ wird $\omega' = 0$. Durch Einführung dieser neuen Veränderlichen ω' geht aus der Riccati'schen Gleichung (1) eine neue Differentialgleichung zwischen

ω' und z hervor, deren Integralcurven in der (ω', z)-Ebene alle Geraden $z = \text{Const.}$ in projectiven Punktreihen schneiden, bei denen die unendlichfernen Punkte einander sowie die Schnittpunkte mit der Axe $\omega' = 0$ einander entsprechen. Hier tritt also an die Stelle des Symbols Uf dieses (vgl. § 1 des 5. Kap.):

$$U'f \equiv \lambda(z)\,\omega' \frac{df}{d\omega'}.$$

Vermöge (6) geht mithin die Riccati'sche Differentialgleichung in eine *lineare homogene*

Zurückführung auf eine lin. homog. Diffgl.

$$\frac{d\omega'}{dz} = \lambda(z)\,\omega'$$

über, deren Integration bekanntlich nur noch eine Quadratur verlangt. Wir überlassen es dem Leser, durch Einführung von ω' vermöge (6) die Gleichung (1) in eine lineare homogene zwischen ω' und z umzuwandeln, und formulieren nur das — längst bekannte — Ergebnis:

Satz 2: *Kennt man von einer Riccati'schen Differentialgleichung zwei Particularlösungen, so findet man die allgemeine Lösung durch eine Quadratur.*

Drei Particularlösungen bekannt.

Sind endlich drei Particularlösungen u, v, w von (1) *bekannt*, so kennen wir die Zuordnung gewisser Punktetripel auf den Geraden $z = \text{Const.}$ Da eine projective Transformation völlig bestimmt ist, sobald drei gegebenen Punkten drei andere gegebene Punkte entsprechen (siehe Satz 1, § 1 des 5. Kap.), so ist in diesem Falle die ganze projective Zuordnung bekannt, d. h. alle Integralcurven ergeben sich ohne Quadratur. In der That, wenn ω die allgemeine Lösung ist, so ist nach dem Früheren

$$\frac{\omega - u}{\omega - v} : \frac{w - u}{w - v} = \text{Const.}$$

und hieraus lässt sich ω sofort berechnen. Also gilt der bekannte

Satz 3: *Kennt man von einer Riccati'schen Differentialgleichung drei Particularlösungen, so findet man die allgemeine Lösung ohne jede Quadratur.*

Unsere begrifflichen Darlegungen zeigen, dass der innere Grund für die Sätze 1, 2, 3 darin liegt, dass die Riccati'sche Differentialgleichung projective Zuordnungen zwischen den Punktreihen auf den Geraden $z = \text{Const.}$ herstellt. Umgekehrt ist jede Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dz} = \varphi(\omega, z),$$

deren Integralcurven die Geraden $z = \text{Const.}$ der (ω, z)-Ebene in

projectiven Punktreihen schneiden, eine Riccati'sche, denn es muss das Increment

$$d\omega = \varphi(\omega, z)\,dz$$

für ω projectiv, d. h. φ eine ganze Function zweiten Grades in ω sein, deren Coefficienten noch z enthalten können. Wir sprechen dies so aus *):

Allgemeiner Satz üb. die Riccati'sche Diffgl.

Satz 4: *Liegt eine continuirliche Schar von ∞^1 einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten vor, deren Elemente projectiv auf einander bezogen sind, so findet man die ∞^1 Mannigfaltigkeiten, die von einander zugeordneten Elementen erzeugt werden, durch Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung.*

Beispiele.

1. Beispiel: Je vier Orthogonalcurven der Geraden einer abwickelbaren Fläche schneiden bekanntlich auf allen Geraden Punkte mit demselben Doppelverhältnis aus. Die Orthogonalcurven stellen also projective Beziehungen zwischen den Punkten aller Geraden der Fläche her, werden daher durch eine Riccati'sche Differentialgleichung bestimmt.

2. Beispiel: Ist auf einer Fläche eine Schar von ∞^1 geodätischen Linien bekannt, so weiss man, dass je zwei ihrer Orthogonalcurven auf allen ∞^1 Linien gleichlange Bogen abschneiden. Bezeichnen wir die Bogenlänge auf den geodätischen Linien mit ω, so werden durch die Orthogonalcurven solche Zuordnungen der Punkte (ω) der geodätischen Linien hergestellt, dass sie die Form $\omega' = \omega +$ Const. erhalten. Die ∞^1 Orthogonalcurven werden daher durch sine Riccati'sche Gleichung (1) bestimmt, bei der das Symbol Uf die Translation in ω ist, sodass die Differentialgleichung die Form hat

$$\frac{d\omega}{dz} = \lambda(z).$$

Eine Quadratur giebt also die gesuchten Curven**). Ist insbesondere eine Orthogonalcurve schon bekannt, so findet man alle ohne jede Quadratur.

3. Beispiel: Die ∞^1 krummen Haupttangentencurven einer Regelfläche schneiden die Geraden der Fläche bekanntlich in constanten

*) So viel wir wissen, kommt dieser Satz zuerst bei Bonnet vor, erst später bei Clebsch. Darboux hat zuerst die Idee gehabt, die Betrachtungen auf n Dimensionen auszudehnen; er hat sich aber darauf beschränkt, nur einige darauf bezügliche Sätze abzuleiten. (Siehe Comptes Rendus 1880.)

**) Von Interesse ist es übrigens, zu bemerken, dass man dieses Ergebniss auch durch eine ganz andere Betrachtung durch Aufsuchung des Integrabilitätsfactors bestimmen kann.

Doppelverhältnissen. Daher werden sie durch eine Riccati'sche Differentialgleichung bestimmt*). — Wenn man insbesondere eine Regelfläche dadurch herstellt, dass man durch die Punkte einer Raumcurve nach irgend einem Gesetze Geraden in den zugehörigen Schmiegungsebenen zieht, so besitzt die Regelfläche die Raumcurve zur Haupttangentencurve. Daher sind alle Haupttangentencurven nach Satz 1 durch zwei successive Quadraturen zu bestimmen.

§ 2. System von zwei linearen Differentialgleichungen.

System von zwei lin. hom. Diffgln. in x, y, z.

Wir wollen nun die Riccati'sche Gleichung (1) auf ein *System von zwei simultanen linearen homogenen Differentialgleichungen* zurückführen. Zu diesem Zweck führen wir zwei Veränderliche x und y ein, indem wir

$$\omega = \frac{y}{x}$$

setzen und uns im Übrigen die Verfügung über x und y, die wir wie ω als Functionen von z auffassen, vorbehalten. Es ist

$$x^2 \frac{d\omega}{dz} = x\frac{dy}{dz} - y\frac{dx}{dz},$$

also nach (1):

$$x\frac{dy}{dz} - y\frac{dx}{dz} = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

oder, wenn wir unter $\lambda(z)$ eine willkürlich gewählte Function von z verstehen:

$$x\left(\frac{dy}{dz} - Ax - \lambda y\right) - y\left(\frac{dx}{dz} + (B-\lambda)x + Cy\right) = 0.$$

Da nun das Verhältnis von y und x einer Function $\omega(z)$ gleichgesetzt war, so können wir unter x eine beliebige Function von z verstehen, insbesondere eine, welche die zweite Klammer in der letzten Gleichung zum Verschwinden bringt. Dann muss notwendig die andere Klammer auch Null sein. Es giebt demnach zwei Functionen x und y von z, deren Verhältniss $\frac{y}{x}$ die Riccati'sche Differentialgleichung (1) erfüllt, und die selbst den beiden Differentialgleichungen genügen:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = (\lambda - B)x - Cy, \\ \dfrac{dy}{dz} = \qquad Ax + \lambda y. \end{cases}$$

*) Zuerst von Bonnet ausgesprochen.

Wenn x und y dieses simultane System erfüllen, so ist $\omega \equiv \frac{y}{x}$ eine Lösung der Riccati'schen Gleichung (1).

Diese — übrigens längst bekannte — Ersetzung der Riccati'schen Differentialgleichung (1) durch das simultane System (7) kommt im wesentlichen darauf hinaus, dass die eine Veränderliche ω durch zwei *homogene* Veränderliche x, y ersetzt worden ist. Ist x_1, y_1 ein particulares Lösungensystem von (7), so ist auch cx_1, cy_1 ein solches, wenn c irgend eine Constante bedeutet. Sind x_1, y_1 und x_2, y_2 zwei Particularsysteme, sodass $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{y_1}{y_2}$ sich nicht auf dieselbe Constante reducieren, so ist:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

das allgemeine Lösungensystem, denn es enthält zwei wesentliche willkürliche Constanten c_1, c_2. Alsdann ist

$$\omega = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 x_1 + c_2 x_2} = \frac{y_1 + \varkappa y_2}{x_1 + \varkappa x_2}$$

die allgemeine Lösung der Riccati'schen Gleichung. Sind $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ vier Werte der Constanten, zu denen die Lösungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ gehören, so ist offenbar:

$$(\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4) = (\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4),$$

also constant, was wir früher anders bewiesen haben.

Geom. Deutung d. Systems.

Wir wenden uns zur geometrischen Deutung des Systems (7), das wir von jetzt ab so schreiben wollen:

$$\frac{dx}{dz} = \alpha x + \beta y, \quad \frac{dy}{dz} = \gamma x + \delta y. \tag{8}$$

Hierin bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewisse Functionen von z allein.

Es mögen x, y, z gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume sein. Alsdann stellt jedes Lösungensystem

$$x = x_1(z), \quad y = y_1(z) \tag{9}$$

Integralcurve.

von (8) eine Curve in diesem Raume dar. Wir nennen sie eine *Integralcurve.* Deren giebt es insgesammt ∞^2:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2, \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2. \tag{10}$$

Die ∞^2 Curven werden die Ebene $z = z_0$ in ihren ∞^2 Punkten, ebenso eine allgemeine Ebene $z =$ Const. in ihren ∞^2 Punkten schneiden. Sie stellen mithin eine Zuordnung der Punkte dieser beiden Ebenen zu einander her. Um ihren Ausdruck zu finden, wollen wir annehmen, die particularen Lösungen x_1, y_1 und x_2, y_2 nehmen für $z = z_0$ die Werte

x_1^0, y_1^0 und x_2^0, y_2^0 an. Auch soll (x^0, y^0) der Schnittpunkt der Ebene $z = z_0$ mit der Curve (10) sein. Wenn wir dann aus

$$x^0 = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0, \quad y^0 = c_1 x_1^0 + c_2 y_2^0$$

die Werte von c_1 und c_2 berechnen und in (10) einsetzen, so erhalten wir x und y offenbar ausgedrückt in der Form:

$$x = \lambda(z) x^0 + \mu(z) y^0, \quad y = \varrho(z) x^0 + \sigma(z) y^0.$$

Hiermit ist der dem Punkte (x^0, y^0) der Ebene $z = z_0$ entsprechende Punkt (x, y) der allgemeinen Ebene (z) bestimmt. Die Zuordnung zwischen den Punkten beider Ebenen ist nach (10) eine *lineare homogene Transformation.* Hieraus folgt: Alle Integralcurven, die von den Punkten einer *Geraden* der Ebene $z = z_0$ ausgehen, treffen jede Ebene $z =$ Const. in einer *Geraden.* Diese ∞^1 Integralcurven erzeugen also eine *Regelfläche,* deren Geraden in den Ebenen $z =$ Const. liegen. Wir nennen sie eine *integrierende Regelfläche.* Da ferner bei einer linearen homogenen Transformation in x, y das Wertepaar $x = y = 0$ invariant bleibt, so ist die z-Axe selbst Integralcurve. Da endlich bei linearer homogener Transformation das Unendlichferne sich entspricht und da alle Ebenen $z =$ Const. eine unendlichferne Gerade gemein haben, so können wir noch sagen: Die unendlichferne Gerade der Ebene $z =$ Const. ist Integralcurve. Sie gehört übrigens allen ∞^2 oben erwähnten Regelflächen an, da jede Gerade einer dieser Flächen die unendlichferne Gerade der Ebene $z =$ Const. schneidet. Alle Integralcurven, die von den Punkten eines *Kegelschnittes* der Ebene $z = z_0$ ausgehen, treffen jede Ebene $z =$ Const. in den Punkten eines *Kegelschnittes,* denn bei jeder projectiven Transformation geht Kegelschnitt in Kegelschnitt über, u. s. w.

Lin. hom. Trf.

Regelfläche v. Integralcurven.

Angenommen, wir kennten alle erwähnten ∞^2 Regelflächen, so sind uns natürlich alle ihre Schnittcurven, d. h. alle Integralcurven bekannt. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn wir nur ∞^1 Regelflächen kennen, die nicht jede Ebene $z =$ Const. nur in einem Strahlenbüschel schneiden. Denn die ∞^1 Geraden dieser Regelflächen in der Ebene $z =$ Const. werden sich je ∞^2 Punkten treffen, die Schnittlinien der ∞^2 Regelflächen sind demnach alle ∞^2 Integralcurven. Kennen wir ∞^1 Regelflächen, die jede Ebene $z =$ Const. in einem Strahlenbüschel schneiden, die also nur *eine* Curve gemein haben, so können wir auch dann noch die in ihnen gelegenen Integralcurven, also alle ∞^2 Integralcurven, und zwar durch Quadratur, bestimmen.

Fassen wir nämlich eine dieser Regelflächen ins Auge. Sie wird die Ebene $z = z_0$ in einer Geraden g_0, die Ebene $z =$ Const. allgemein in einer Geraden g schneiden. Die ∞^1 Punkte der Geraden g

sind denen der Geraden g_0 vermöge der in der Fläche verlaufenden Integralcurven projectiv zugeordnet. Mithin bestimmen sich die ∞^1 Integralcurven in der Fläche durch eine Riccati'sche Gleichung, nach Satz 4 des § 1. Es sind uns aber schon zwei dieser Curven bekannt, nämlich einmal die unendlichferne Gerade aller Ebenen $z =$ Const. und dann die allen ∞^1 Regelflächen gemeinsame Curve. Nach Satz 2 des § 1 finden wir also alle ∞^1 Curven durch eine Quadratur.

Die Regelflächen durch d. z-Axe.

Wir wollen nun insbesondere die ∞^1 Regelflächen bestimmen, welche die z-Axe enthalten, die ja Integralcurve ist.

Bekanntlich geht aus dem simultanen System (8) die ursprüngliche Riccati'sche Gleichung wieder hervor, wenn man die Differentialgleichung für die Function

$$\omega = \frac{y}{x}$$

aufstellt. Deuten wir dies geometrisch: In der Ebene $z = z_0$ legen wir durch die z-Axe eine Gerade, deren Winkel mit der x-Axe die Tangente $\omega(z_0)$ habe. Dadurch wird dann auch in jeder Ebene $z =$ Const. die zugeordnete Gerade durch die z-Axe festgelegt, deren Winkel mit der x-Axe die Tangente $\omega(z)$ hat. Alle diese Geraden bilden eine Regelfläche von Integralcurven. ω und z lassen sich als die Coordinaten dieser Geraden auffassen.

Die Integration der ursprünglichen Riccati'schen Gleichung kommt also factisch darauf hinaus, alle die z-Axe enthaltenden von Integralcurven des Systems (8) gebildeten Regelflächen zu finden. Die vollständige Integration des Systems (8) verlangt alsdann, wie wir bemerkten, noch eine Quadratur (mit einer willkürlichen Constanten im Differential), um die Integralcurven in einer solchen Regelfläche zu bestimmen. Die Riccati'sche Gleichung ersetzt also nicht vollständig das simultane System (8). Wir erkennen dies auch daraus, dass bei seiner Bildung eine ganz willkürlich wählbare Function $\lambda(z)$ auftrat. Die zum Systeme (8) gehörige Riccati'sche Gleichung ergiebt sich übrigens wegen:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2\,dz}$$

in der Gestalt:

$$\frac{d\omega}{dz} = \gamma + (\delta - \alpha)\omega - \beta\omega^2. \tag{11}$$

Dass die Differentialgleichung für die Regelflächen, welche die z-Axe enthalten, gerade eine Riccati'sche sein muss, ist auch begrifflich zu erklären: Fassen wir in allen ∞^1 Ebenen $z =$ Const. alle ∞^1 Strahlenbüschel ins Auge, die von der z-Axe ausgehen. Ihre Strahlen sind einander durch das System (8) wegen (10) projectiv zugeordnet.

Zusammengehörige Strahlen bilden eine der fraglichen Regelflächen. Nach Satz 4 des § 1 bestimmen sie sich aus einer Riccati'schen Gleichung.

System v. zwei lin. Diffgln.

Betrachten wir jetzt das nicht homogene, aber doch lineare System:

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dz} = \alpha x + \beta y + \eta, \\ \frac{dy}{dz} = \gamma x + \delta y + \vartheta, \end{cases}$$

in dem α, β, γ, δ, η, ϑ gegebene Functionen von z bedeuten. Dies System wird durch ∞^2 *Integralcurven* im Raume (x, y, z) integrirt. Die Integralcurve, welche die Ebene $z = z_0$ im Punkte (x^0, y^0) schneidet, treffe die allgemeine Ebene $z =$ Const. im Punkte (x, y). Dadurch wird eine Zuordnung der Punkte der Ebene $z =$ Const. zu denen der Ebene $z = z_0$ hergestellt. Die Art dieser Zuordnung erkennt man sofort. Die Integralcurve geht nämlich dadurch hervor, dass man beständig auf den Punkt (x, y, z) eine infinitesimale Transformation ausübt, bei der die Coordinaten x, y die Incremente

$$dx = (\alpha x + \beta y + \eta) dz, \quad dy = (\gamma x + \delta y + \vartheta) dz$$

erfahren, wenn z das Increment dz erhält. Von Ebene zu Ebene werden sich diese Incremente ändern, da z variiert. Aber immer liegt eine infinitesimale lineare Transformation in x, y vor. Wenn man aber unendlich viele infinitesimale Transformationen der linearen Gruppe in x, y ausübt, so ist das Ergebnis einer einzigen Transformation der linearen Gruppe, also wieder einer linearen Transformation in x, y äquivalent. Mithin drücken sich die Coordinaten x, y des Punktes, in dem die durch den Punkt (x^0, y^0) der Ebene $z = z_0$ gehende *Integralcurve* die Ebene (z) schneidet, in der Weise aus:

$$x = \varrho x^0 + \sigma y^0 + \tau, \quad y = \varphi x^0 + \psi y^0 + \chi.$$

Dabei aber sind die Coefficienten ϱ, σ, τ, φ, ψ, χ gewisse uns unbekannte Functionen von z.

Man sieht, auch jetzt sind die Beziehungen zwischen den Punkten der Ebenen $z =$ Const. lineare, aber nicht mehr homogene. Es ist also wieder die unendlichferne Gerade der Ebenen $z =$ Const. eine Integralcurve, nicht aber die z-Axe. Wieder erzeugen alle Integralcurven, die von den Punkten einer Geraden in der Ebene $z = z_0$ ausgehen, eine *Regelfläche*. Kennen wir ∞^1 dieser Regelflächen, die sich nicht nur in einer Curve schneiden, so kennen wir alle ∞^2 Integralcurven als ihre Schnittlinien.

Bestimmung der integrierenden Regelfläch.

Eine solche Regelfläche können wir uns in der Form geschrieben denken

$$(13) \qquad y = \lambda x + \nu,$$

in der λ und ν noch unbekannte Functionen von z sind. Es folgt hieraus durch Differentiation nach z:

$$\frac{dy}{dz} - \lambda \frac{dx}{dz} - x \frac{d\lambda}{dz} - \frac{d\nu}{dz} = 0.$$

Tragen wir hier die Werte (12) ein, so erhalten wir:

$$\gamma x + \delta y + \vartheta - \lambda(\alpha x + \beta y + \eta) - x \frac{d\lambda}{dz} - \frac{d\nu}{dz} = 0.$$

(13) ist eine von Integralcurven gebildete Regelfläche, sobald die letzte Gleichung vermöge (13) identisch besteht, d. h. sobald

$$\frac{\gamma - \alpha\lambda - \frac{d\lambda}{dz}}{-\lambda} = \frac{\delta - \beta\lambda}{1} = \frac{\vartheta - \eta\lambda - \frac{d\nu}{dz}}{-\nu}$$

ist. Dies aber sind für λ, ν die beiden Differentialgleichungen:

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dz} = \gamma + (\delta - \alpha)\lambda - \beta\lambda^2, \\ \dfrac{d\nu}{dz} = \vartheta - \eta\lambda + \delta\nu - \beta\lambda\nu. \end{cases}$$

Hat man dies simultane System integriert, so sind auch unsere Regelflächen (13) und damit auch alle Integralcurven von (12) gefunden. Insbesondere ist nun die erste Gleichung (14) eine Riccati'sche in λ und z_1. Ist sie integriert, so setzen wir den Wert von λ in die zweite Gleichung (14) ein und erhalten dadurch eine *lineare* Gleichung in ν und z, deren Integration zwei successive Quadraturen erfordert. *Die Integration des simultanen linearen Systems* (12) *ist also auf die Integration einer Riccati'schen Gleichung und zwei successive Quadraturen zurückzuführen.*

Reduction von d'Alembert.

Die soeben benutzte Reduction rührt von d'Alembert her. Ihr innerer Grund ist dieser. Die unendlichferne Gerade der Ebenen $z =$ Const. ist gemeinsame Integralcurve. Da in jeder Ebene die unendlichfernen Punkte als die Richtungen der Geraden

$$y = \lambda x + \nu$$

charakterisiert werden können, diese aber durch λ bestimmt werden, so folgt: Die ∞^1 Richtungen λ in jeder Ebene $z =$ Const. sind auf die in der Ebene $z = z_0$ projectiv bezogen. Man findet demnach nach Satz 4 des § 1 alle einander zugeordneten durch Integration einer Riccati'schen Gleichung. Es ist das die erste Gleichung (14).

§ 3. Verallgemeinerung der Riccati'schen Differentialgleichung, System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen.

Es liegt eine weitere Verallgemeinerung des Systems (12) äusserst nahe. Anstatt nämlich wie dort den Grössen dx, dy die Form der Incremente von x, y bei einer infinitesimalen linearen Transformation zu geben, erteilen wir ihnen die Form der Incremente bei einer infinitesimalen projectiven Transformation überhaupt. Wir betrachten also das simultane System:

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = A + Cx + Dy + Hx^2 + Kxy, \\ \dfrac{dy}{dz} = B + Ex + Gy + Hxy + Ky^2, \end{cases}$$

in dem A, B, C, D, E, G, H, K gegebene Functionen von z darstellen sollen.

Verallgem. d. Riccati-schen Diffgl.

Wir nennen jedes derartige System eine *Verallgemeinerung der Riccati'schen Differentialgleichung.*

Zunächst wollen wir einmal wieder z als Zeit, x, y als Punktcoordinaten in der Ebene deuten. Alsdann stellen die Gleichungen (15) eine infinitesimale projective Transformation

$$Uf \equiv (A + Cx + Dy + Hx^2 + Kxy)\frac{\partial f}{\partial x} + \\ + (B + Ex + Gy + Hxy + Ky^2)\frac{\partial f}{\partial y}$$

dar, die vom Moment z an im nächsten Zeitelement dz auf die Punkte der (x, y)-Ebene ausgeführt wird. Ein Punkt, der zu einem bestimmten Anfangsaugenblick $z = z_0$ etwa die Lage (x_0, y_0) hat, wird durch die continuierliche Ausführung solcher mit der Zeit z veränderlicher infinitesimaler projectiver Transformationen Uf im Verlaufe der Zeit z in eine Lage (x, y) gebracht. Die Gleichungen (15) integrieren, heisst, diese Lage (x, y) durch x_0, y_0 und z ausdrücken. Da die Aufeinanderfolge einer Reihe von projectiven Transformationen einer ebenfalls projectiven Transformation äquivalent ist, so folgt, dass sich x, y linear gebrochen durch x_0, y_0 ausdrücken werden. Das allgemeine Lösungensystem von (15) hat somit die Form:

$$x = \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3}, \quad y = \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3},$$

in der die A, B, C noch unbekannte Functionen von z sind. x_0, y_0 spielen die Rolle der Integrationsconstanten.

Deuten wir nunmehr x, y, z als gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume, so stellen diese Gleichungen, wenn man x_0, y_0 in ihnen bestimmt wählt, sodass sie ein particulares Lösungensystem repräsentieren, eine Curve im Raume, eine *Integralcurve* dar, die vom Punkte (x_0, y_0) der Ebene $z = z_0$ ausgeht, Alle ∞^2 Integralcurven schneiden die Ebenen $z =$ Const. in allen ihren Punkten und stellen also Zuordnungen zwischen den Punkten dieser Ebenen her. Die Form der letzten Gleichungen zeigt, dass diese Zuordnungen *projectiv* sind.

Integralcurve.

Auch jetzt bilden, da hiernach jeder Geraden der Ebene $z = z_0$ eine Gerade jeder der Ebenen $z =$ Const. entspricht, alle Integralcurven, die von den Punkten einer Geraden der Ebene $z = z_0$ ausgehen, eine integrierende *Regelfläche,* die jede Ebene $z =$ Const. in einer Geraden schneidet. Es wird aber jetzt — sobald in (15) die Functionen H und K nicht beide identisch verschwinden — die unendlichferne Gerade der Ebenen $z =$ Const. nicht mehr als Integralcurve aufzufassen sein, denn bei einer allgemeinen projectiven Transformation entspricht die unendlichferne Gerade nicht sich selbst.

Integrierende Regelfläche.

Wenn eine integrierende Regelfläche von vornherein bekannt ist, etwa diese:

Eine Regelfläche sei bekannt.

$$y = \lambda x + \nu,$$

bei der λ, ν bekannte Functionen von z sind, so können wir das jetzige System (15) auf ein lineares zurückführen. Alsdann nämlich sind die Geraden

$$y - \lambda x - \nu = 0$$

der Ebenen $z =$ Const. einander vermöge der infinitesimalen projectiven Transformationen Uf zugeordnet. Durch geeignete projective Coordinatenänderung in jeder der Ebenen können wir diese Gerade ins Unendlichferne verlegen. Eine solche Coordinatenänderung ist diese:

$$x' = \frac{x}{y - \lambda x - \nu}, \quad y' = \frac{1}{y - \lambda x - \nu}.$$

Führen wir also statt x, y diese Veränderlichen x', y' in das System (15) ein, so muss bei dem hervorgehenden System die Zuordnung der Punkte der Ebenen $z =$ Const. überall linear sein, indem die Regelfläche

$$y = \lambda x + \nu$$

nunmehr ins Unendlichferne $x' = \infty$, $y' = \infty$ versetzt worden ist. Dann aber liegt wieder der zuletzt in § 2 besprochene Fall vor: Uf wird linear, und das System in x', y', z' ist linear. Wir überlassen es dem Leser, dies zu verificieren. Man hat dabei zu beachten, dass

$y = \lambda x + \nu$ eine integrierende Regelfläche von (15) sein soll, also vorauszusetzen ist, dass die Gleichung

$$B + Ex + Gy + Hxy + Ky^2 = \lambda(A + Cx + Dy + Hx^2 + Kxy) + \\ + \lambda' x + \nu'$$

vermöge $y = \lambda x + \nu$ identisch bestehe für alle Werte von z und x.

System von drei lin. hom. Diffgln.

Das System (15), die Verallgemeinerung der Riccati'schen Differentialgleichung, wollen wir nun auf ein *System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen* durch ein Verfahren zurückführen, das analog der Reductionsmethode der Riccati'schen Differentialgleichung auf zwei simultane lineare homogene Differentialgleichungen ist. Wir führen nämlich statt x, y drei homogene Veränderliche x_1, x_2, x_3 ein, deren Verhältnisse

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

seien. Dann ist:

$$x_3 \frac{dx_1}{dz} - x_1 \frac{dx_3}{dz} = x_3{}^2 \frac{dx}{dz},$$

$$x_3 \frac{dx_2}{dz} - x_2 \frac{dx_3}{dz} = x_3{}^2 \frac{dy}{dz}.$$

Setzen wir hierin die Werte (15) ein, so kommt:

$$x_3 \frac{dx_1}{dz} - x_1 \frac{dx_3}{dz} = Ax_3{}^2 + Cx_1 x_3 + Dx_2 x_3 + Hx_1{}^2 + Kx_1 x_2,$$

$$x_3 \frac{dx_2}{dz} - x_2 \frac{dx_3}{dz} = Bx_3{}^2 + Ex_1 x_3 + Gx_2 x_3 + Hx_1 x_2 + Kx_2{}^2.$$

Da wir bisher nur über die Verhältnisse von x_1, x_2, x_3 verfügt haben, so können wir unter Einführung einer beliebigen Function $\lambda(z)$ festsetzen, dass

$$\frac{dx_1}{dz} = Ax_3 + (C - \lambda)x_1 + Dx_2$$

sein soll. Dann wird

$$\frac{dx_3}{dz} = -\lambda x_3 - Hx_1 - Kx_2$$

und

$$\frac{dx_2}{dz} = \quad Bx_3 + Ex_1 + (G - \lambda)x_2.$$

Wir erhalten also dann *ein System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen* von der allgemeinen Form:

$$(16)\qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{dz} = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dz} = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dz} = \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{cases}$$

Ist das System integrabel, so gilt dasselbe vom System (15), aber nicht umgekehrt, denn ist (15) integriert, so kennt man nur die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_3}$ und $\frac{x_2}{x_3}$ als Functionen von z, kennt also

$$x_1 = \varrho x, \quad x_2 = \varrho y, \quad x_3 = \varrho$$

bis auf die noch unbekannte Function ϱ von z. Um diese zu bestimmen, setzen wir diese Werte in eine der Gleichungen (16) ein. Dies liefert für ϱ eine lineare homogene Differentialgleichung, aus der sich also ϱ durch eine Quadratur bestimmt.

Wir wollen uns nun weiterhin mit dem homogenen System (16) und seiner Integration beschäftigen.

Soeben hatten wir x_1, x_2, x_3 als homogene Coordinaten in der Ebene $z =$ Const. vermöge

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y$$

eingeführt. Also das dem homogenen Coordinatensystem zu Grunde liegende Dreieck hatten wir in specieller Weise gewählt. Nichts aber hindert uns nun, wo wir zu dem System (15) doch nicht zurückkehren wollen, bei dem vorgelegten System (16) x_1, x_2, x_3 als irgendwelche homogene Coordinaten in den Ebenen $z =$ Const. zu betrachten, also das Coordinatendreieck in jeder Ebene beliebig zu wählen. Wir werden später durch passende Wahl der Coordinatendreiecke öfters Vereinfachungen erzielen.

Ist x_1', x_2', x_3' ein particulares Lösungensystem von (16), so ist auch

$$x_1 = c_1 x_1', \quad x_2 = c_1 x_2', \quad x_3 = c_1 x_3'$$

ein solches, wenn c_1 eine beliebige Constante bedeutet. Sind

$$x_i = x_i', \quad x_i = x_i'', \quad x_i = x_i''' \quad (i = 1, 2, 3)$$

drei particulare Lösungensysteme, doch so, dass zwischen ihnen keine Gleichungen

$$\begin{aligned} a x_1' + b x_1'' + c x_1''' &= 0, \\ a x_2' + b x_2'' + c x_2''' &= 0, \\ a x_3' + b x_3'' + c x_3''' &= 0 \end{aligned}$$

mit constanten Coefficienten a, b, c bestehen, so ist:

Allg. Lösungensyst. durch drei partic. ausgedr.

$$(17) \qquad x_i = c_1 x_i' + c_2 x_i'' + c_3 x_i''' \quad (i = 1, 2, 3)$$

das *allgemeinste Lösungensystem, ausgedrückt durch drei beliebige particulare.*

Wenn wir wieder wie früher als Integrationsconstanten die Anfangswerte x_1^0, x_2^0, x_3^0 von x_1, x_2, x_3 in der Ebene $z = z_0$ wählen, so haben wir aus den Gleichungen (17) nach der Substitution $z = z_0$ die Constanten c_1, c_2, c_3 zu berechnen und dann in (17) einzusetzen. Dadurch ergeben sich die Integralgleichungen in der vorauszusehenden Form einer linearen homogenen Transformation:

$$x_i = f_{i1}(z)x_1^0 + f_{i2}(z)x_2^0 + f_{i3}(z)x_3^0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Es ist zu beachten, dass sich die Begriffe Integralcurve und particulares Lösungensystem jetzt nicht mehr decken, weil für die Integralcurve nur die Verhältnisse von x_1, x_2, x_3 in betracht kommen. Die Gleichungen

$$x_1 = \lambda_1(z), \quad x_2 = \lambda_2(z), \quad x_3 = \lambda_3(z)$$

stellen eine Integralcurve dar, sobald die aus ihnen sich ergebenden Werte der *Verhältnisse* von $\frac{dx_1}{dz}$, $\frac{dx_2}{dz}$, $\frac{dx_3}{dz}$ den durch (16) bestimmten Werten dieser Verhältnisse gleichkommen. Es existiert alsdann ein gewisses particulares Lösungensystem

$$x_1 = \varrho\lambda_1(z), \quad x_2 = \varrho\lambda_2(z), \quad x_3 = \varrho\lambda_3(z).$$

Die unbekannte Function ϱ von z bestimmt sich aus einer der Gleichungen (16) durch eine Quadratur.

Obgleich unsere geometrische Interpretation hiernach keine vollkommen bestimmte ist, so wird uns gerade diese Vieldeutigkeit späterhin von Vorteil werden.

Eine Integralcurve sei bekannt.

Angenommen, *eine Integralcurve*

$$x_1 = \lambda(z)x_3, \quad x_2 = \mu(z)x_3$$

sei bekannt. Sie trifft die Ebenen $z =$ Const. in zugeordneten Punkten. Diese Punkte sind die Mittelpunkte von Strahlenbüscheln in den Ebenen $z =$ Const., und die Büschel sind einander projectiv zugeordnet. Hieraus folgt nach Satz 4 des § 1, dass sich die Regelflächen, welche die gegebene Integralcurve enthalten, aus einer Riccati'schen Gleichung oder — bei homogenen Coordinaten — aus einem System von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen bestimmen lassen.

In der That kann man dies auch rechnerisch einsehen: Wir wählen in der allgemeinen Ebene $z =$ Const. ein neues Coordinatensystem

$(y_1 : y_2 : y_3)$ so, dass die Ecke $y_1 = y_2 = 0$ auf der gegebenen Integralcurve liegt. Die dazu nötigen Formeln haben allgemein die Gestalt:

$$y_k = \psi_{k1}x_1 + \psi_{k2}x_2 + \psi_{k3}x_3 \quad (k = 1, 2, 3), \tag{18}$$

in der die ψ_{kj} Functionen von z bedeuten. Insbesondere sollen nach unserer Voraussetzung y_1 und y_2 für $x_1 = \lambda x_3$, $x_2 = \mu x_3$ Null sein. Wir wählen daher die ψ so als Functionen von z, dass erstens natürlich ihre Determinante

$$\Sigma \pm \psi_{11}\psi_{22}\psi_{33} \mathrel{\not\equiv} 0$$

ist und dass zweitens

$$\lambda\psi_{11} + \mu\psi_{12} + \psi_{13} \equiv 0,$$
$$\lambda\psi_{21} + \mu\psi_{22} + \psi_{23} \equiv 0$$

wird. Führen wir die neuen Coordinaten (18) in das System (16) ein, so nimmt es zunächst die allgemeine Form an:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dz} &= \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3, \\ \frac{dy_2}{dz} &= \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2 + \beta_{23}y_3, \\ \frac{dy_3}{dz} &= \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Aber jetzt ist $y_1 = y_2 = 0$ eine Integralcurve, d. h. es ist $\beta_{13} \equiv \beta_{23} \equiv 0$, sodass das transformierte System die Form hat:

$$\frac{dy_1}{dz} = \beta_{11}y_1 + \beta_{12}y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dz} = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2,$$

$$\frac{dy_3}{dz} = \beta_{31}y_1 + \beta_{32}y_2 + \beta_{33}y_3.$$

Die beiden ersten Gleichungen bilden ein System für sich. Sie bestimmen die durch die bekannte Integralcurve gehenden integrierenden Regelflächen und werden durch eine Riccati'sche Gleichung und eine Quadratur erledigt, während die letzte Gleichung noch zwei Quadraturen verlangt.

Zwei Integralcurven seien bekannt.

Sind zwei Integralcurven bekannt:

$$x_1 = \lambda(z)x_3, \quad x_2 = \mu(z)x_3;$$
$$x_1 = \sigma(z)x_3, \quad x_2 = \tau(z)x_3,$$

so sind wieder die Strahlenbüschel in den Ebenen $z =$ Const., deren Mittelpunkte auf einer der beiden Curven liegen, einander projectiv zugeordnet, sodass sich die integrierenden Regelflächen durch eine der Curven nach Satz 4 aus einer Riccati'schen Gleichung bestimmen. Hier ist uns aber eine dieser integrierenden Regelflächen schon bekannt,

nämlich die, welche die beiden Curven enthält. Nach Satz 1 des § 1 ergeben sich daher die Regelflächen durch die Curven vermöge je zweier successiver Quadraturen. Damit sind alsdann auch alle Integralcurven gefunden, als Schnitte dieser Flächen. Die Bestimmung aller *Lösungen* des Systems (16) erfordert also nur noch eine letzte Quadratur.

Rechnerisch führt man diese Reduction durch, indem man solche neue homogene Coordinaten y_1, y_2, y_3 in den Ebenen $z =$ Const. vermöge eines Gleichungensystems (18) einführt, dass die Ecken der Coordinatendreiecke: $y_1 = y_2 = 0$ und $y_1 = y_3 = 0$ auf den gegebenen Integralcurven liegen. Man wird also in (18) die ψ_{kj}, deren Determinante nicht Null sein darf, irgendwie so als Functionen von z wählen, dass

$$\lambda\psi_{11} + \mu\psi_{12} + \psi_{13} \equiv 0,$$
$$\lambda\psi_{21} + \mu\psi_{22} + \psi_{23} \equiv 0;$$

$$\sigma\psi_{11} + \tau\psi_{12} + \psi_{13} \equiv 0,$$
$$\sigma\psi_{31} + \tau\psi_{32} + \psi_{33} \equiv 0$$

wird. Das durch Einführung von y_1, y_2, y_3 alsdann hervorgehende System (19) besitzt die Integralcurven $y_1 = y_2 = 0$ und $y_1 = y_3 = 0$, sodass $\beta_{13} \equiv \beta_{23} \equiv 0$, sowie $\beta_{12} \equiv \beta_{32} \equiv 0$ wird. Es hat also die Form:

$$\frac{dy_1}{dz} = \beta_{11}y_1,$$
$$\frac{dy_2}{dz} = \beta_{21}y_1 + \beta_{22}y_2,$$
$$\frac{dy_3}{dz} = \beta_{31}y_1 \qquad + \beta_{33}y_3.$$

Die erste Gleichung wird durch eine Quadratur integriert, alsdann die zweite und dritte durch je zwei successive Quadraturen, das ganze System also durch fünf, wie wir vorhersagten.

Drei Integralcurven seien bekannt.

Sind drei Integralcurven bekannt, die nicht derselben integrierenden Regelfläche angehören, so können wir die Ecken der Coordinatendreiecke $(y_1 : y_2 : y_3)$ in ihre Schnittpunkte mit den Ebenen $z =$ Const. verlegen. Dadurch erhält das System eine Form (19), in der die drei Curven:

$$y_1 = y_2 = 0, \quad y_2 = y_3 = 0, \quad y_3 = y_1 = 0$$

Integralcurven sind. Es wird also die Gestalt haben:

$$\frac{dy_1}{dz} = \beta_{11}y_1, \quad \frac{dy_2}{dz} = \beta_{22}y_2, \quad \frac{dy_3}{dz} = \beta_{33}y_3$$

und ist durch drei von einander unabhängige Quadraturen zu integrieren. Dies folgt auch rein begrifflich, denn nach Satz 2 des § 1 erfordert

die Bestimmung der durch die erste der drei Curven gehenden integrierenden Regelflächen nur eine Quadratur, ebenso die der durch die zweite gehenden Regelflächen, denn jedesmal sind uns zwei der Regelflächen schon bekannt. Die Schnittcurven der Regelflächen sind die Integralcurven. Die *Lösungen* des Systems ergeben sich also durch noch eine dritte Quadratur.

Eine integr. Regelfläche sei bekannt.

Es möge eine integrierende Regelfläche

$$x_3 = \lambda(z)x_1 + \mu(z)x_2 \tag{20}$$

bekannt sein. Sie schneidet die Ebenen $z =$ Const. in Geraden, deren Punkte einander projectiv zugeordnet sind vermöge der in der bekannten Regelfläche gelegenen Integralcurven. Diese ∞^1 Integralcurven findet man mithin nach Satz 4 des § 1 aus einer Riccati'schen Gleichung oder einem System von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen. Dies verificiert man sofort, wenn man (20) in die beiden ersten Gleichungen (16) einsetzt. Sind die in der gegebenen Regelfläche verlaufenden Integralcurven gefunden, so greifen wir zwei unter ihnen heraus und machen sie zu den Curven $y_1 = y_2 = 0$, $y_1 = y_3 = 0$ im neuen Coordinatensystem. Dadurch kommen wir auf das vorletzte Problem zurück, dessen Erledigung noch fünf Quadraturen erforderte.

Zwei integr Regelfl. seien bekannt.

Sind zwei integrierende Regelflächen bekannt:

$$x_3 = \lambda(z)x_1 + \mu(z)x_2,$$
$$x_3 = \sigma(z)x_1 + \tau(z)x_2,$$

so kennt man von den in jeder derselben verlaufenden Integralcurven, deren Bestimmung zunächst auf die Integration Riccati'scher Gleichungen zurückkäme, je eine, nämlich die Schnittlinie beider Flächen. Nach Satz 1 erhalten wir durch je zwei successive Quadraturen alle in den beiden Fällen verlaufenden Integralcurven. Damit sind dann offenbar alle integrierenden Regelflächen bekannt, also überhaupt alle Integralcurven, sodass die vollständige Integration des Systems (16) noch eine fünfte Quadratur verlangt.

Drei integr. Regelfl. seien bekannt.

Sind drei integrierende Regelflächen bekannt, die nicht sämtlich durch dieselbe Curve gehen, so kennen wir auch drei Integralcurven, die nicht sämtlich in derselben Regelfläche liegen. Die Integration erfordert also nach dem Früheren drei von einander unabhängige Quadraturen.

Die drei soeben betrachteten Fälle stehen den vorher untersuchten insofern *dualistisch* gegenüber, als an Stelle der Punkte in den Ebenen $z =$ Const. hier die Geraden in den Ebenen treten. Integralcurve und

integrierende Regelfläche sind in diesem Sinne zu einander dualistisch. In der That kann man dieser Auffassung dadurch einen Ausdruck geben, dass man in den Ebenen $z = $ Const. homogene Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 einführt, indem man die Invarianz von:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

verlangt. Man gelangt alsdann, indem man nach den integrierenden Regelflächen fragt, zu einem System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen in u_1, u_2, u_3. Wir wollen es aber bei dieser Andeutung bewenden lassen.

Eine integr. Regelfläche und eine Integralcurve seien bekannt.

Kennt man eine integrierende Regelfläche und eine nicht in ihr gelegene Integralcurve, so führt man neue homogene Coordinaten y_1, y_2, y_3 in den Ebenen $z = $ Const. vermöge (18) derart ein, dass die eine Ecke $y_2 = y_3 = 0$ auf der bekannten Integralcurve und die Seite $y_1 = 0$ des Coordinatendreiecks eine Gerade der bekannten Regelfläche wird. Alsdann nimmt das System (16) eine neue Form (19) an, in der offenbar, da $y_2 = y_3 = 0$ Integralcurve ist, $\beta_{21} \equiv \beta_{31} \equiv 0$ und, da $y_1 = 0$ integrierende Regelfläche ist, $\beta_{12} \equiv \beta_{13} \equiv 0$ wird. Somit hat es die Form:

$$\frac{dy_1}{dz} = \beta_{11} y_1,$$

$$\frac{dy_2}{dz} = \qquad \beta_{22} y_2 + \beta_{23} y_3,$$

$$\frac{dy_3}{dz} = \qquad \beta_{32} y_2 + \beta_{33} y_3.$$

Die erste Gleichung integriert sich durch eine Quadratur. Die beiden letzten werden durch eine Riccati'sche Gleichung und eine Quadratur erledigt.

Bisher haben wir nur solche von Integralcurven erzeugte Flächen betrachtet, welche eine Ebene $z = $ Const. und mithin alle Ebenen $z = $ Const. in Geraden schneiden. Wir wollen allgemein eine von Integralcurven erzeugte Fläche eine *integrierende Fläche* nennen.

Integrierende Fläche.

Eine integr. Fläche sei bekannt.

Nehmen wir an, es sei uns eine integrierende Fläche bekannt, welche die Ebene $z = z_0$ in einer Curve c_0 schneidet, die keine infinitesimale projective Transformation in sich gestattet, die also keine selbstprojective Curve ist (vgl. § 4 des 3. Kap.). Alsdann schneiden die Ebenen $z = $ Const. die Fläche in bekannten Curven c, die ebenfalls nicht selbstprojectiv sind, da sie aus der Curve c_0 durch projective Transformation oder durch in x_1, x_2, x_3 lineare homogene Transformation hervorgehen. Es giebt nun keine continuierliche Schar

von projectiven Transformationen T_1, T_2, $T_3 \ldots$, die c_0 in eine Curve c überführen, denn sonst würde c_0 bei $T_1^{-1} T_2$, $T_1^{-1} T_3 \ldots$ invariant sein, mithin eine infinitesimale projective Transformation gestatten. Die demnach nur in discreter Anzahl vorhandenen projectiven Transformationen, die c_0 in c überführen, kann man direct bestimmen. Es ist dies nur ein Eliminationsverfahren. Diese Transformationen enthalten in ihren Coefficienten im allgemeinen z als Constante. Eine der Transformationen muss nun genau mit der übereinstimmen, die der durch das System (16) zwischen der Ebene (z_0) und der Ebene (z) hergestellten entspricht. Da die Auswahl nur unter einer discreten Anzahl stattfindet, kann man sie in jedem Falle durch Verification finden. Alsdann ist die durch die Integralcurven zwischen den Ebenen $z =$ Const. vermittelte projective Beziehung bekannt. *Daher lassen sich auch die Integralcurven ohne Quadratur durch ausführbare Operationen finden.*

Integr. durch ausführbare Operationen.

Man kann dies auch so entwickeln:

Dass die Curven c durch projective Transformation — also durch in x_1, x_2, x_3 lineare homogene Transformation — aus c_0 ableitbar sind, kann folgendermassen ausgesprochen werden: Es lassen sich in allen Ebenen $z =$ Const. solche neue homogene Coordinaten y_1, y_2, y_3 einführen, dass die Curven c sämtlich dieselbe Gleichung wie c_0 besitzen. Dies gilt übrigens auch dann, wenn die Curve c_0 selbstprojectiv ist, eine Annahme, zu der wir nachher übergehen.

Wir können also das Gleichungensystem (18) zur Einführung neuer Coordinaten y_1, y_2, y_3 so wählen, dass die Curven c in allen Ebenen $z =$ Const. dieselbe — mithin von z freie — Gleichung erhalten:

$$\omega(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Das System (16) geht somit bei Einführung von y_1, y_2, y_3 in ein System (19) über, das die integrierende Fläche $\omega = 0$ besitzt. Es ist daher

$$\frac{d\omega}{dz} = 0$$

vermöge (19) und $\omega = 0$, oder also es ist:

$$\sum_1^3{}^k (\beta_{k1} y_1 + \beta_{k2} y_2 + \beta_{k3} y_3) \frac{\partial \omega}{\partial y_k} = 0$$

vermöge $\omega = 0$. Dies lässt sich auch so aussprechen: Die *Curve c* oder $\omega = 0$ gestattet die infinitesimale projective Transformation

$$(21) \qquad \sum_1^3{}^k (\beta_{k1}y_1 + \beta_{k2}y_2 + \beta_{k3}y_3)q_k,$$

wenn $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ mit q_k bezeichnet wird. Dies widerspricht der Voraussetzung, solange nicht alle $\beta_{kj} \equiv 0$ sind. Das neue System (19) hat also die einfache Gestalt:

$$\frac{dy_1}{dz} = 0, \quad \frac{dy_2}{dz} = 0, \quad \frac{dy_3}{dz} = 0$$

und ist sofort integriert. Wir finden also nicht nur die Integralcurven, sondern auch die Lösungen des Systems ohne jede Quadratur durch ausführbare Operationen.

Die Ausnahmefälle.

Betrachten wir nunmehr die Annahme, dass die Curven c_0, c, in denen die bekannte integrierende Fläche die Ebenen $z =$ Const. trifft, selbstprojectiv sind. Nach Theorem 7, § 4 des 3. Kap., lassen sie sich auf typische Formen zurückführen. Wir wollen die einzelnen Fälle besprechen:

c_0 gestatte eine inf. proj. Trf.

Gestattet c_0 nur eine infinitesimale projective Transformation, so kann sie auf eine der beiden Formen

$$y - e^x = 0, \quad y - x^\alpha = 0$$

in nicht homogenen Coordinaten x, y gebracht werden. Also folgt, wenn wir diese Gleichungen homogen schreiben: In dem vorliegenden Falle dürfen wir annehmen, das System (16) sei schon auf eine solche Form (19) gebracht, dass es die integrierende Fläche

$$\omega \equiv y_2 - y_3 e^{\frac{y_1}{y_3}} = 0$$

oder:

$$\omega \equiv y_1{}^{-\alpha} y_2 y_3{}^{\alpha - 1} - 1 = 0$$

besitzt. Die frühere Überlegung zeigt wieder, dass alsdann die Curve $\omega = 0$ die infinitesimale projective Transformation (21) gestatten muss. Da sie nur eine gestattet, ist diese leicht aufzustellen. Wir haben dies in nicht-homogenen Coordinaten in § 4 des 3. Kap., S. 81, gethan. Danach gestattet

$$y - e^x = 0$$

diese:

$$p + yq;$$

also gestattet

$$\omega \equiv y_2 - y_3 e^{\frac{y_1}{y_3}} = 0$$

als allgemeinste infinitesimale lineare homogene in y_1, y_2, y_3 diese:

$$\varrho(y_3 q_1 + y_2 q_2) + \sigma(y_1 q_1 + y_2 q_2 + y_3 q_3).$$

(Vgl. die Tafeln in § 1 des 19. Kap., S. 503). ϱ und σ können irgend welche Functionen von z bedeuten. Vergleich mit (21) giebt die Werte der β_{kj}. Das System (19) hat daher sicher die Form angenommen:

$$\frac{dy_1}{dz} = \sigma y_1 \qquad + \varrho y_3,$$
$$\frac{dy_2}{dz} = \qquad (\varrho + \sigma) y_2,$$
$$\frac{dy_3}{dz} = \qquad \sigma y_3.$$

Die Integration dieses Systems verlangt nur die Auswertung der Integrale über ϱdz und σdz.

Die Curve ferner

$$y - x^\alpha = 0$$

gestattet, sobald, wie angenommen werden muss,

$$\alpha \neq -1,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2$$

ist, die infinitesimale projective Transformation

$$xp + \alpha yq,$$

mithin gestattet die Curve

$$\omega \equiv y_1^{-\alpha} y_2 y_3^{\alpha - 1} - 1 = 0$$

als allgemeinste infinitesimale lineare homogene Transformation in y_1, y_2, y_3 diese:

$$\varrho(y_1 q_1 + \alpha y_2 q_2) + \sigma(y_1 q_1 + y_2 q_2 + y_3 q_3),$$

sodass der Vergleich mit (21) zeigt, dass im vorliegenden Falle das System (19) die Gestalt hat:

$$\frac{dy_1}{dz} = (\varrho + \sigma) y_1, \quad \frac{dy_2}{dz} = (\alpha\varrho + \sigma) y_2, \quad \frac{dy_3}{dz} = \sigma y_3.$$

Die Integration erfordert nur die beiden Quadraturen $\int \varrho dz$ und $\int \sigma dz$.

Dass wir in diesen Fällen mit Quadraturen auskommen, hätten wir auch ohne Rechnung einsehen können: Die Curven c sind projectiv auf einander bezogen vermöge der auf der bekannten integrierenden Fläche gelegenen Integralcurven. Diese Integralcurven bestimmen sich also nach Satz 4 des § 1 durch eine Riccati'sche Gleichung. Aber wir sehen aus Theorem 7, § 4 des 3. Kap., dass die Curven c singuläre Punkte enthalten, die einander entsprechen. Der Ort dieser singulären Punkte ist also eine bekannte Integralcurve, gelegen auf der integrierenden Fläche. Die in Rede stehende Riccati'sche Gleichung

ist mithin nach Satz 1 des § 1 durch zwei Quadraturen integrierbar. Hat man dadurch alle Integralcurven auf der Fläche gefunden, so bestimmen je zwei derselben eine integrierende Regelfläche. Die Schnitte dieser Regelflächen sind alle ∞^2 Integralcurven.

c_0 gestatte mehrere inf. proj. Trf.

Wenn die Curve c_0 mehr als eine infinitesimale projective Transformation in sich gestattet, so ist sie nach Theorem 7 eine Gerade oder ein Kegelschnitt. Auch dann bestimmen sich die auf der bekannten integrierenden Fläche gelegenen Integralcurven aus einer Riccati'schen Gleichung. Wir kennen aber von vornherein keine einzelne Integralcurve auf der Fläche, da die Geraden und Kegelschnitte keine singulären Punkte haben, d. h. keine Punkte, die bei *allen* infinitesimalen projectiven Transformationen der Geraden oder Kegelschnitte in sich in Ruhe bleiben. Ist c_0 eine Gerade, so ist die bekannte Fläche eine Regelfläche. Diesen Fall haben wir schon besprochen.

c_0 sei Kegelschnitt.

Es erübrigt also nur noch der Fall, dass die gegebene integrierende Fläche die Ebenen $z =$ Const. in *Kegelschnitten* schneidet. Wir können die Kegelschnitte c sämtlich durch Einführung passender homogener Coordinaten y_1, y_2, y_3 in den Ebenen $z =$ Const. auf die Form

$$\omega \equiv y_1^2 - 2y_2y_3 = 0$$

bringen. Es soll $\omega = 0$ eine integrierende Fläche vorstellen, d. h. es muss $\frac{d\omega}{dz} = 0$ sein vermöge $\omega = 0$ und vermöge des Systems (19). Dies ergiebt ohne Mühe, dass das System (19) die Form annimmt:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dz} = (\varrho + \sigma)y_1 + \beta_{12}y_2 + \beta_{13}y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dz} = \beta_{13}y_1 + 2\varrho y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dz} = \beta_{12}y_1 + 2\sigma y_3. \end{cases}$$

Wir wissen, dass die Punkte der Kegelschnitte projectiv auf einander vermöge der Integralcurven bezogen sind und diese Integralcurven sich daher aus einer Riccati'schen Gleichung bestimmen. Um die Gleichung zu erhalten, führen wir eine Grösse u als Coordinate der Punkte der Kegelschnitte

$$y_1^2 - 2y_2y_3 = 0$$

ein, indem wir setzen:

$$y_2 = uy_1,$$

sodass auch

$$y_1 = 2uy_3$$

ist. Nach (22) wird nun aus

$$\frac{dy_2}{dz} = u\frac{dy_1}{dz} + y_1\frac{du}{dz},$$

wenn $y_2 = uy_1$ und $y_1 = 2uy_3$ eingesetzt wird, worauf sich y_1 forthebt, die Differentialgleichung für u:

$$\beta_{13} = (\sigma - \varrho)u + \beta_{12}u^2 + \frac{1}{2}\beta_{13} + \frac{du}{dz}\cdot$$

Es ist dies in der That eine Riccati'sche Differentialgleichung für u.

Gesamtergebnis bei bek. integr. Fläche.

Also hat sich ergeben:

Satz 5: *Wenn von dem simultanen System*

$$\frac{dy_k}{dz} = \beta_{k1}(z)y_1 + \beta_{k2}(z)y_2 + \beta_{k3}(z)y_3$$
$$(k = 1,\ 2,\ 3)$$

eine integrierende Fläche

$$F\left(\frac{y_1}{y_3},\ \frac{y_2}{y_3},\ z\right) = 0$$

bekannt ist, so erfordert die Integration nur Quadraturen in allen Fällen mit Ausnahme der beiden, in denen die integrierende Fläche die Ebenen $z =$ Const. in Kegelschnitten oder Geraden schneidet. In diesen beiden Fällen kommt die Integration auf die einer Riccati'schen Gleichung und auf Quadraturen zurück.

Wir könnten noch eine Reihe ähnlicher Probleme erledigen, indem wir z. B. annehmen, dass ausser einer integrierenden Fläche eine Integralcurve bekannt sei, oder drgl. Aber wir verzichten darauf, weil die Betrachtungen keine neue Schwierigkeit darbieten.

Als Grundlage diente uns bei den durchgeführten Integrationsvereinfachungen stets der Umstand, dass die Ebenen $z =$ Const. durch die Integralcurven projectiv auf einander bezogen waren, dass also mit dem System die allgemeine projective Gruppe der Ebene in enger Beziehung stand.

§ 4. Systeme von Differentialgleichungen mit Fundamentallösungen.

Zunächst wollen wir hervorheben, dass sich die im vorigen Paragraphen entwickelte Methode auf *eine allgemeine Kategorie von Systemen von Differentialgleichungen* ohne Mühe ausdehnen lässt.

System von n Diffgln.

Liegt das System von n simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1 \ldots x_n,\ z) \quad (i = 1,\ 2 \ldots n) \tag{23}$$

in $x_1 \,.\,.\, x_n$, z vor, so können wir z als die Zeit, $x_1 \,.\,.\, x_n$ als Punktcoordinaten in einem Raume von n Dimensionen deuten. Alsdann wird der Punkt $(x_1 \,.\,.\, x_n)$ vom Moment z an im nächsten Zeitelement infinitesimal transformiert, indem $x_1 \,.\,.\, x_n$ die Incremente erfahren:

$$dx_i = \eta_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ z)dz \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n).$$

Diese infinitesimale Transformation hat das Symbol:

$$Yf \equiv \sum_1^n {}_i\, \eta_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ z)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und enthält z als willkürlichen Parameter, stellt also unendlich viele infinitesimale Transformationen in $x_1 \,.\,.\, x_n$ dar.

Im vorigen Paragraphen lag nun der Fall vor, dass diese unendlich vielen infinitesimalen Transformationen Yf einer Gruppe, und zwar der linearen homogenen Gruppe in $x_1 \,.\,.\, x_n$ angehören. Wir deuten später in einigen Beispielen an, dass sich die Betrachtungsweise des vorigen Paragraphen *auf alle Systeme* (23) ausdehnen lässt, *bei denen die Yf sämtlich, d. h. bei beliebiger Wahl des Parameters z, einer endlichen continuierlichen Gruppe in $x_1 \,.\,.\, x_n$ angehören.*

Verallg. der früheren Integrationsmethoden.

Diese Kategorie von Systemen (23) besitzt noch eine merkwürdige Eigenschaft: Beim System von drei in x_1, x_2, x_3 linearen homogenen Differentialgleichungen sahen wir, dass sich das allgemeinste Lösungensystem (x) durch drei beliebig gewählte particulare Lösungensysteme (x'), (x''), (x''') in der Form

$$x_i = c_1 x_i' + c_2 x_i'' + c_3 x_i''' \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

mit willkürlichen Constanten c_1, c_2, c_3 ausdrückt. Etwas Analoges gilt von der soeben definierten Kategorie von Systemen (23). Auch bei diesen lässt sich das allgemeine Lösungensystem (x) aus einer Anzahl particularer Lösungensysteme $(x^{(1)}) \,.\,.\, (x^{(m)})$ mit willkürlichen Constanten $a_1 \,.\,.\, a_n$ herstellen:

$$x_i = \varphi_i(x_1^{(1)} \,.\,.\, x_n^{(1)},\ .\,.,\ x_1^{(m)} \,.\,.\, x_n^{(m)},\ a_1 \,.\,.\, a_n)$$
$$(i = 1,\ 2 \,.\,.\, n).$$

Um dies zu zeigen, sowie um ferner zu zeigen, dass die obige Kategorie von Systemen die allgemeinste ist, bei der eine solche Darstellung des allgemeinen Lösungensystems existiert, legen wir uns das folgende Problem vor:

Allgemeines Problem.

Gesucht wird die allgemeinste Form eines Systems von n simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1 \,.\,.\, x_n,\ z) \quad (i = 1,\ 2 \,.\,.\, n), \tag{24}$$

dem die Eigenschaft zukommen soll, dass das allgemeine Lösungensystem $x_1 \ldots x_n$ *aus* m *allgemein gewählten particularen Lösungensystemen*

$$x_1 = x_1^{(k)}, \quad \ldots x_n = x_n^{(k)} \quad (k = 1, 2 \ldots m),$$

die also Functionen von z *sind, durch ein Formelsystem*

$$x_i = \varphi_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \ldots x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)}, a_1 \ldots a_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{25}$$

mit n *(notwendig wesentlichen) willkürlichen Constanten darstellbar sei.*

System mit Fundamentallösungen.

Ein solches System heisst ein *System mit Fundamentallösungen.*

Bestimmung der Form aller Syst. mit Fundamentallösungen.

Bei einem solchen System liefert die Auflösung der Gleichungen (25) nach $a_1 \ldots a_n$ Gleichungen von der Form

$$J_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)}, x_1 \ldots x_n) = a_i \quad (i = 1, 2 \ldots n). \tag{26}$$

Daher können wir sagen: Sobald

$$\begin{cases} x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)}, \\ x_1 \quad \ldots \quad x_n \end{cases} \tag{27}$$

irgend welche $(m+1)$ Lösungensysteme der Differentialgleichungen (24) bilden, ist jede der Functionen $J_1 \ldots J_n$, die hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$ von einander unabhängig sind, eine Constante. Dies drückt sich dadurch aus, dass identisch

$$\sum_1^m{}^k \left(\frac{\partial J_i}{\partial x_1^{(k)}} \frac{dx_1^{(k)}}{dz} + \cdots + \frac{\partial J_i}{\partial x_n^{(k)}} \frac{dx_n^{(k)}}{dz} \right) + \frac{\partial J_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dz} + \cdots + \frac{\partial J_i}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dz} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

sein muss, sobald die Systeme (27) die Differentialgleichungen (24) erfüllen. Also folgt, da die Gleichungen (24) gerade die hier auftretenden Differentialquotienten nach z liefern, aber die Anfangswerte der Systeme (27) durch keinerlei Relation verknüpft sind:

Es müssen für $nm + n$ Veränderliche (27) und die eine Veränderliche z *identisch* die n Relationen bestehen:

$$\sum_1^m{}^k \left(\eta_1^{(k)} \frac{\partial J_i}{\partial x_1^{(k)}} + \cdots + \eta_n^{(k)} \frac{\partial J_i}{\partial x_n^{(k)}} \right) + \eta_1 \frac{\partial J_i}{\partial x_1} + \cdots + \eta_n \frac{\partial J_i}{d x_n} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n), \tag{28}$$

wie auch die $nm + n + 1$ Veränderlichen gewählt sein mögen. Dabei bedeuten $\eta_1^{(k)} \ldots \eta_n^{(k)}$ natürlich die Functionen $\eta_1 \ldots \eta_n$, nachdem in

ihnen die Veränderlichenreihe $x_1 \,.\,.\, x_n$ durch $x_1^{(k)} \,.\,.\, x_n^{(k)}$ ersetzt worden ist.

Es liegt nun nahe, das Symbol zu benutzen:

$$Yf \equiv \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdot\cdot + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Wenn wir darin überall $x_1 \,.\,.\, x_n$ durch $x_1^{(k)} \,.\,.\, x_n^{(k)}$ ersetzen, so sei es mit $Y^{(k)}f$ bezeichnet. Alsdann können wir die Bedingung (28) so aussprechen: Es muss

$$Y^{(1)}J_i + Y^{(2)}J_i + \cdot\cdot + Y^{(m)}J_i + YJ_i \equiv 0$$
$$(i = 1,\ 2 \,.\,.\, n)$$

sein. Oder auch endlich: Die lineare partielle Differentialgleichung

$$Uf \equiv Y^{(1)}f + Y^{(2)}f + \cdot\cdot + Y^{(m)}f + Yf = 0 \tag{29}$$

muss n von einander hinsichtlich $x_1 \,.\,.\, x_n$ unabhängige Lösungen $J_1 \,.\,.\, J_n$ besitzen, die frei von z sind.

Des Späteren wegen heben wir hervor: Wenn umgekehrt die Gleichung (29) n solche Lösungen besitzt, so folgt rückwärts, dass, sobald die $nm + n$ Veränderlichen (27) irgend welche $m + 1$ Lösungensysteme des Systems von Differentialgleichungen (24) darstellen, für sie $J_1 \,.\,.\, J_n$ constant, d. h. unabhängig von z werden.

Nun tritt z in der linearen partiellen Differentialgleichung (29) gar nicht als Veränderliche, nach der differenziert wird, auf. Ferner soll z nicht explicite in $J_1 \,.\,.\, J_n$ vorkommen. Wenn wir also der Veränderlichen z in (29) irgend einen constanten Wert beilegen, so muss die hervorgehende Gleichung immer noch die n Lösungen $J_1 \,.\,.\, J_n$ besitzen.

Indem wir z eine Reihe bestimmter Werte erteilen, können wir mithin aus (29) eine Anzahl linearer partieller Differentialgleichungen mit den $nm + n$ unabhängigen Veränderlichen (27) ableiten, die $J_1 \,.\,.\, J_n$ als Lösungen besitzen müssen. Sicher können wir so nur eine endliche Anzahl von einander unabhängiger Gleichungen erhalten. Denn z. B. s von einander unabhängige besitzen *höchstens*, nämlich wenn sie ein vollständiges System bilden, $nm + n - s$ gemeinsame von einander unabhängige Lösungen. Da aber deren n existieren, so muss sein:

$$nm + n - s \geqq n,$$

also:

$$s \leqq nm.$$

Nehmen wir an, dass wir durch Einsetzen bestimmter Werte von z, etwa der Zahlen $z_1 \,.\,.\, z_s$, in (29) gerade s von einander unabhängige

Gleichungen erhalten, so ist also s höchstens gleich nm. Der Ausdruck Yf sei, wenn darin $z = z_\sigma$ gesetzt ist, mit $Y_\sigma f$ bezeichnet. Wir haben nun die s Gleichungen:

$$(30) \qquad U_\sigma f \equiv Y_\sigma^{(1)} f + Y_\sigma^{(2)} f + \cdots + Y_\sigma^{(m)} f + Y_\sigma f = 0$$
$$(\sigma = 1, 2 \ldots s),$$

und die allgemeine Gleichung (29) mit beliebigem z muss eine Folge von diesen sein. Zu beachten ist, dass die linke Seite von (30) von z vollkommen frei ist.

Die Functionen $J_1 \ldots J_n$ sollen den Gleichungen (30) genügen. Sie erfüllen daher auch die durch Klammeroperation aus ihnen hervorgehenden:

$$(31) \qquad (U_\sigma U_\tau) = 0 \quad (\sigma, \tau = 1, 2 \ldots s).$$

Da aber $Y^{(k)} f$ nur $x_1^{(k)} \ldots x_n^{(k)}$ enthält, so ist:

$$(32) \qquad (U_\sigma U_\tau) \equiv (Y_\sigma^{(1)} Y_\tau^{(1)}) + \cdots + (Y_\sigma^{(m)} Y_\tau^{(m)}) + (Y_\sigma Y_\tau).$$

Entweder sind nun die Gleichungen (31) von den Gleichungen (30) abhängig oder nicht. Alle unabhängigen fügen wir zu (30) hinzu, und bilden abermals durch die Klammeroperationen neue Gleichungen, von denen wir die von den bisherigen unabhängigen zu (30) hinzufügen u. s. w. Angenommen, wir kommen dazu, dass sich im ganzen r von einander unabhängige Gleichungen ergeben, so ist r eine endliche Zahl, da $r \leq nm$ sein muss. Nach (32) ist jede dieser r Gleichungen — unter denen sich also auch die Gleichungen (30) selbst befinden — von der Form:

$$(33) \qquad V_\lambda f \equiv X_\lambda^{(1)} f + \cdots + X_\lambda^{(m)} f + X_\lambda f = 0$$
$$(\lambda = 1, 2 \ldots r).$$

Sie bilden ein r-gliedriges vollständiges System, da die Klammeroperation keine neuen Gleichungen liefert. Es ist also allgemein:

$$(V_\lambda V_\mu) \equiv \sum_1^r{}_\nu \psi_{\lambda\mu\nu} V_\nu f$$

oder:

$$(X_\lambda^{(1)} X_\mu^{(1)}) + \cdots + (X_\lambda^{(m)} X_\mu^{(m)}) + (X_\lambda X_\mu) \equiv$$
$$\equiv \sum_1^r{}_\nu \psi_{\lambda\mu\nu} (X_\nu^{(1)} f + \cdots + X_\nu^{(m)} f + X_\nu f)$$

oder einzeln:

$$(X_\lambda^{(k)} X_\mu^{(k)}) \equiv \sum_1^r {}_\nu \psi_{\lambda\mu\nu} X_\nu^{(k)} f \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, m),$$

$$(X_\lambda X_\mu) \equiv \sum_1^r {}_\nu \psi_{\lambda\mu\nu} X_\nu f.$$

Die $\psi_{\lambda\mu\nu}$ werden zunächst gewisse Functionen aller $nm + n$ Veränderlichen (27) sein. Weil nun jede der $m + 1$ letzten Relationen nur eine Reihe von n Veränderlichen enthält, so schliessen wir, wie bei früheren ähnlichen Gelegenheiten (vgl. z. B. § 3 des 15. Kap., S. 382), dass die $\psi_{\lambda\mu\nu}$ von allen $nm + n$ Veränderlichen frei, also bloss Constanten $c_{\lambda\mu\nu}$ sind, sodass sich ergiebt:

$$(X_\lambda X_\mu) \equiv \sum_1^r {}_\nu c_{\lambda\mu\nu} X_\nu f \quad (\lambda, \mu = 1, 2 \,.\,.\, r). \tag{34}$$

Dies aber sagt nach dem Hauptsatze aus, dass $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ *eine r-gliedrige Gruppe* in $x_1 \,.\,.\, x_n$ erzeugen, bei der $r \leqq nm$ ist.

Da die s Gleichungen (30) unter den r Gleichungen (33) enthalten sind, so folgt, dass $U_1 f \,.\,.\, U_s f$ sich durch $V_1 f \,.\,.\, V_r f$ linear ausdrücken:

$$U_\sigma f \equiv \sum_1^r {}_\varrho \chi_{\sigma\varrho} V_\varrho f \quad (\sigma = 1, 2 \,.\,.\, s).$$

Hierin sind die $\chi_{\sigma\varrho}$ vorerst Functionen der $nm + n$ Veränderlichen (27). Aber diese Forderung zerfällt wegen der Formen (30) und (33) von $U_\sigma f$ und $V_\varrho f$ in die $m + 1$ einzelnen:

$$Y_\sigma^{(k)} f \equiv \sum_1^r {}_\varrho \chi_{\sigma\varrho} X_\varrho^{(k)} f \quad (k = 1, 2 \,.\,.\, m),$$

$$Y_\sigma f \equiv \sum_1^r {}_\varrho \chi_{\sigma\varrho} X_\varrho f$$

und zeigen, dass die $\chi_{\sigma\varrho}$ nur Constanten sind. Es ist somit

$$Y_\sigma f \equiv \sum_1^r {}_\varrho \text{Const.}\, X_\varrho f \quad (\sigma = 1, 2 \,.\,.\, s), \tag{35}$$

d. h. $Y_1 f \,.\,.\, Y_s f$ gehören der Gruppe $X_1 f \,.\,.\, X_r f$ an.

Die Gleichung (29) ist nach Voraussetzung bei irgendwie gewähltem z eine Folge der Gleichungen (30). Es ist daher auch

$$Uf \equiv \omega_1 U_1 f + \cdots + \omega_s U_s f,$$

und da hieraus sofort einzeln

$$Y^{(k)}f \equiv \omega_1 Y_1^{(k)} f + \cdot\cdot + \omega_s Y_s^{(k)} f \quad (k = 1,\ 2\,.\,.\,m),$$
$$Yf \equiv \omega_1 Y_1 f \quad + \cdot\cdot + \omega_s Y_s f$$

folgt, so beweist man sofort, dass $\omega_1\,.\,.\,\omega_s$ von den $nm + n$ Veränderlichen (27) frei, also Functionen von z allein sind, denn z tritt ja noch in Uf auf. Also ist:

$$Yf \equiv \omega_1(z) Y_1 f + \cdot\cdot + \omega_s(z) Y_s f$$

oder nach (35):

$$Yf \equiv Z_1(z) X_1 f + \cdot\cdot + Z_r(z) X_r f. \tag{36}$$

Hierin sind $Z_1(z)\,.\,.\,Z_r(z)$ Functionen von z allein.

Allgemein wird $X_j f$ die Form haben:

$$X_j f \equiv \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji}(x_1\,.\,.\,x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1,\ 2\,.\,.\,r),$$

sodass, wie wir sahen, $X_1 f\,.\,.\,X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Mithin giebt (36):

$$\eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdot\cdot + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv \sum_1^r {}^j \sum_1^n {}^i\, Z_j \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

d. h.:

$$\eta_i \equiv \sum_1^r {}^j\, Z_j \xi_{ji}\,.$$

Setzen wir diesen Wert in das simultane System (24) ein, so gelangen wir zu dem Ergebnis:

Damit das System (24) die zu Anfang angegebene Eigenschaft besitze, muss es jedenfalls die Form haben: *Form der gefundenen Systeme.*

$$\frac{dx_i}{dz} = Z_1(z)\xi_{1i}(x) + \cdot\cdot + Z_r(z)\xi_{ri}(x) \tag{37}$$
$$(i = 1,\ 2\,.\,.\,n),$$

in der $Z_1\,.\,.\,Z_r$ Functionen von z allein und die ξ_{ji} solche Functionen von $x_1\,.\,.\,x_n$ allein sind, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$X_j f \equiv \sum_1^n {}^i\, \xi_{ji}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1,\ 2\,.\,.\,r)$$

eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Ferner muss dabei $r \leq nm$ sein.

Wenn umgekehrt diese Bedingungen erfüllt sind, so hat auch das System (37) die verlangte Eigenschaft. Wählt man nämlich die Zahl

m hinreichend gross, so besitzt die Gleichung (29) oder, wie sie jetzt lautet, die Gleichung

$$\sum_1^r {}_j Z_j(X_j^{(1)}f + \cdots + X_j^{(m)}f + X_j f) = 0$$

sicher wenigstens eine Reihe von n von einander hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$ unabhängigen Lösungen $J_1 \ldots J_n$, die frei von z sind. Denn die Gleichungen

$$(38) \qquad X_j^{(1)}f + \cdots + X_j^{(m)}f + X_j f = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

sind bei passend gewähltem m von einander unabhängig. Zur Begründung dieser Behauptung dient genau die Entwickelung, die in § 3 des 15. Kap., S. 387 für die dortigen $W_j f = 0$ gegeben wurde. Wir dürfen uns daher darauf beschränken, auf jene Stelle zurückzuverweisen. Wir haben nun ein r-gliedriges vollständiges System (38) in $nm + n$ Veränderlichen vor uns, da die Relationen (34) bestehen. Es besitzt $nm + n - r$, also bei genügend grossem m mindestens n gemeinsame Lösungen, unter denen n von einander hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$ unabhängig sind: $J_1 \ldots J_n$. Wären sie nicht hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$ von einander unabhängig, so gäbe es Lösungen, die von $x_1 \ldots x_n$ ganz frei sind, also das System

$$(39) \qquad X_j^{(1)}f + \cdots + X_j^{(m)}f = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

erfüllten. Sobald nun m hinreichend gross gewählt ist, ist auch dieses System r-gliedrig, sodass es genau n Lösungen weniger als (38) besitzt. Aus diesen n Lösungen von (38), die (39) nicht erfüllen, lässt sich also keine von $x_1 \ldots x_n$ freie herstellen. Sie sind daher in der That von einander gerade hinsichtlich $x_1 \ldots x_n$ unabhängig. Aus der Existenz dieser Lösungen

$$J_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)}, x_1 \ldots x_n)$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

folgt, wie schon oben (nach (29)) bemerkt wurde, dass die Differentialgleichungen (37) die verlangte Eigenschaft besitzen.

Die soeben gemachten Bemerkungen können auch so ausgesprochen werden: *Bei vorgelegter Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ eines Raumes von n Dimensionen besitzt stets eine hinreichend grosse Anzahl $(m + 1)$ von Punkten $(x^{(1)}) \ldots (x^{(m)})$, (x) mindestens n Invarianten, die in $x_1 \ldots x_n$ von einander unabhängig sind.* Wir erinnern hierbei daran, dass wir schon in § 2 des 4. Kap. solche Invarianten bei der speciellen linearen Gruppe der Ebene betrachtet haben.

Wir sind zu dem Theoreme gelangt:

Theorem über die Syst. mit Fundamentallösgn.

Theorem 44: *Damit das System von n simultanen Differentialgleichungen:*

$$\frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

in $x_1 \ldots x_n$, z die Eigenschaft besitze, dass das allgemeine Lösungensystem $x_1 \ldots x_n$ aus einer gewissen Anzahl m von allgemein gewählten particularen Lösungensystemen

$$x_1 = x_1^{(k)}, \ldots x_n = x_n^{(k)} \quad (k = 1, 2 \ldots m)$$

durch ein Formelsystem:

$$x_i = \varphi_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)}, a_1 \ldots a_n) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

mit n willkürlichen Constanten $a_1 \ldots a_n$ darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass es die besondere Form habe:

$$\frac{dx_i}{dz} = Z_1(z)\xi_{1i}(x) + \cdots + Z_r(z)\xi_{ri}(x) \quad (i = 1, 2 \ldots n),$$

in der $Z_1 \ldots Z_r$ Functionen von z allein und die ξ_{ji} solche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ allein sind, dass die infinitesimalen Transformationen

$$X_j f \equiv \sum_1^r {}^i \, \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2 \ldots r)$$

eine r-gliedrige Gruppe erzeugen.

Auch haben wir gesehen, dass die Zahl m die Ungleichung

$$nm \geqq r$$

erfüllt.

Das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen, von dem wir ausgehen, ist äquivalent der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \eta_1(x_1 \ldots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \eta_n(x_1 \ldots x_n, z)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Eine lineare partielle Differentialgleichung

$$(40) \quad \begin{cases} \alpha_0(x_1 \ldots x_n, z)\dfrac{\partial f}{\partial z} + \alpha_1(x_1 \ldots x_n, z)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots \\ \qquad + \alpha_n(x_1 \ldots x_n, z)\dfrac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

ist also dann und nur dann eine solche mit Fundamentallösungen, wenn sie auf eine derartige Form gebracht werden kann:

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\sum_1^r {}_j Z_j(z)\,X_j f=0, \tag{41}$$

dass $X_1 f \,..\, X_r f$ eine r-gliedrige Gruppe in $x_1 \,..\, x_n$ allein erzeugen. Da jedes System von simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung mit einer linearen partiellen Differentialgleichung von der Form (40) äquivalent ist, so erhellt hieraus die Tragweite unseres Theorems*).

Lie hat im Jahre 1884 in seiner Integrationstheorie der Differentialgleichungen, die infinitesimale Transformationen gestatten**), eine grosse Integrationstheorie gerade für die Differentialgleichungen von der Form (41) entwickelt***).

Auf Gleichungen von dieser Form reduciert Lie alle Hülfsgleichungen, die man bei der Integration eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen erledigen muss. Andererseits reduciert er aber auch die Integration einer Gleichung von dieser Form (41), sobald sie gewisse bekannte Integralgleichungen besitzt, auf die Erledigung eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen.

Wir kommen hiermit auf die Bemerkungen zurück, mit denen wir die „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen“ abschlossen. Es wird beabsichtigt, diesen Zusammenhang an anderer Stelle ausführlich darzustellen.

---

*) Lie hatte schon 1884 die Differentialgleichungen von der Form (41) betrachtet. Vessiot hat zuerst die Frage nach allen *gewöhnlichen* Differentialgleichungen aufgestellt, die Fundamentalsysteme besitzen (Comptes Rendus T. CXVI (1893), S. 427, 959, 1112). Guldberg hat alsdann die Frage verallgemeinert, indem er sich nicht auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränkte (Ebenda S. 964). Aber beide Autoren gelangen nicht zu *allen* Lieschen Differentialgleichungen (41), die offenbar Fundamentalsysteme besitzen. Ihre Untersuchungen weisen daher notwendig eine Lücke auf. Diese besteht darin, dass sie implicite eine wesentliche Beschränkung machen, nämlich die, dass das allgemeinste Formelsystem

$$x_i=\varphi_i\left(x_1^{(1)}\,..\,x_n^{(1)},\,..,\,x_1^{(m)}\,..\,x_n^{(m)},\ a_1\,..\,a_n\right)$$
$$(i=1,\,2\,..\,n)$$

aus *einem* solchen System durch Einführung von Functionen der Constanten $a_1 \,..\, a_n$ als neuen Constanten hervorgehen soll. Die allgemeine, oben vorgetragene Lösung ist von Lie gegeben worden. (Siehe auch: *Über Differentialgleichungen, die Fundamentalintegrale besitzen.* Leipziger Berichte 1893, S. 341.)

**) Sophus Lie, *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten.* Math. Ann. Bd. 25, S. 71—151. Vgl. auch Gesellsch. d. Wiss. zu Christiania 1882, Nr. 10 u. 21.

***) Math. Ann. a. a. O. S. 124—130.

Handelt es sich um die *Integration* einer Differentialgleichung:

Integration eines Syst. mit Fundamentallösgn.

(41) $$\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_1^r{}^j Z_j(z) X_j f = 0,$$

bei der die

(42) $$X_j f \equiv \sum_1^n{}^i \xi_{ji}(x_1 \, . \, . \, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, oder um die Integration des äquivalenten Systems

(43) $$\frac{dx_i}{dz} = Z_1(z)\xi_{1i}(x) + \cdot \cdot + Z_r(z)\xi_{ri}(x) \quad (i = 1, 2 \, . \, . \, n),$$

so können wir z als die Zeit, $x_1 \, . \, . \, x_n$ als gewöhnliche Punktcoordinaten in einem Raume R_n von n Dimensionen deuten. Jedes Lösungensystem

(44) $$x_i = \varphi_i(z) \quad (i = 1, 2 \, . \, . \, n)$$

giebt alsdann die Bahn eines Punktes. Gehen wir von einem Punkte $(x_1^0 \, . \, . \, x_n^0)$ zur Zeit $z_1 = z_0$ aus, so wird er vermöge (43) eine Curve durchlaufen. Hat er im Momente z die Lage $(x_1 \, . \, . \, x_n)$ erreicht, so wird er nämlich im nächsten Zeitelement dz die Bewegung:

$$dx_i = (Z_1(z)\xi_{1i}(x) + \cdot \cdot + Z_r(z)\xi_{ri}(x))\, dz \quad (i = 1, 2 \, . \, . \, n)$$

erfahren. Es wird also auf den Punkt zur Zeit z im nächsten Zeitelement dz die infinitesimale Transformation

$$Yf \equiv \sum_1^r{}^j Z_j(z) X_j f$$

ausgeführt, die der Gruppe $X_1 f \, . \, . \, X_r f$ angehört, da z die Rolle einer willkürlichen Constanten spielt. Das Integrationsproblem deckt sich also damit, dass die Endlage $(x_1 \, . \, . \, x_n)$ eines Punktes zur Zeit z gefunden werden soll, der zur Zeit z_0 die Lage $(x_2^0 \, . \, . \, x_n^0)$ hatte und einer fortwährend sich ändernden infinitesimalen Transformation Uf der Gruppe $X_1 f \, . \, . \, X_r f$ unterworfen wird. Diese infinitesimalen Transformationen erzeugen eine endliche Transformation der Gruppe $X_1 f \, . \, . \, X_r f$.

Wir können auch von folgender Deutung Gebrauch machen: $x_1 \, . \, . \, x_n$, z seien gewöhnliche Punktcoordinaten in einem Raume R_{n+1} von $n + 1$ Dimensionen. $z = \text{Const.}$ stellt eine Schar von ∞^1 ebenen Mannigfaltigkeiten M_n dieses Raumes dar. Jedes Lösungensystem (44)

Integralcurve.

definiert eine *Integralcurve* im R_{n+1}, die mit jeder M_n einen Punkt gemein hat. Die Punkte der ∞^1 M_n sind hierdurch einander zugeordnet und zwar die Punkte (z) und $(z + dz)$ zweier unendlich benachbarter M_n durch die infinitesimale Transformation Uf, die Punkte irgend zweier M_n durch endliche Transformationen der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$. Es handelt sich darum, diese Zuordnung aller M_n in endlicher Form auszudrücken, denn kennen wir sie allgemein, so sind alle Integralcurven als Örter entsprechender Punkte bekannt.

Integrierende Mannigfaltigkeit sei bekannt.

Ist eine von Integralcurven erzeugte Mannigfaltigkeit, eine integrierende Mannigfaltigkeit M, *von vornherein bekannt*, so schneidet sie jede M_n in einer gewissen bekannten Mannigfaltigkeit μ. Diese μ entsprechen einander in den verschiedenen M_n. Wenn nun eine μ keine infinitesimale Transformation der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ gestattet, so giebt es auch nur eine discrete Anzahl von Transformationen der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$, die eine μ in eine andere μ überführen. Dann also ist die Zuordnung zweier beliebiger M_n bekannt und *die Integration durch ausführbare Operationen ohne jede Quadratur geleistet.*

Anders verhält es sich, wenn eine μ infinitesimale Transformationen der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ zulässt. Alsdann wird man darauf ausgehen, die auf M gelegenen Integralcurven zu bestimmen. Dies führt bei Einführung geeigneter Coordinaten für jede Schnittmannigfaltigkeit μ auf ein System von Differentialgleichungen analog (43), aber in weniger Veränderlichen. Dabei kommt alsdann nur noch die Untergruppe von $X_1 f \dots X_r f$ in betracht, die eine μ in sich transformiert.

Beispiele.

Beispiele hierzu enthält der vorige Paragraph. Zum Schlusse wollen wir noch einige andere Beispiele kurz andeuten.

1. Beispiel: Liegt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z)p + Z_2(z)q + Z_3(z)(yp - xq) = 0$$

in x, y, z vor, so ist die Gruppe

$$X_1 f \equiv p, \quad X_2 f \equiv q, \quad X_3 f \equiv yp - xq$$

die *Gruppe der Bewegungen in der* (xy)-*Ebene.* (Vgl. § 3 des 4. Kap.) Sind x, y, z gewöhnliche Punktcoordinaten im Raume, so sind die M_n hier die Ebenen $z =$ Const. Jede Ebene $z =$ Const. ist auf jede andere Ebene $z =$ Const. durch eine Bewegung bezogen. Die einzigen ebenen Curven, die Bewegungen gestatten, sind die Geraden und Kreise. Sobald also eine Integralgleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

als bekannt vorliegt derart, dass sie für $z = \text{Const.}$ weder eine Gerade noch einen Kreis vorstellt, so ist die Integration ohne weiteres geleistet. Sind zwei particulare Lösungensysteme

$$x = \varphi_1(z), \quad y = \psi_1(z);$$
$$x = \varphi_2(z), \quad y = \psi_2(z)$$

gegeben, so ist die Integration ebenfalls geleistet, denn sie stellen zwei Curven dar, die jede Ebene $z = \text{Const.}$ in zwei Punkten treffen. Da bei Bewegungen die Entfernungen ungeändert bleiben, so ist also, wenn x, y ein allgemeines Lösungensystem bedeutet, für jedes z notwendig

$$(x - \varphi_1)^2 + (y - \psi_1)^2 = \text{Const.},$$
$$(x - \varphi_2)^2 + (y - \psi_2)^2 = \text{Const.},$$

und hieraus lassen sich x und y berechnen.

2. Beispiel: Liegt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z} + Z_1(z)(x_2 p_3 - x_3 p_2) + Z_2(z)(x_3 p_1 - x_1 p_3) + Z_3(z)(x_1 p_2 - x_2 p_1) = 0$$

vor, so deuten wir x_1, x_2, x_3, z als Coordinaten eines R_4. $z = \text{Const.}$ definiert eine ebene dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_3. Die Integralcurven ordnen die Punkte dieser ∞^1 M_3 einander zu und zwar vermöge der Transformationen der *Gruppe der Rotationen um den Anfangspunkt*

$$x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad x_1 p_2 - x_2 p_1$$

im dreifach ausgedehnten Raume. Die Punkte $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ der M_3 sind einander zugeordnet, d. h. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ist ein particulares Lösungensystem. Wenn ferner

$$x_1 = \varphi_i(z), \quad x_2 = \psi_i(z), \quad x_3 = \chi_i(z)$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

drei particulare Lösungensysteme und x_1, x_2, x_3 ein beliebiges Lösungensystem sind, so ist, da auch diese Gruppe der Rotationen die Entfernungen ungeändert lässt,

$$(x_1 - \varphi_i)^2 + (x_2 - \psi_i)^2 + (x_3 - \chi_i)^2 = \text{Const.}$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

und hieraus lässt sich das allgemeine Lösungensystem x_1, x_2, x_3 berechnen. Die Gruppe der Rotationen um den Anfangspunkt lässt die Kugeln um diesen invariant. Daraus schliessen wir: Der Kugel

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$$

in einer M_3 entspricht in jeder M_3 eine Kugel mit derselben Gleichung. Mithin ist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

ein Integral. Der ganze R_4 zerfällt somit in ∞^1 bekannte dreifach ausgedehnte integrierende Mannigfaltigkeiten

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{Const.}$$

Man wird versuchen, auf einer derselben alle Integralcurven zu bestimmen. Sie besteht aus ∞^1 Kugeln in den ∞^1 Mannigfaltigkeiten $z = \text{Const.}$ Die Punkte dieser Kugeln sind einander zugeordnet vermöge der Gruppe der Rotationen. Durch Einführung passender Coordinaten auf den Kugeln, indem man die Minimalgeraden der Kugeln als Coordinatenlinien benutzt, kann man das System von Differentialgleichungen, welches die auf der Mannigfaltigkeit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{Const.}$$

liegenden Integralcurven bestimmt, auf zwei Riccati'sche Differentialgleichungen reducieren, was wir nicht weiter ausführen wollen. Wenn eine integrierende Mannigfaltigkeit

$$F(x_1, x_2, x_3, z) = 0$$

bekannt ist, die für $z = \text{Const.}$ nicht solche Kugeln darstellt, so ist die Integration durch ausführbare Operationen ohne jede Quadratur zu leisten.

Diese Beispiele, zusammen mit den im vorigen Paragraphen gegebenen, mögen zur Erläuterung der Integrationsmethoden der hier besprochenen wichtigen Kategorie von Differentialgleichungen genügen.

Sachregister.

A.

B.

C.

(Siehe auch unter K.)

D.

E.

F.

G.

U.

V.

W.

Z.







